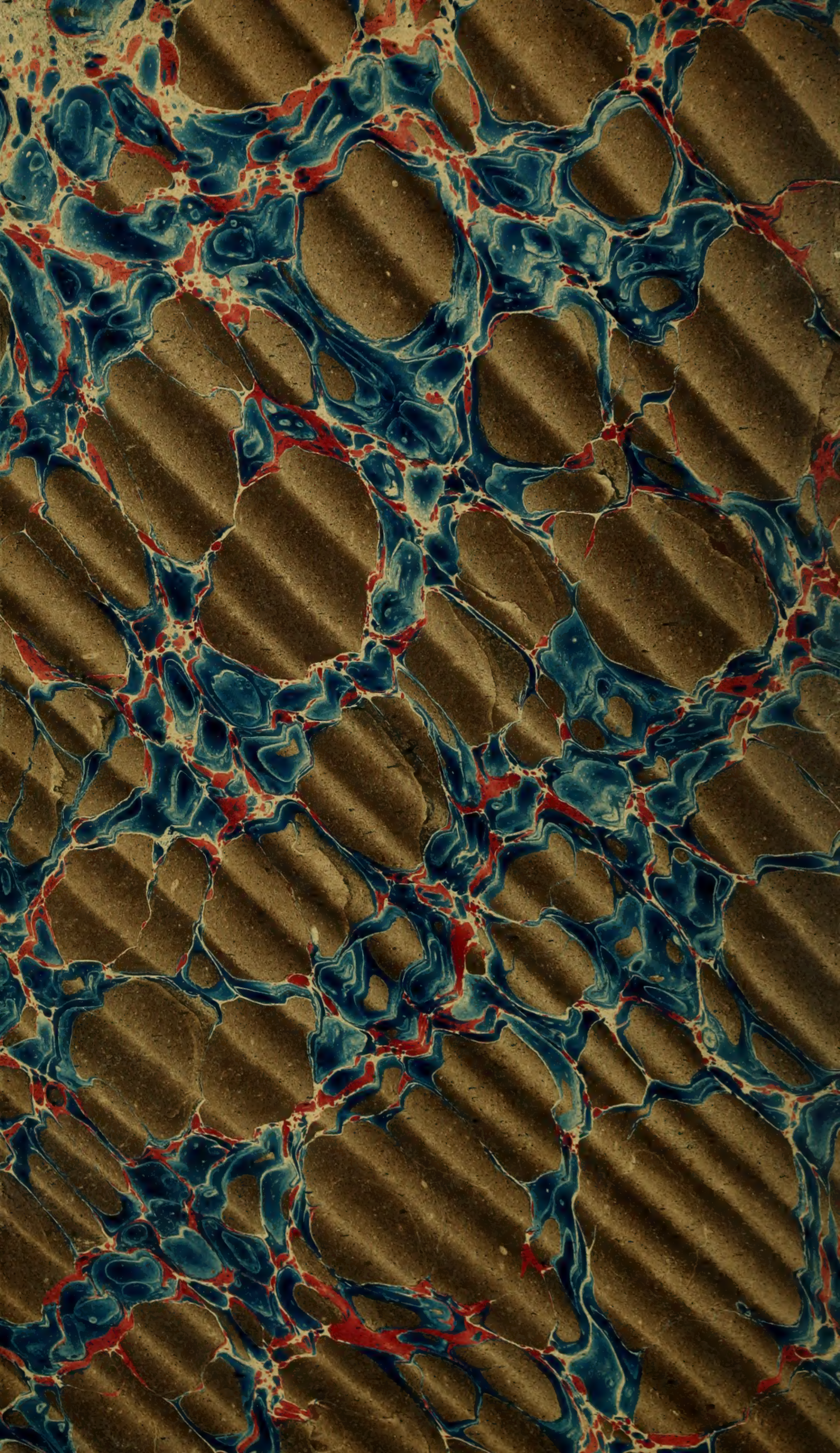
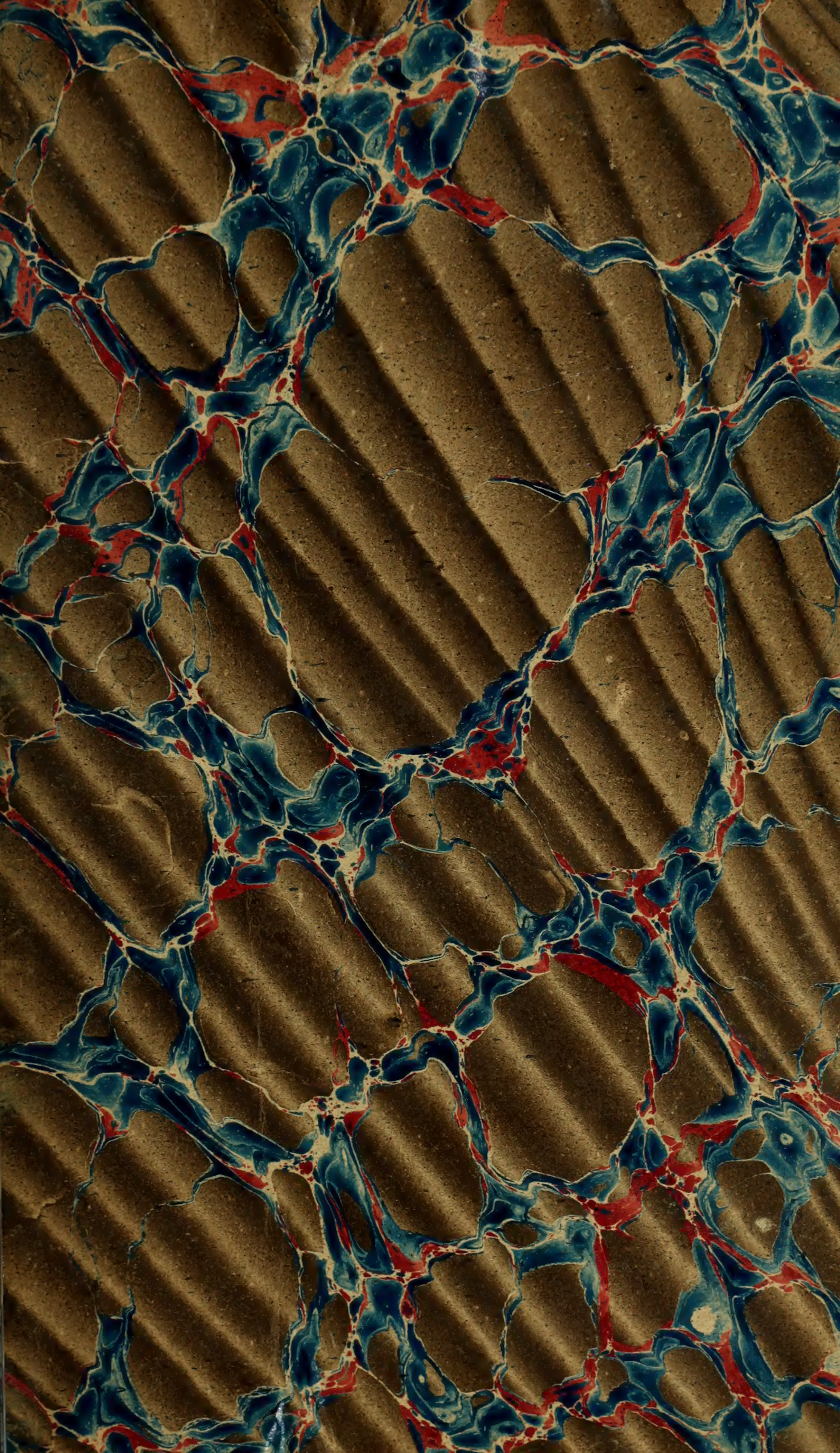
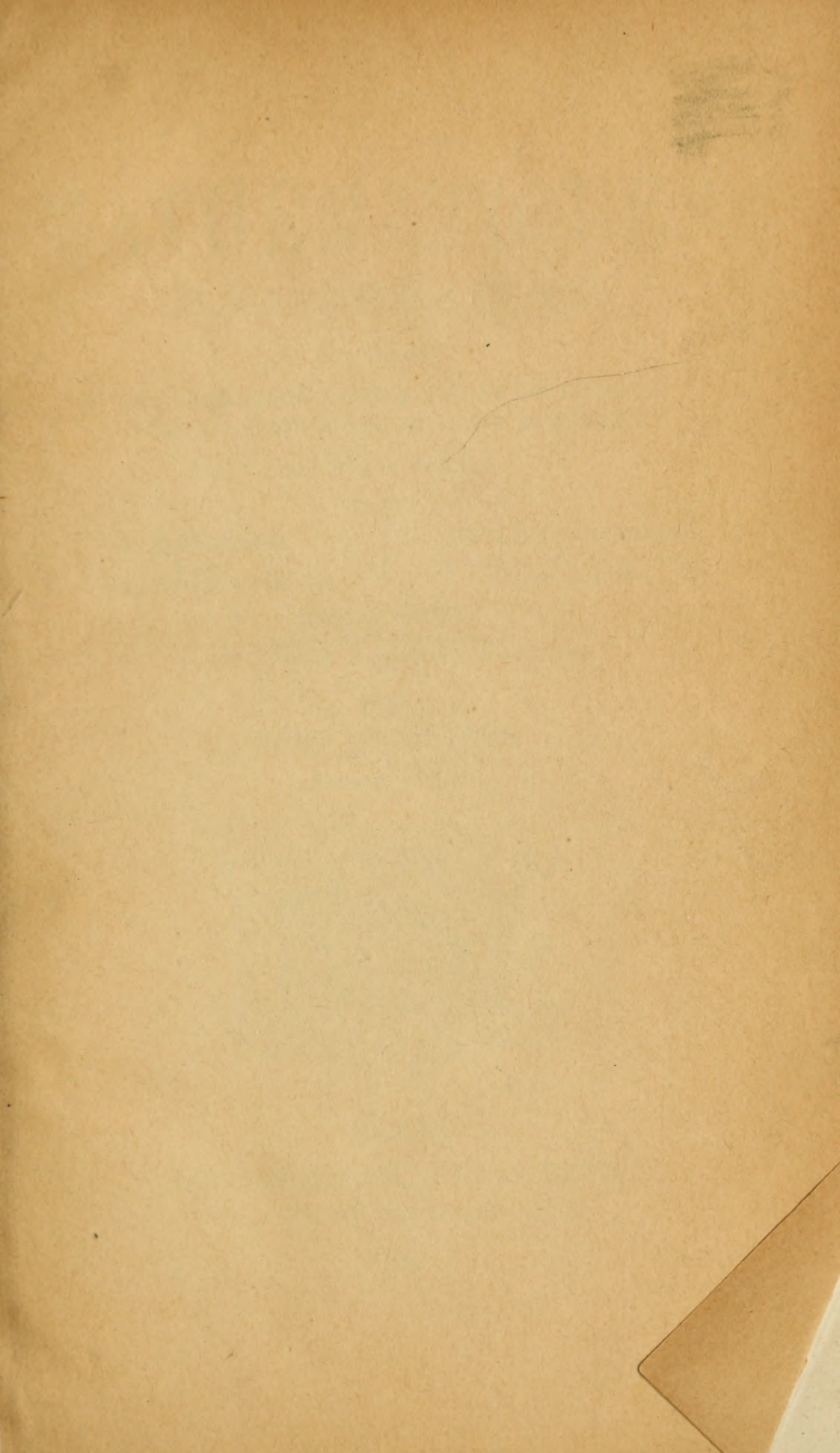

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY







JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

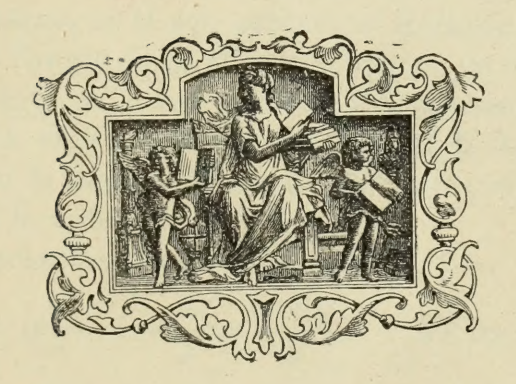
DE MM.

J. BOURGET
Recteur
de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE
TOME CINQUIÈME
Année 1886.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1886

QA
1
J6836
Sér. 2
t. 5

20504
6

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

LE THÉORÈME DE FEUERBACH

Par M. **Lignières**, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

---

1. — *Le cercle des neuf points* (*), *dans un triangle, est tangent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits.*

Je me propose de démontrer ce théorème par des considérations de géométrie très élémentaire.

Soient a, b, c les côtés du triangle et $2p$ son périmètre; R le rayon du cercle circonscrit et G son centre; r le rayon du cercle inscrit et O son centre; r' le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle A, et O′ son centre; ρ le rayon du cercle des neuf points et G′ son centre; P l'orthocentre (**), N le milieu de PA et h la hauteur AF. Soient D le milieu de a, F le pied de la hauteur h, E le point de contact du cercle inscrit et M le milieu de DF.

On a, d'après des relations connues,

$$DE = (p - c) - \frac{a}{2} = \frac{b - c}{2}, \qquad DF = \frac{b^2 - c^2}{2a};$$

donc

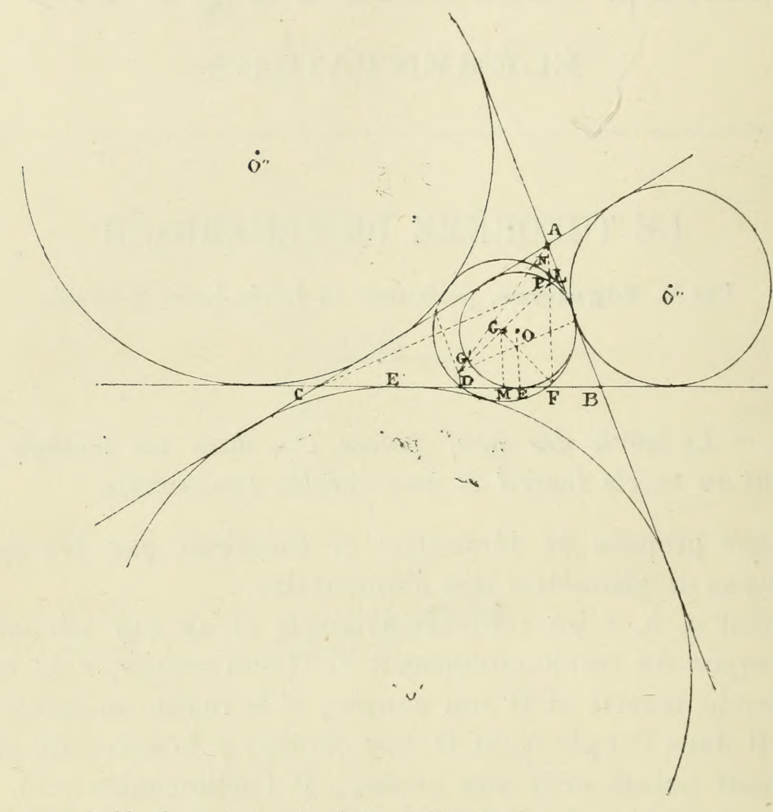
(*) Le *Cercle d'Euler*, comme le capitaine Brocard a proposé de le dénommer (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884, p. 201). Le théorème en question date de 1822. Voir une note de M. Brocard (*loc. cit*). G. L.

(**) Cette expression commode, qui est aujourd'hui généralement adoptée, est due à James Booth, *Mathesis*, t. I, p. 154; voyez aussi : Annuaire de l'Association Française, Congrès de Rouen, p. 190. G. L.

$$EF = DF - DE = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a} = \frac{(b-c)(p-a)}{a},$$

et

$$DE \times EF = \frac{(b-c)^2(p-a)}{2a}.$$



Le quadrilatère inscriptible BLPF donne

$$AP \times AF = c \times AL\,;$$

et, comme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AL,$$

on a donc

$$2AP \times AF = b^2 + c^2 - a^2\,;$$

d'où

$$NP = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4h},$$

$$NF = AF - NP = h - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4h} = \frac{4a^2h^2 - a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{4ha^2}.$$

Mais

$$2pr = ah, \quad 4Rpr = abc, \quad 4a^2h^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2,$$

donc

$$\mathrm{R}\times r-\mathrm{NF}\times r=\frac{abc}{4p}-\frac{4a^2h^2-a^2(b^2+c^2-a^2)}{8ap}$$

$$=\frac{2a^2bc-4a^2b^2+(a^2+b^2-c^2)^2+a^2(b^2+c^2-a^2)}{8ap}$$

$$=\frac{(b-c)^2[(b+c)^2-a^2]}{8ap}=\frac{(b-c)^2(p-a)}{2a}.$$

Par conséquent

$$\mathrm{DE}\times\mathrm{EF}=r\mathrm{R}-r\times\mathrm{NF}=r(\mathrm{R}-\mathrm{NF}).$$

Cela établi, on a

$$\overline{\mathrm{OG'}}^2=\left(r-\frac{1}{2}\mathrm{NF}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{DF}-\mathrm{DE}\right)^2$$

$$=r^2+(\overline{\mathrm{G'M}}^2+\overline{\mathrm{MF}}^2)+\overline{\mathrm{DE}}^2-r\times\mathrm{NF}-\mathrm{DE}\times\mathrm{DF}$$

$$=r^2+\rho^2-r\times\mathrm{NF}-\mathrm{DE}\times\mathrm{EF}=r^2+\rho^2-r\mathrm{R}=(\rho-r)^2;$$

puisque $\rho=\frac{\mathrm{R}}{2}$.

Ce qui prouve que le cercle inscrit est tangent intérieurement au cercle des neuf points.

E′ étant le point de contact du cercle ex-inscrit dans l'angle A, on a DE′ = DE et

$$\overline{\mathrm{O'G'}}^2=\left(r'+\frac{1}{2}\mathrm{NF}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{DF}+\mathrm{DE}\right)^2$$

$$=r'^2+\rho^2+\overline{\mathrm{DE}}^2+r'\times\mathrm{NF}+\mathrm{DE}\times\mathrm{DF}$$

$$=r'^2+\rho^2+r'\times\mathrm{NF}+\mathrm{DE}\times\mathrm{E'F}$$

$$=r'^2+\rho^2+\mathrm{R}r'=\left(\frac{\mathrm{R}}{2}+r'\right)^2,$$

ce qui prouve que le cercle ex-inscrit et le cercle de neuf points sont tangents extérieurement.

2. — J'ajoute quelques formules obtenues directement par des considérations de triangles rectangles et qui peuvent être utiles. Elles donnent, en fonction du rayon du cercle circonscrit, du rayon de cercle inscrit et des rayons des cercles ex-inscrits, les distances des centres, pris deux à deux, de ces cercles.

$$\overline{GO}^2 = R(R - 2r) \text{ (*)}$$
$$\overline{GO'}^2 = R(R + 2r')$$
$$\overline{GO''}^2 = R(R + 2r'')$$
$$\overline{GO'''}^2 = R(R + 2r''')$$
$$\overline{OO'}^2 = 4R(r' - r)$$
$$\overline{OO''}^2 = 4R(r'' - r)$$
$$\overline{OO'''}^2 = 4R(r''' - r)$$
$$\overline{O''O'''}^2 = 4R(r'' + r''')$$
$$\overline{O'''O'}^2 = 4R(r''' + r')$$
$$\overline{O'O''}^2 = 4R(r' + r''),$$

THÉORÈME D'ARITHMETIQUE

SUR UN PRODUIT DE DEUX FACTEURS

Un produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces facteurs. (Démonstration de Legendre.)

Considérons le produit $a \times b$, et soit $a > b$. Si le théorème est vrai pour tous les nombres moindres que a, je dis qu'il l'est encore quand l'un des facteurs est a. Soit en effet $a = b + c$. On a

$$a \times b = (b + c) \times b = b \times b + c \times b$$

et

$$b \times a = b(b + c) = b \times b + b \times c.$$

On aura donc $a \times b = b \times a$, si l'on a $c \times b = b \times c$. Or cela est supposé, car on a $a > b$ et $a > c$. Or le théorème est vrai pour le produit 1×1. Il est donc général, et se démontre de proche en proche.

(*Communiqué par* J.-B. POMEY.)

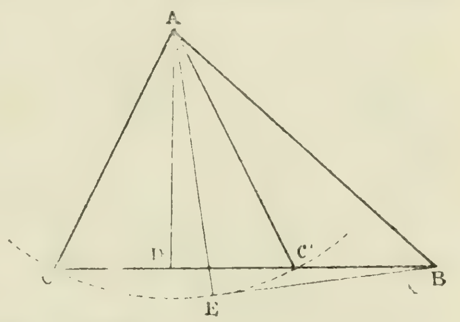
(*) Catalan, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, p. 90.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME
DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **Mosnat**, professeur au Lycée de Toulon.

Théorème. — *Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur celui-ci, si l'angle opposé est aigu ; ou plus ce double produit, si l'angle opposé est obtus.*

Décrivons du sommet A comme centre un arc passant par C et coupant le côté BC en C′. Si D est le milieu de CC′, le segment C sera la projection du côté AC sur BC et le segment C′D sera la projection du côté AC′ sur BC′. Menons du point B la tangente BE à cet arc. Le triangle rectangle ABE nous donnera



$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2,$$

et comme on a

$$AE = AC,$$

et

$$\overline{BE}^2 = BC \times BC' = BC\,(BC - 2CD) = \overline{BC}^2 - 2BC \times CD,$$

on en conclut

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Telle est la valeur du carré du côté AB, opposé à un angle aigu C.

Supposons maintenant que AB soit opposé à l'angle obtus C′ du triangle ABC′. On aura

$$AE = AC',$$

et

$$\overline{BE}^2 = BC \times BC' = BC'\,(BC' + 2C'D) = \overline{BC'}^2 + 2BC' \times C'D,$$

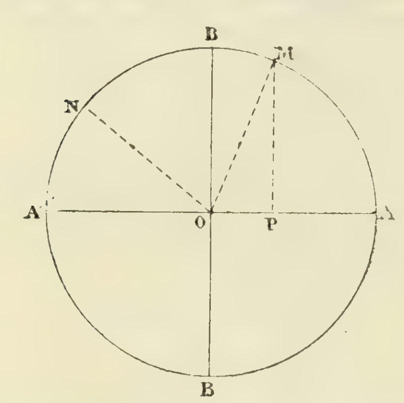
d'où

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{BC'}^2 + 2BC' \times CD,$$

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA TRIGONOMÉTRIE PLANE

Par M. **B. Niewenglowski.**

Soit OA le cercle trigonométrique ; prenons AM = a, AN = b. Soit P la projection de M sur A′A ; projetons sur la direction ON le chemin OPM et sa résultante OM : nous aurons



$$\text{P}j\text{OM} = \text{P}j\text{OP} + \text{P}j\text{PM}.$$

Or,

$$\text{P}j\text{OM} = \cos(\text{ON}, \text{OM}) = \cos(a - b)$$

$$\text{P}j\text{OP} = \cos a \cos(\text{ON}, \text{OA}) = \cos a \cos b$$

$$\text{P}j\text{PM} = \sin a \cos(\text{ON}, \text{OB}) = \sin a \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin a \sin b;$$

donc $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Si l'on change b en $-b$,

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir année 1885, p. 268.)

CHAPITRE VIII

LE RAYON DE COURBURE DANS LES CONIQUES

Nous ne pouvons quitter le tracé des coniques par points et par tangentes sans faire connaître une construction permettant de déterminer, avec la règle et l'équerre, le centre du cercle osculateur en un point pris sur la courbe.

Nous examinerons d'abord le cas de la parabole.

84. Le rayon et le centre de courbure dans la parabole. — Soient M, M′ deux points infiniment voisins sur la parabole ; les normales en ces points se coupent en C et nous ferons d'abord observer que l'angle MfM' est le double de l'angle MCM'.

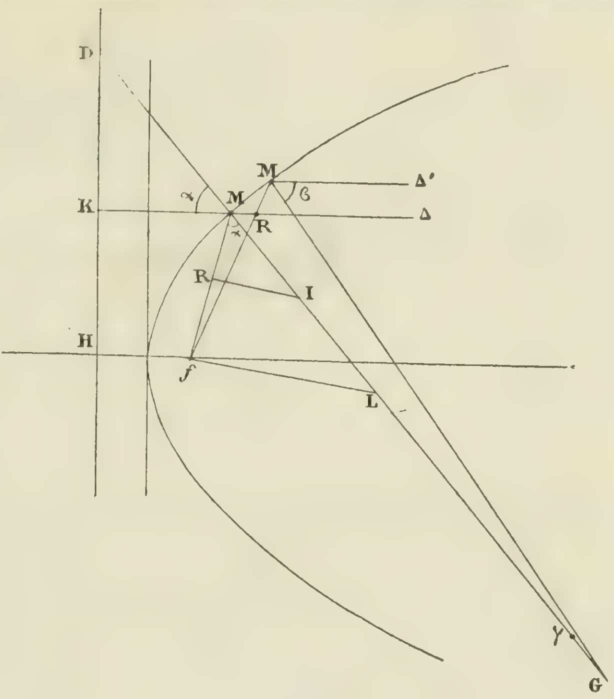


Fig. 56.

En effet, la normale étant bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur et la parallèle à la direction positive de l'axe, on voit qu'en posant,

$$fM\Delta = 2\alpha, \qquad fM'\Delta' = 2\beta,$$

on a

$$MCM' = \beta - \alpha, \qquad \text{et} \qquad MfM' = fR\Delta - fM\Delta = 2(\beta - \alpha).$$

Cette remarque étant faite, considérons les cercles $MM'f$, $MM'C$; en désignant par u et v leurs rayons, nous avons

$$\frac{MM'}{\sin f} = 2u, \qquad \text{et} \qquad \frac{MM'}{\sin C} = 2v\ ;$$

ou

$$\frac{MM'}{f} \cdot \frac{f}{\sin f} = 2u, \qquad \text{et} \qquad \frac{MM'}{C} \cdot \frac{C}{\sin C} = 2v\ ;$$

ou encore, puisque $f = 2C$

$$\frac{f}{\sin f} \cdot \frac{\sin C}{C} \cdot \frac{1}{2} = \frac{u}{v}.$$

Passons à la limite et supposons que le point M′ se rapproche de M et vienne se confondre avec lui ; la limite de $\frac{MM'}{C}$ est égale au rayon de courbure R; écrivons donc $\lim 2v = R$. Désignons par ρ la limite de u ; ρ est le rayon d'un cercle

passant par f, et par M tangentiellement à la parabole. Nous avons donc, finalement,

$$R = 4\rho.$$

D'après cela, si nous élevons au milieu H de Mf une perpendiculaire jusqu'à sa rencontre en I avec la normale en M, le point γ centre de courbure au point M s'obtient en prenant $M\gamma = 4MI$. Il est facile de reconnaître que cette construction revient à celle que nous avon sdéjà indiquée. *(Géom. an., loc. cit.)*

Nous allons encore appliquer cette méthode à l'ellipse ; elle nous conduira à une construction très simple du centre de courbure correspondant à un point de la courbe.

85. Centre de courbure dans l'ellipse. — Soient f, f' les foyers de la courbe; M, M' désignant deux points de l'ellipse, on trace les normales en ces points; soit C leur point de rencontre.

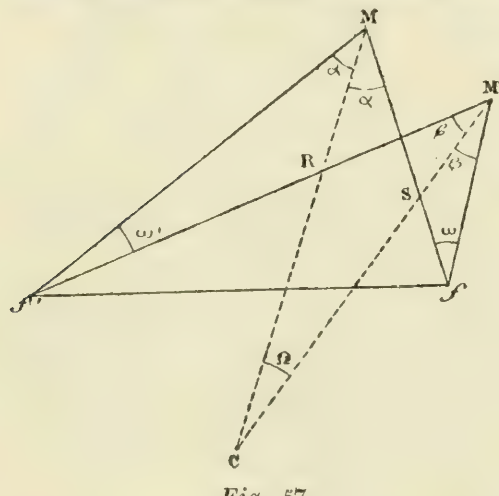


Fig. 57.

Les triangles MRf', M'RC donnent

$$\alpha + \omega' = \beta + \Omega ;$$

d'autre part, les triangles MSC, $M'Sf$ prouvent que

$$\beta + \omega = \alpha + \Omega.$$

Ajoutant ces égalités, il vient

$$\omega + \omega' = 2\Omega. \qquad (1)$$

Cela posé, désignons par ρ et ρ' les rayons des cercles circonscrits aux triangles $MM'f$, $MM'f'$; nous avons

$$\frac{MM'}{\sin\omega} = 2\rho, \quad \text{et} \quad \frac{MM'}{\sin\omega'} = 2\rho'.$$

D'autre part, le rayon de courbure R correspondant au point M est donné par la formule

$$R = \lim \frac{MM'}{\Omega} = \lim \frac{MM'}{\sin\Omega} \cdot \lim \frac{\sin\Omega}{\Omega}$$

ou

$$R = \lim \frac{MM'}{\sin \Omega}.$$

L'égalité (1) donne aussi

$$\sin \omega \cos \omega' + \sin \omega' \cos \omega = 2 \sin \Omega \cos \Omega$$

et par suite

$$\frac{\cos \omega'}{2\rho} + \frac{\cos \omega}{2\rho'} = \frac{2 \cos \Omega}{r},$$

r représentant le rayon du cercle circonscrit au triangle MM'C. En passant à la limite, c'est-à-dire en supposant que M' vienne se confondre avec M, nous avons

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{2}{R}.$$

Dans cette formule d et d' désignent les diamètres des cercles qui passent par M' tangentiellement à l'ellipse et, respectivement, par les foyers de la courbe.

De cette égalité résulte une construction assez simple pour le centre de courbure.

Soit MN la normale à l'ellipse; cette normale est rencontrée aux points G, G' par les perpendiculaires élevées aux points f et f' aux rayons vecteurs Mf, Mf'; si l'on prend le point γ conjugué harmonique de M par rapport aux points G, G'; γ est le centre de courbure qui correspond au point M.

Toutes ces constructions n'exigent, comme on le voit, que l'usage de la règle et de l'équerre.

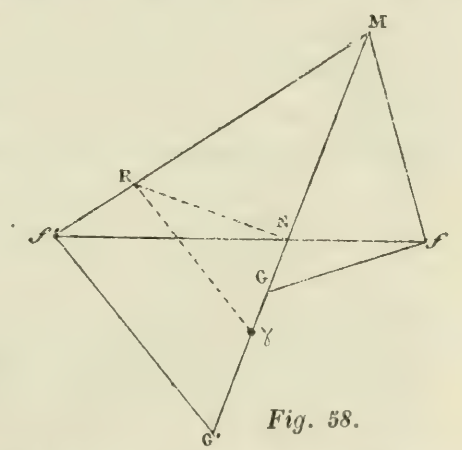


Fig. 58.

86. Remarque. — Je reviens à la construction donnée tout à l'heure pour déterminer le centre de courbure qui correspond à un point de la parabole pour faire observer que l'on peut encore fixer la position de ce point, et même d'une façon un peu plus rapide, en introduisant dans la figure la directrice de la courbe.

Reportons-nous à la figure 1; soit HD la directrice de la para-

bole. Élevons en f une perpendiculaire à Mf et soit L le point où cette perpendiculaire rencontre la normale MC. Les deux triangles rectangles MDK, MfL ont un angle égal $fML = KMD$, d'après la propriété fondamentale de la tangente; de plus, $MK = Mf$. Ces deux triangles sont égaux et l'on a

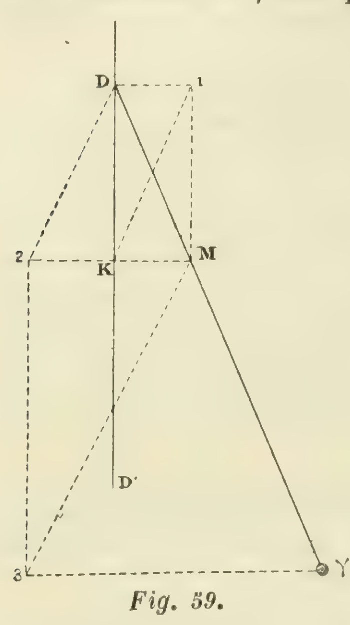


Fig. 59.

$$MD = ML.$$

D'ailleurs, nous avons vu que γ désignant le centre de courbure, nous avions

$$M\gamma = 4MI = 2ML.$$

Finalement, nous pouvons donc dire que

$$M\gamma = 2MD.$$

De cette remarque résulte, pour la construction du point γ, avec la règle et l'équerre, l'épreuve du tracé qui est représenté par la figure ci-jointe. Dans cette figure on suppose que l'on donne la normale MD, le pied M de cette normale, et la directrice DD'. On détermine successivement, et dans l'ordre indiqué, les points 1, 2 et 3. De ce dernier, on déduit le centre de courbure γ en abaissant une perpendiculaire sur la directrice, jusqu'à sa rencontre avec la normale. *(A suivre.)*

CLAUDE MYDORGE (1585-1647)

NOTICE SUR UN DE SES MANUSCRITS

CONSTRUCTIONS DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE DUES A CE MATHÉMATICIEN (*)

Par M. Edmond **Bordage**, professeur au Collège de Nantua.

Claude Mydorge (1585-1647), le savant ami de Descartes, fut le premier mathématicien français qui écrivit un traité sur les *Sections coniques*. Son ouvrage devait se composer de

(*) On lira avec intérêt à ce sujet le récent ouvrage de M. Charles Henry, *Notice sur un manuscrit inédit* de Claude Mydorge, et la notice bibliogra-

huit parties. En 1631, il publia les deux premiers livres; en 1641, il fit paraître deux autres livres. Le manuscrit des quatre autres livres a disparu. Le second livre peut être considéré comme le plus important; on y voit la description de l'ellipse au moyen du cercle dont on allonge toutes les ordonnées dans un rapport constant. On y trouve aussi la proposition suivante : *Si d'un point pris dans le plan d'une conique, on mène des rayons aux points de la courbe et qu'on les prolonge dans un rapport donné, leurs extrémités seront sur une nouvelle conique semblable à la première.* Ces deux notions peuvent être considérées comme le point de départ de cette belle méthode de transformation homographique rendue si célèbre par les travaux de M. Chasles. On doit encore à Claude Mydorge un *Examen des récréations mathématiques du Père Leurechon* (1630) et des réfutations d'une quadrature du cercle et d'une duplication du cube.

Dans un curieux manuscrit de Mydorge, retrouvé à la Bibliothèque nationale par M. Charles Henry, sont réunis 1,002 problèmes de géométrie pratique. Les solutions de ces problèmes ont été comparées à celles des mêmes questions prises dans le *Traité des constructions géométriques* d'Aboul-Wéfa (xe siècle après J.-C.) et dans la *Règle du cordeau* pour la construction des autels brâhmaniques par Baudhâyana (ive siècle avant J.-C.). On comprend aisément l'utilité de ces comparaisons. Elles sont fort instructives et elles permettent de se rendre compte de la persistance des procédés et aussi de l'évolution des idées mathématiques. Du reste, beaucoup de ces constructions antiques sont fort curieuses et bien dignes d'être remarquées.

Il existe une grande analogie dans les constructions employées par Mydorge et Aboul-Wéfa pour « faire tomber une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite ». Je donnerai ici deux de ces constructions attribuées à Aboul-Wéfa. Comme on le verra, elles possèdent l'avantage de n'empiéter par aucun trait de construction sur l'espace où l'on ne peut

---

phique publiée par la *Revue de l'enseignement secondaire et de l'enseignement supérieur*. (N° du 1er décembre 1884.)

prolonger la droite. Voici la première de ces constructions:

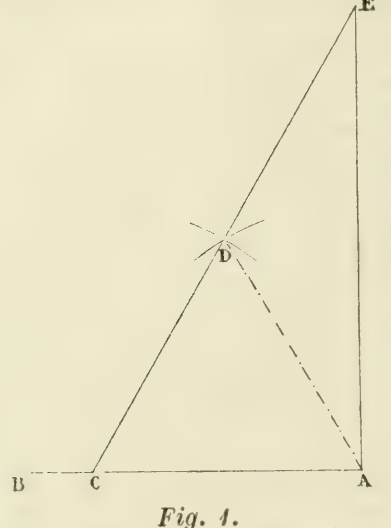


Fig. 1.

Soit la droite AB que l'on ne peut prolonger du côté A *(fig. 1)*. Prenons sur AB un point quelconque C, puis avec une ouverture de compas égale à AC décrivons deux cercles de A et de C comme centres. Ils se rencontrent en D; tirons CD, prolongeons en E de façon que DE = DC; joignons E à A et l'angle EAC sera droit.

Il est bien facile de vérifier l'exactitude de cette construction si nous joignons A à D, les deux lignes CD et DA seront égales comme rayons de cercles égaux, mais la ligne AD est la médiane du triangle CAE puisque, d'après la construction faite, CD = DE = DA. Le triangle CAE est donc rectangle en A, puisque la médiane AD est la moitié du côté CE qui est par suite l'hypoténuse. On voit aussi aisément que ce triangle rectangle possède des angles aigus qui ont pour valeurs respectives E = 30°, C = 60°, puisque l'hypoténuse CE se trouve être le double du plus petit côté de l'angle droit CA.

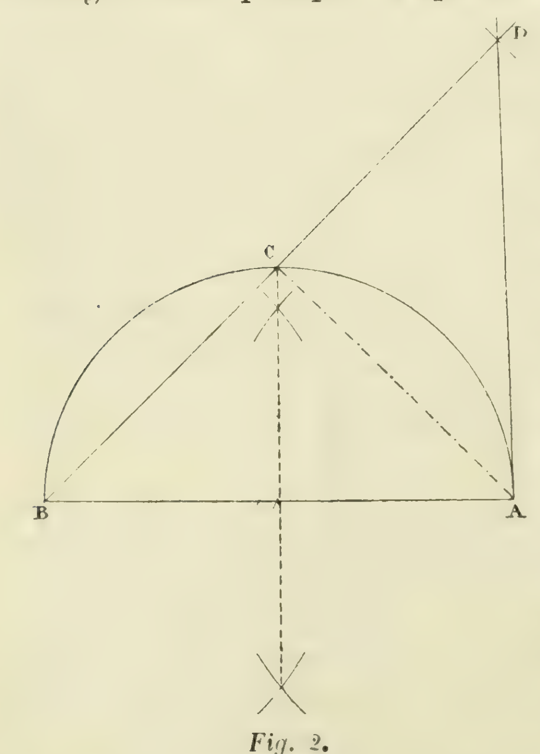


Fig. 2.

La seconde construction est la suivante : Sur AB comme diamètre, décrivons une demi-circonférence *(fig. 2)*; prenons le milieu C de cette demi-circonférence, joignons BC et prolongeons AD = CB. Joignons D à A, l'angle $\widehat{DAB}$ sera droit. En

effet, le triangle BCD est rectangle isoscèle ; mais, puisque BC = CD et que AC est par suite perpendiculaire sur le milieu de BC, le triangle BAD est lui-même isoscèle, et, comme l'angle B = 45°, D est aussi égal à 45° et l'angle A vaut par suite 90° (Le triangle BAD est alors rectangle isoscèle).

Claude Mydorge emploie la construction suivante pour « réduire trois carrés en un seul » : « Réduire deux des trois quarrez en un par un problesme connu et derechef réduire celuy qui les contient tous deux avec le troisième par le dict problesme. » Supposons que les trois carrés donnés soient LJGH, EDFG et ARCD (*fig. 3*). Il joint D à L. La ligne DL est bien le côté du carré équivalent à la somme de LJGH et de EFDH, car, en effet, $\overline{DL}^2 = \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2$. Cette première construction constitue ce que Mydorge appelle le « problesme connu ». Ensuite de D comme centre avec un rayon égal à DL, il décrit un arc de cercle qui vient couper en S le côté CB du troisième carré. Il joint les points A et S et AS est le côté du carré cherché. En effet $\overline{AS}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DS}^3 = \overline{AD}^2 + \overline{DL}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2$. Cette longueur AS, telle que $AS = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2}$ est donc le côté du carré égal à la somme des trois carrés donnés. — Pour achever la construction, Mydorge décrit de A comme centre, avec AS comme rayon, un arc de cercle qui vient rencontrer en N le côté AR prolongé ; AU étant par suite égal à AS, il ne reste plus qu'à achever le carré APNO qui répond à la question proposée. — Cette construction est, du reste, encore employée de nos jours. — La quantité de lignes tracées est seulement moins grande (*fig. 3 bis*).

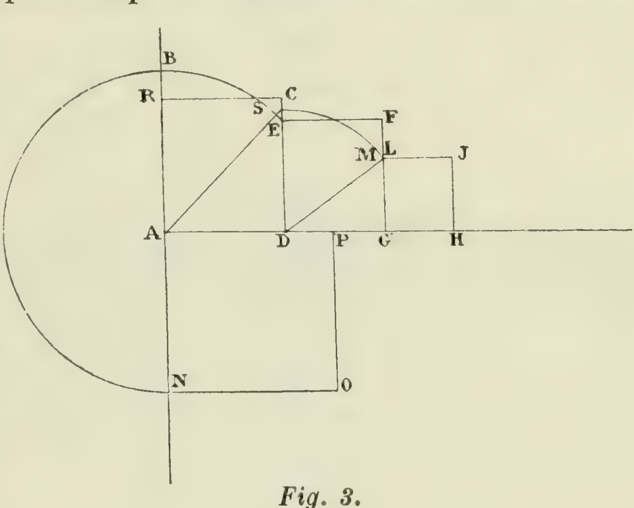


Fig. 3.

On prend deux axes rectangulaires Bx et By. On porte, à partir de l'intersection B, deux longueurs BC et BP égales aux côtés de deux des carrés donnés et cela sur chacun des axes ; on tire PC qui est égal à $\sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{BP}^2}$. En C, on élève une perpendiculaire à PB et sur cette perpendiculaire on prend une longueur CO qui est égale au côté du troisième carré donné ; on joint P à O et cette longueur PO est le côté du carré demandé, puisque $\overline{PO}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{CO}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CO}^2$. — On arrive donc ainsi au même résultat sans être obligé de tracer une aussi grande quantité de lignes que dans le procédé dû à Claude Mydorge. — On voit aussi facilement que ces deux constructions peuvent être employées non seulement dans le cas où l'on donne trois carrés, mais encore quel que soit le nombre des carrés donnés. En général, si ce nombre est n, il faudra faire $n - 1$ fois la construction qui donne le côté d'un carré égal à la somme de deux autres. *(A suivre.)*

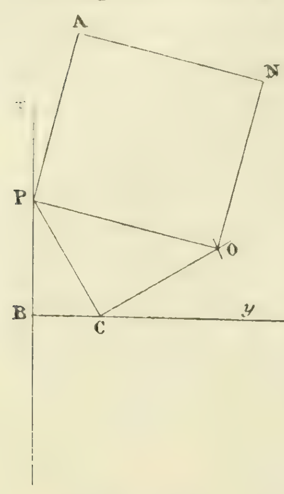


Fig. 3 bis.

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS (*)

1. — *Étant donnés quatre points en ligne droite* A, B, A', B', *trouver le lieu des points* I *d'où les segments* AB *et* A'B' *sont vus sous le même angle* (**).

(Saint-Cyr ; examens oraux, 1884.)

(*) Sous ce titre, nous publierons, dans chaque numéro, quelques questions posées aux examens de Saint-Cyr, de l'École navale, du Baccalauréat ès sciences... ; ou des questions qui nous paraîtront s'y rattacher.

Avec les énoncés, nous donnerons une indication sur leur solution; nous y ajouterons aussi quelques développements, quand l'occasion se présentera de le faire.

A ce propos, nous prions nos lecteurs de vouloir bien nous faire connaître les questions intéressantes qui, à leur connaissance, auraient été proposées à ces divers examens. G. L.

(**) Nous avons proposé cette question sous le n° 189. La solution que nous donnons ici ne nous empêchera pas de publier l'une de celles qu'on nous adressera.

Soit IS la bissectrice de l'angle BIA′, ou de l'angle AIB′, comme on voudra.

On a
$$\frac{SB}{SA'} = \frac{IB}{IA'},$$
et
$$\frac{SA}{SB'} = \frac{IA}{IB'}.$$

Ces égalités donnent
$$\frac{SA.SB}{SA'.SB'} = \frac{IA.IB}{IA'.IB'}. \quad (1)$$

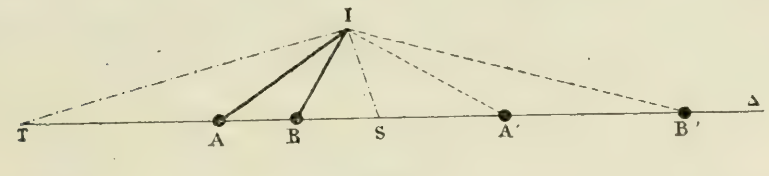


Fig. 1.

D'autre part, les deux triangles AIB, A′IB′ ayant un angle égal, et les hauteurs correspondantes étant égales, on peut écrire
$$\frac{IA.IB}{IA'.IB'} = \frac{AB}{A'B'}. \quad (2)$$

La comparaison des égalités (1) et (2) donne
$$\frac{SA.SB}{SA'.SB'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Le point S est donc un point déterminé de Δ; on verrait de même qu'en élevant IT perpendiculaire à IS, le point T est fixe. Le lieu demandé est donc la circonférence décrite sur ST comme diamètre.

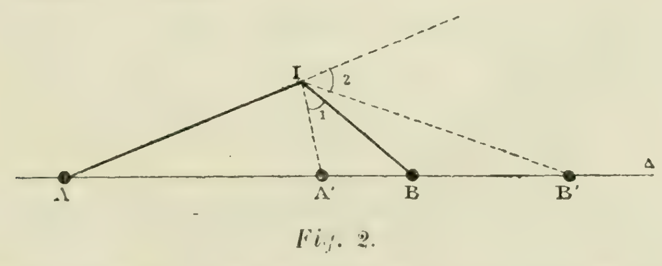


Fig. 2.

La démonstration précédente et la conclusion à laquelle elle a conduit subsistent quand, comme le représente la figure 2, les segments AB et A′B′ sont vus sous des angles *supplémentaires*.

Dans cette hypothèse les angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ sont égaux et en menant la bissectrice de l'angle BIB', et, par le point I, une droite perpendiculaire à celle-ci, on obtient sur Δ deux points fixes (*).

2. — *Vérifier que l'on a*

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{5} + \text{arc tg}\,\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Il existe beaucoup d'égalités de ce genre et nous en indiquons plus loin quelques autres qui constituent des exercices intéressants. On pourra traiter ceux-ci en suivant la marche que nous allons adopter pour résoudre la question proposée.

Posons

$$x = \text{arc tg}\,\frac{1}{2}, \qquad y = \text{arc tg}\,\frac{1}{5}, \qquad z = \text{arc tg}\,\frac{1}{8};$$

on a donc

$$\frac{1}{2} = \text{tg}\,x, \qquad \frac{1}{5} = \text{tg}\,y, \qquad \frac{1}{8} = \text{tg}\,\frac{1}{z}.$$

La formule connue

$$\text{tg}\,(x + y + z) = \frac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,y + \text{tg}\,z - \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y\,\text{tg}\,z}{1 - \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y - \text{tg}\,y\,\text{tg}\,z - \text{tg}\,z\,\text{tg}\,x},$$

donne, dans le cas présent,

$$\text{tg}\,(x + y + z) = \frac{\frac{33}{40} - \frac{1}{80}}{1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{16} - \frac{1}{40}},$$

(*) Cette question, lorsqu'on la généralise, donne naissance à un lieu géométrique bien connu.

Voici cette généralisation : *On donne deux segments de droites* AB, A'B ; *trouver le lieu du point d'où l'on voit ces deux segments sous le même angle* (ou sous deux angles supplémentaires).

Steiner s'est posé cette question (*Journal für die reine und andgewandte Mathematik;* novembre 1852) et a indiqué pour le lieu l'ensemble de deux cubiques cycliques. Elle a été proposée de nouveau (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 352) et plus récemment encore, elle a fait l'objet d'une intéressante note de M. Schoute (*Journal für....* 1885 ; p. 98).

Dans le cas particulier où les segments AB, A'B' sont placés sur une droite Δ, celle-ci fait évidemment partie du lieu. Les deux cubiques cycliques de Steiner se décomposent l'une et l'autre et donnent, comme lieu impropre la droite Δ ; puis, les deux circonférences que nous avons trouvées.

ou, tout calcul fait,

$$\operatorname{tg}(x+y+z)=1.$$

Cette égalité donne bien

$$x+y+z=\frac{\pi}{4}.$$

Pour que cette conclusion soit tout à fait rigoureuse il faut pourtant observer que la fonction

$$\text{arc tg } X$$

doit être *bien déterminée* et, à cet effet, on doit supposer qu'elle représente le plus petit arc positif dont la tangente a une longueur donnée, égale à X.

Voici les égalités auxquelles nous avons fait allusion plus haut.

$$\frac{\pi}{2}=\text{arc sin }\frac{3}{5}+\text{arc sin }\frac{4}{5},$$

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tg }\frac{1}{7}+2\text{ arc tg }\frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tg }\frac{1}{2}+\text{arc tg }\frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4}=4\text{ arc tg }\frac{1}{5}-\text{arc tg }\frac{1}{239}.$$

. . . .

On peut d'ailleurs trouver, en nombre indéfini, des égalités de ce genre en donnant des valeurs numériques aux paramètres a et b dans une identité telle que la suivante

$$\text{arc cotg}\left\{\frac{2}{a}+\frac{ab(b+1)}{2}\right\}=\text{arc tg }\frac{(b+1)a}{2}-\text{arc tg }\frac{ab}{2}.$$

Remarque. — On peut résoudre plus rapidement les questions de cette nature en s'appuyant sur les formules connues

$$\text{arc tg } u+\text{arc tg } v=\text{arc tg }\frac{u+v}{1-uv}$$

$$\text{arc tg } u+\text{arc tg } v+\text{arc tg } w=\text{arc tg }\frac{u+v+w-uvw}{1-uv-uw-vw}$$

$$\text{arc sin } u+\text{arc sin } v=\text{arc sin}\left\{v\sqrt{1-u^2}+u\sqrt{1-v^2}\right\},$$

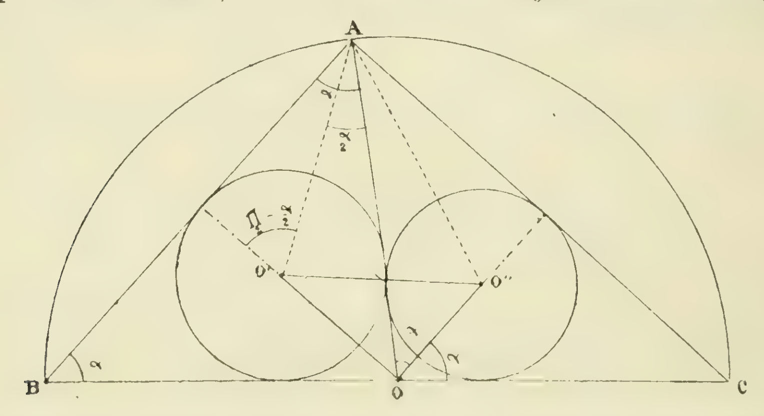
etc. . . .

(A suivre.)

QUESTION 102

On considère un point A *mobile sur une demi-circonférence* BAC *de centre* O, *et les cercles inscrits aux triangles* AOB, AOC. *Trouver la position de* A *pour laquelle les centres des cercles inscrits et le centre* O *du cercle donné forment un triangle de périmètre donné* p.

Cette question que j'ai proposée, il y a déjà quelque temps, n'a pas été traitée, ou l'a été d'une façon très incomplète.



Sa solution n'offrait pourtant aucune difficulté et sa discussion présentait, il me semble, quelque intérêt. Je résumerai, comme il suit, une solution de ce problème.

Prenons pour variable indépendante l'angle ABC $= \alpha$ et calculons, en fonction de α, les longueurs OO′, OO″, O′O″. Le triangle AOO′ donne

$$\frac{OO'}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \qquad (OA = OB = OC = R),$$

d'où

$$OO' = R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = Rx, \qquad \left(x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (1)$$

on a, d'après cela,

$$OO'' = R \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = R\,\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = R\,\frac{1 - x}{1 + x}. \qquad (2)$$

De l'égalité imposée

$$OO' + OO'' + O'O'' = p,$$

on déduit

$$\overline{O'O''}^2 = (p - OO' - OO'')^2,$$

ou

$$0 = p^2 - 2p\,(OO' + OO'') + 2OO' \,.\, OO''.$$

Les relations (1) et (2) donnent, pour déterminer x, l'équation

$$2x^2 (R^2 + pR) - x\,(2R^2 + p^2) + 2pR - p^2 = 0. \qquad (3)$$

Tel est l'équation qui permet de construire $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ et, par suite, de résoudre le problème en question.

L'intérêt de la question portait surtout sur la discussion de l'équation (3). cette discussion présentant une légère difficulté.

La réalité des racines de l'équation (3) (par conséquent la possibilité du problème) dépend du signe de la quantité U,

$$U = (2R^2 + p^2)^2 - 8(R^2 + pR)(2pR - p^2).$$

En développant, on a

$$U = p^4 + 8p^3R - 4p^2R^2 - 16pR^3 + 4R^4.$$

Pour décomposer U en facteurs, et c'est ici que nous touchons à la difficulté signalée, il faut observer que l'on peut écrire U sous la forme

$$(p^4 - 4p^2R^2 + 4R^4) + 8pR\,(p^2 - 2R^2).$$

On a donc finalement

$$U = (p^2 - 2R^2)(p^2 + 8pR - R^2).$$

La discussion se poursuit alors très simplement.

G. L.

FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN

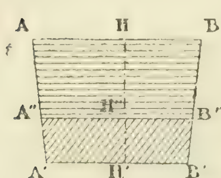
BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

(30 octobre 1885.)

Démontrer les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs. — Déterminer une progression géométrique connaissant la somme de ses quatre premiers termes qui est égale à 85 et l'excès du troisième terme sur le premier qui est égal à 15.

— Lois du mélange des gaz et des vapeurs.

— Dans un vase ABA'B' ayant la forme d'un tronc de cône de révolution dont les bases sont perpendiculaires à l'axe, le diamètre AB étant égal à 60^{cm}, celui de la base A'B' à 30^{cm}, la hauteur totale HH' étant 30^{cm}, qui repose par sa base A'B' sur un plan horizontal, on verse du mercure jusqu'à une hauteur $H'H'' = 12^{cm}$, puis on le remplit d'eau.



On demande :

1° De calculer le poids du mercure et de l'eau contenus dans ce vase;

2° De déterminer la pression sur la base A'B'.

(6 novembre 1885.)

Théorie du plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs nombres.

— Calculer les angles B et C d'un triangle dont on connaît deux côtés b et c et l'angle compris A. Appliquer les formules au cas où l'on donne :

$$A = 60^\circ$$
$$b = \sqrt[3]{0,01}$$
$$c = \cos^2 123^\circ\ 27'\ 38'',7.$$

— Réfraction de la lumière. Angle limite.

— Un cylindre creux dont la base a une surface donnée $3,3 = 0^{mq},01$ et dont la hauteur totale H, $H = 0^{m},50$ est plongé dans l'eau jusqu'à une hauteur $h = 0^{m},10$. Calculer le volume du mercure qu'il faut verser dans ce cylindre pour qu'il affleure.

(9 novembre 1885.)

La base d'une pyramide triangulaire SABC est un triangle rectangle BAC, l'arête AB est perpendiculaire à cette base et a 1^{m} de longueur. Les deux autres arêtes SB et SC font respectivement avec AB des angles de 60° et de 30°.

1° On demande de calculer le volume de la pyramide et la longueur de la perpendiculaire AP abaissée du point A sur la face opposée BSC ;

2° On construira à l'échelle de 1/10 les projections de cette pyramide en faisant coïncider l'arête AC avec la ligne de terre, et les faces ASB et ASC respectivement avec le plan vertical et le plan horizontal, et on rabattra la base BAC sur le plan vertical en la faisant tourner autour de AB, la face BSC et le point P sur le plan horizontal en les faisant tourner autour de SC.

(11 novembre 1885.)

On donne un tronc de cône droit dont le rayon R de la grande base est 7^{m}, le rayon r de la petite base 3^{m} et la hauteur h, 6^{m}. Déterminer sans le secours des logarithmes à quelle distance de la base inférieure on doit mener un plan parallèle à cette base pour obtenir deux troncs de cône équivalents.

— Étant données les traces d'un plan et les projections d'une droite, prouver que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite soit perpendiculaire au plan est que les projections de cette droite soient respectivement perpendiculaires aux traces du plan.

— Devant un miroir concave de 1^{m} de rayon et à une distance de 25^{m} on place un écran. Déterminer à quelle distance de cet écran il faudra placer un objet lumineux pour que son image se forme sur l'écran.

— Coefficient de dilatation des liquides.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

(3 novembre 1885.)

— Établir les formules qui permettent de résoudre un triangle rectiligne connaissant deux côtés et l'angle compris entre ces côtés.

— Trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.

— Trouver le centre de gravité d'un cône creux connaissant la hauteur totale h et les rayons R et r extérieur et intérieur de la base. On prendra pour inconnue la distance x du centre de gravité cherché à la base. Vers quelle limite tend x lorsque $R - r$ tend vers zéro ?

— Microscope composé.

— Calculer le poids de la vapeur d'eau à 100° qu'il faudrait injecter sur 20^{kg} de glace à 10° au-dessous de zéro pour la faire fondre et porter l'eau de fusion à 30°. Cette glace est renfermée dans un vase métallique pesant 1,000^{gr}. On donne la chaleur spécifique de la glace, 0,5 ; sa chaleur latente de fusion, 80 ; sa chaleur latente de vaporisation 537 ; la chaleur spécifique du métal du vase 0,1.

— Tige, principales modifications de sa structure dans les plantes dicotylédones et monocotylédones.

— Cadrans solaires.

— Établir les formules qui donnent $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$ en fonction des sinus et des cosinus des angles a et b ; ces angles a et b étant quelconques.

— Densité des gaz.

— Propriétés du phosphore.

— On donne dans le plan horizontal un cercle de 8 c/m de rayon. Ce cercle sert de base à un cône droit dont la hauteur est 15 c/m. On coupe le cône par un plan vertical et parallèle à une génératrice de front du cône. Ce plan est à 4 c/m du sommet du cône. On demande :

1° De trouver la projection de l'intersection ;

2° De développer la surface et l'intersection.

QUESTIONS PROPOSÉES

202 (1). — Étant donné un contour polygonal convexe ABCDE... dont les côtés successifs forment une progression géométrique décroissante indéfinie et dont les côtés consécutifs font entre eux un angle constant :

1° On regarde les côtés du contour comme représentant des forces tirant dans le sens indiqué par l'ordre alphabétique, et on demande de trouver la résultante de toutes ces forces ;

2° Aux sommets successifs A, B, C, D... du contour on place des poids formant une progression géométrique décrois-

sante, et on demande le centre de gravité de ce système de poids;

3° On regarde les côtés du contour comme des lignes pesantes, et on demande de trouver le centre de gravité de ce contour.

(2) Sur un arc de cercle donné on prend n points équidistants sur lesquels on place des poids croissant en progression géométrique; trouver le centre de gravité de ce système de poids.

(3) Sur un mètre cube homogène on place un décimètre cube de la même matière de manière que les centres soient sur une même perpendiculaire à la face commune; sur celui-ci, on place de la même manière un centimètre cube, et ainsi de suite. Trouver la position du centre de gravité du corps ainsi formé. *(Dellac.)*

203. — On donne un cercle Δ et, à l'intérieur de ce cercle, un point fixe P. Soit Δ' une tangente fixe perpendiculaire au diamètre qui passe par P.

1° Autour de P on fait tourner une transversale qui rencontre Δ aux points Q et Q'; en ces points on élève à QQ' des perpendiculaires qui rencontrent Δ' aux points M, M' et l'on projette le point M sur PM', ou le point M' sur PM, comme l'on voudra. Trouver le lieu décrit par l'une ou l'autre de ces projections.

Ce lieu est une circonférence concentrique à la proposée et passant par P.

2° On joint AQ et AQ' et l'on projette M' sur AQ', ou M sur AQ; le lieu de ces projections est une circonférence tangente à Δ au point A et passant par le point P' symétrique de P par rapport au centre de Δ. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 29016-5.

NOTE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. **S. Realis.**

1. — Je me propose de montrer dans cette petite note comment on peut sans faire usage d'aucun principe spécial de l'analyse indéterminée, mais par le seul emploi des identités algébriques, assigner, d'une manière directe, une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 + 2y^2 = z^2 + 2A^2, \qquad (\alpha)$$

A étant un nombre entier donné, et x, y, z devant être premiers avec A.

2. — Je me proposerai aussi la même question pour l'équation

$$x^2 + 2y^2 = A^2 + 2z^2, \qquad (\beta)$$

les entiers x, y, z devant, de même, être premiers avec le nombre donné A.

A la question I on satisfait, entre autres manières, en posant

$$x = a + A, \qquad y = 2a - A, \qquad z = 3a - A,$$

c'est-à-dire en posant l'identité

$$(a + A)^2 + 2(2a - A)^2 = (3a - A)^2 + 2A^2,$$

où l'on peut assigner à a une valeur entière arbitraire et première à la valeur absolue du nombre donné A.

A la question II on satisfait par la même relation d'identité, mise sous la forme

$$\left(\frac{4z + A}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{z - 2A}{3}\right)^2 = A^2 + 2z^2,$$

où z peut recevoir une infinité de valeurs premières au nombre donné A, et propres à rendre $4z + A$ et $z - 2A$ divisibles par 3.

Les deux questions n'en forment qu'une seule, en réalité, et les solutions s'obtiennent d'après le même principe. Inutile d'ajouter que les égalités qui précèdent, bien que renfermant

une infinité de résultats particuliers, sont loin de fournir toutes les solutions qui conviennent aux équations considérées. Par exemple, pour A = 1, la formule relative à l'énonce I ne donne pas la solution

$$17^2 + 2 \cdot 13^2 = 25^2 + 2 \cdot 1^2,$$

et la formule relative à l'énoncé II ne donne pas la solution

$$17^2 + 2 \cdot 9^2 = 1^2 + 2 \cdot 15^2.$$

On donne une utile extension à la question en se proposant d'assigner une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 + ny^2 = u^2 + nv^2,$$

où n est un coefficient entier, non carré, et où l'une des quatre indéterminées a reçu une valeur constante, fixée d'avance.

En ce cas, si c'est le nombre v qui est donné, et que l'on ait $v = A$, on peut employer, par exemple, l'identité

$$[(n - 1)\,a + nA]^2 + n\,(2a + A)^2 = [(n + 1)\,a + nA]^2 + nA^2,$$

où l'on désigne par a un entier arbitraire, positif ou négatif, et premier avec A.

Si c'est u qui est donné, et que l'on ait $u = A$, on transformera la relation précédente, en écrivant

$$(2na + A)^2 + n\,[(n - 1)\,a + A]^2 = A^2 + n\,[(n + 1)\,a + A]^2,$$

par où l'on répond à la question au moyen de valeurs arbitraires de a, premières avec la valeur absolue de A.

Dans le cas particulier de $n = m^2 - 1$, on a, entre autres, la relation très simple

$$x^2 + (m^2 - 1)\,y^2 = \left[\frac{x + (m^2 - 1)\,y}{m}\right]^2 + (m^2 - 1)\left(\frac{x - y}{m}\right)^2.$$

Ayant fixé d'avance, dans le premier membre de cette formule, la valeur du nombre x (ou du nombre y), premier avec m, on peut assigner immédiatement une infinité de valeurs de y (ou x), propres à rendre, dans le second membre, $x - y$ divisible par m.

Il est bon de remarquer que tout ce qui précède s'obtient très facilement, et d'une manière directe, à l'aide de l'identité donnée par Euler pour prouver que le produit de deux expressions de la forme $x^2 + ny^2$, où n est un coefficient constant, est lui-même une expression de cette forme. A

l'égard de cette identité, et de quelques autres formules analogues, très utiles dans la théorie des nombres, nous croyons ne pouvoir mieux faire ici que de renvoyer les jeunes lecteurs à la première leçon de l'excellente *Algèbre* de M. G. de Longchamps.

Nota. — L'identité d'Euler dont parle ici M. Realis est la suivante :

$$(aX - nbY)^2 + n(aY + bX)^2 = (aX + nbY)^2 + n(aY - bX)^2.$$

Comme le faisait observer M. Realis, dans une lettre qu'il m'adressait et qui concernait la légère addition qu'on va lire, en posant

$$aY - bX = A,$$

A étant un entier donné ; a, b désignant des valeurs entières arbitraires, premières entre elles ; on peut, par la méthode connue, assigner une infinité de valeurs entières à X et à Y, vérifiant l'équation précédente. De cette remarque et de l'identité d'Euler on déduit une infinité de solutions entières de l'équation (α). On peut suivre une marche analogue pour l'équation (β).

Voici d'ailleurs comment on peut résoudre complètement l'équation (α), en ramenant la détermination de toutes les solutions de cette équation à celle d'une équation indéterminée linéaire.

Soit (x, y, z) une solution quelconque de l'équation proposée ; on a

$$\frac{x - y}{A + y} = \frac{2(A - y)}{x + z} = \frac{t}{\theta},$$

t et θ désignant des entiers.

Cette égalité donne

$$x - z - ty = At,$$
$$tx + tz + 2\theta y = 2A\theta.$$

On en tire

$$t\theta x = t^2\frac{(A + y)}{2} + \theta^2(A - y)$$

et

$$t\theta z = \theta^2(A - y) - t^2\frac{(A + y)}{2}.$$

La première prouve que t divise $\theta^2(A - y)$, et comme il est premier avec θ^2 il divise $A - y$; la seconde prouve aussi que θ divise $A + y$. Il faut encore observer que A et y sont de même parité. En effet, l'égalité

$$x^2 - z^2 = 2(A^2 - y^2)$$

prouve que si A et y ne sont pas de même parité, $A - y$ et $A + y$ étant impairs, $(x - z)(x + z)$ serait divisible par 2 et non par 4 ; ce qui implique contradiction.

Posons donc

$$A - y = 2tu,$$
$$A + y = 2\theta v,$$

u et v désignant une solution entière de l'équation

$$A = tu + \theta v. \qquad (1)$$

On obtient alors

$$\left.\begin{aligned} y &= A - 2tu = 2\theta v - A,\\ x &= tv + 2\theta u,\\ z &= 2\theta u - tv. \end{aligned}\right\}$$

Dans ces formules, A est la constante donnée; t et θ désignent deux entiers premiers entre eux et arbitrairement choisis; enfin, u et v représentent une solution quelconque de l'équation proposée.

On pourra suivre une marche analogue pour la résolution de l'équation (5), et cette méthode peut servir à résoudre un grand nombre d'équations indéterminées. On voit qu'elle peut se résumer en disant que l'on cherche d'abord toutes les solutions commensurables d'une équation donnée pour distinguer ensuite, parmi celles-ci, les solutions entières. Cette idée est d'ailleurs empruntée à la représentation des coordonnées d'un point mobile sur une courbe ou sur une surface unicursale, au moyen d'un ou de deux paramètres arbitraires.

G. L.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GEOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 8.)

87. Centre de courbure de l'hyperbole équilatère. — La solution que nous avons donnée plus haut pour déterminer le centre de courbure d'une ellipse déterminée par ses foyers et les extrémités du grand axe s'applique, avec les modifications convenables, à l'hyperbole; cette courbe étant déterminée par ses foyers et par les extrémités de l'axe transverse.

Mais nous examinerons, à cause de son importance, le cas où l'hyperbole considérée est équilatère. Nous supposerons d'ailleurs qu'elle est déterminée par ses asymptotes Δ, Δ′ et par un point M; c'est en ce point M que nous nous proposons de construire le rayon de courbure.

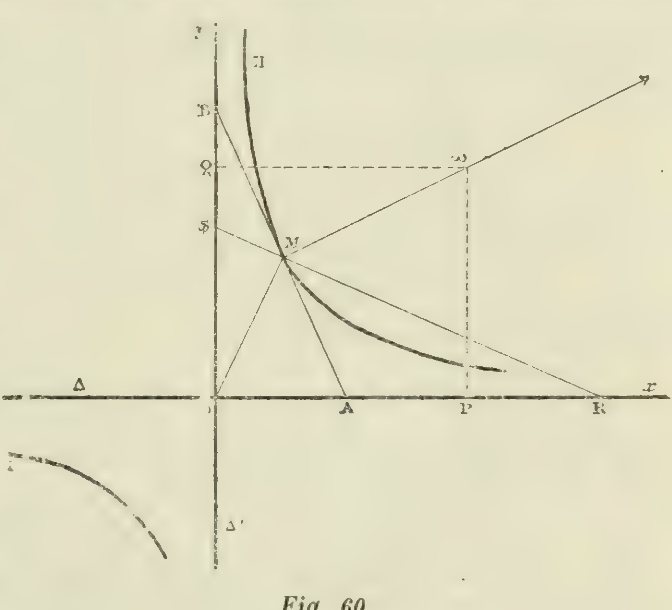


Fig. 60.

Pour démontrer la propriété qui sert de base à la construction que nous allons indiquer, il paraît commode de considérer l'hyperbole H comme une unicursale et de fixer la position du centre de courbure, c'est-à-dire les coordonnées de

ce point, au moyen d'un paramètre t qui varie, quand M se déplace sur H.

Prenons pour axes de coordonnées les asymptotes Δ, Δ'; dans ce système, H est représentée par l'équation

$$xy = m^2.$$

Soient x', y' les coordonnées de M ; posons

$$\frac{x'}{m} = \frac{m}{y'} = t. \qquad \text{(A)}$$

La droite AB qui passe par M, tangentiellement à H, a pour équation

$$xy' + yx' = 2m^2;$$

par suite la normale $M\omega'$ est représentée par l'égalité

$$xx' - yy' = x'^2 - y'^2.$$

Les relations (A) permettent d'écrire cette égalité sous la forme

$$xt^3 - ty = mt^4 - m. \qquad (1)$$

Prenons la dérivée par rapport à t, nous avons

$$3t^2x - y = 4mt^3. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent, pour déterminer les coordonnées du centre de courbure ω, les formules

$$\frac{x}{m} = \frac{1 + 3t^4}{2t^3}, \qquad \frac{y}{m} = \frac{3 + t^4}{2t}.$$

Abaissons du point ω des perpendiculaires ωP, ωQ sur les asymptotes; en observant que nous avons

$$\text{OA} = 2x', \ \text{OB} = 2y',$$

nous obtenons les relations

$$\text{AP} = m\,\frac{t^4 - 1}{2t^3}, \qquad \text{BQ} = m\,\frac{t^4 - 1}{2t}.$$

D'autre part, élevons au point M la droite RS perpendiculaire sur OM, nous trouvons

$$\text{AR} = 2\text{AP}, \quad \text{et} \quad \text{BS} = 2\text{BQ}.$$

De cette remarque, nous pouvons déduire une construction très simple au moyen de la règle et de l'équerre du centre de courbure en un point M pris sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes Δ, Δ' sont données de position.

Par le point donné M *on trace une droite* AB *partagée par ce point et par les asymptotes en deux parties égales; soit* Mω *la perpendiculaire à* AB. *On élève ensuite une droite* RS *perpendi-*

culaire à OM ; *les parallèles aux asymptotes menées par les milieux des segments* AR *et* BS *se coupent sur* $M\omega$, *au centre de courbure cherché.*

On observera que la droite $M\omega$ pourrait, pour cette détermination du centre de courbure, n'être pas tracée; mais la présence de cette droite dans l'épure donne à la construction indiquée une vérification précieuse.

88. Détermination du centre de courbure, les éléments donnés étant quelconques. — Lorsque la conique proposée Γ est déterminée par des éléments différents de ceux que nous avons admis dans les paragraphes précédents, le procédé le plus général que nous puissions indiquer, pour la détermination du centre de courbure, consiste à déduire des données de la conique les éléments mêmes que nous avons supposés connus.

Un exemple suffira pour faire comprendre ce que nous entendons par là.

Je prendrai le cas très simple d'une parabole P, déterminée par deux tangentes AT, AT' et par les points de contact M, M'; cet exemple me donnera l'occasion de faire connaître une construction très élégante de la parabole, par points et par tangentes, construction qui a été indiquée par M. d'Ocagne (*).



Fig. 61.

Soit AB la médiane du triangle MAM' ; traçons le parallélogramme MBCD ; par les points C et D menons deux parallèles quelconques CC' DD'; puis, par C' et D' des droites C'C'', D'D'', parallèles à

(*) *Mathesis*, 1885; t. V, p. 26.

AB. La droite $C''D''$ est tangente à la parabole P, et si nous prenons $C''I = KD''$, le point de contact est précisément le point I.

Cette proposition que nous nous bornons à énoncer se démontre très simplement par le calcul; elle s'établit aussi immédiatement par des considérations géométriques diverses et notamment en montrant que la transversale réciproque de $C''D''$ par rapport au triangle MAM' se meut en restant parallèle à une direction fixe.

Si l'on veut maintenant déterminer le centre de courbure de P (*), au point I, on peut opérer de la manière suivante, De l'orthocentre du triangle $AC''D''$, on abaisse une perpendiculaire Δ sur AD. La normale en I rencontre Δ en un point J; on prend $I\omega = 2JI$; ω est le centre de courbure.

89. Remarque relative au problème de l'intersection d'une droite et d'une conique. — On a sans doute observé que nous n'avions, à aucun moment, abordé certains problèmes qu'on a quelquefois considérés comme appartenant à la géométrie de la règle, mais qui ressortent vraiment d'une géométrie supérieure; nous entendons ici, par cette expression, la géométrie du compas. Tels sont les problèmes dans lesquels on se propose de déterminer les points communs à une droite tracée Δ et à une conique bien déterminée, par certaines conditions données; ou encore ceux où l'on se propose le tracé, point par point, de coniques ayant avec une conique donnée un contact d'un certain ordre et vérifiant en outre quelques autres conditions (**), etc.

Tous ces problèmes exigent qu'une conique donnée soit tracée dans l'épure que l'on fait, ou que, à un certain

---

(*) M. d'Ocagne, d'après une indication qu'il nous a fournie, détermine différemment le centre de courbure; la construction qu'il donne et qui est aussi simple que celle que nous indiquons ici, doit paraître prochainement, croyons-nous, dans les *Nouvelles Annales*, dans une note qui fait suite au mémoire *sur l'enveloppe de certaines droites mobiles*, dont la première partie a été publiée (*loc. cit.*, 1883).

(**) *Géométrie de la Règle;* théorèmes et problèmes sur les contacts des sections coniques, par M. Plücker, docteur de l'Université de Bonn (*Annales de Gergonne*, t. XVII; 1825 et 1827; p. 37).

moment on fasse usage du compas ; ce sont donc des problèmes du second degré, insolubles avec la règle seule. Mais le problème retombe au premier degré et ressort alors de la géométrie de la règle, dans le sens rigoureux que nous donnons à ce terme dans cet ouvrage, lorsque l'un des points communs à la conique et à la droite considérées est connu d'avance.

Nous donnerons, en terminant les problèmes relatifs aux coniques, un exemple remarquable de ce dernier genre de problèmes.

90. Problème. — *Connaissant le pied d'une normale* Δ *à la parabole* P, *trouver le second point commun à* Δ *et à* P.

Soit A′ (x', y') le point symétrique de A par rapport à Ox; ayant fait la construction qu'indique la figure (construction dans laquelle AA′B, ABC, ACI sont des angles droits) on obtient sur la normale Δ un point I; il est facile de reconnaître que I est le second point d'intersection de Δ avec P.

Fig. 62.

En désignant par x'', y'' les coordonnées de C, on a en effet
$\mathrm{CH} = -y'' = \mathrm{A'H} + \mathrm{A'C} = y' + \mathrm{A'B}\ \mathrm{tg}\ \alpha = y' + 2p\ \mathrm{tg}\ \alpha,$
ou

$$\mathrm{CH} = -y'' = \frac{2p(x'+p)}{y'}. \qquad (1)$$

D'autre part on a

$$x'' = \mathrm{OH} + \mathrm{CI} = x' + (y' + \mathrm{CH})\ \mathrm{tg}\ \alpha = x' + \frac{p}{y'}\left[y' + \frac{2p(x'+p)}{y'}\right].$$

ou encore

$$x'' = \frac{2p(x'+p)^2}{y'^2}. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) prouvent bien que

$$y''^2 = 2px''.$$

Ainsi, I est le point cherché ; il s'obtient, en faisant seulement usage de la règle et de l'équerre, par la construction qu'indique la figure. Dans cette construction, on ne suppose nullement que la parabole soit tracée; cette courbe est déterminée par son axe, la tangente au sommet et un point A.

Mais, sans vouloir multiplier autrement ces considérations diverses, nous quittons avec cet exercice l'étude des sections coniques pour nous occuper des applications de la géométrie de la règle au tracé, par points et par tangentes, de certaines courbes d'un ordre supérieur. Nous abordons ici un sujet plus intéressant et qui ne semble pas avoir encore été exploité, du moins avec la suite et la méthode que nous allons y mettre. Les chapitres (*) que nous consacrons à cette étude compléteront la première partie de cet ouvrage ; nous développerons ensuite, dans la seconde partie, les applications pratiques de la géométrie de la règle et de l'équerre aux questions diverses qui intéressent les opérations effectuées sur le terrain et quelques problèmes que soulève l'art de la guerre. Nous rentrerons alors, pour ne plus l'abandonner, dans le champ des mathématiques élémentaires proprement dites.

CLAUDE MYDORGE (1585-1647)

NOTICE SUR UN DE SES MANUSCRITS

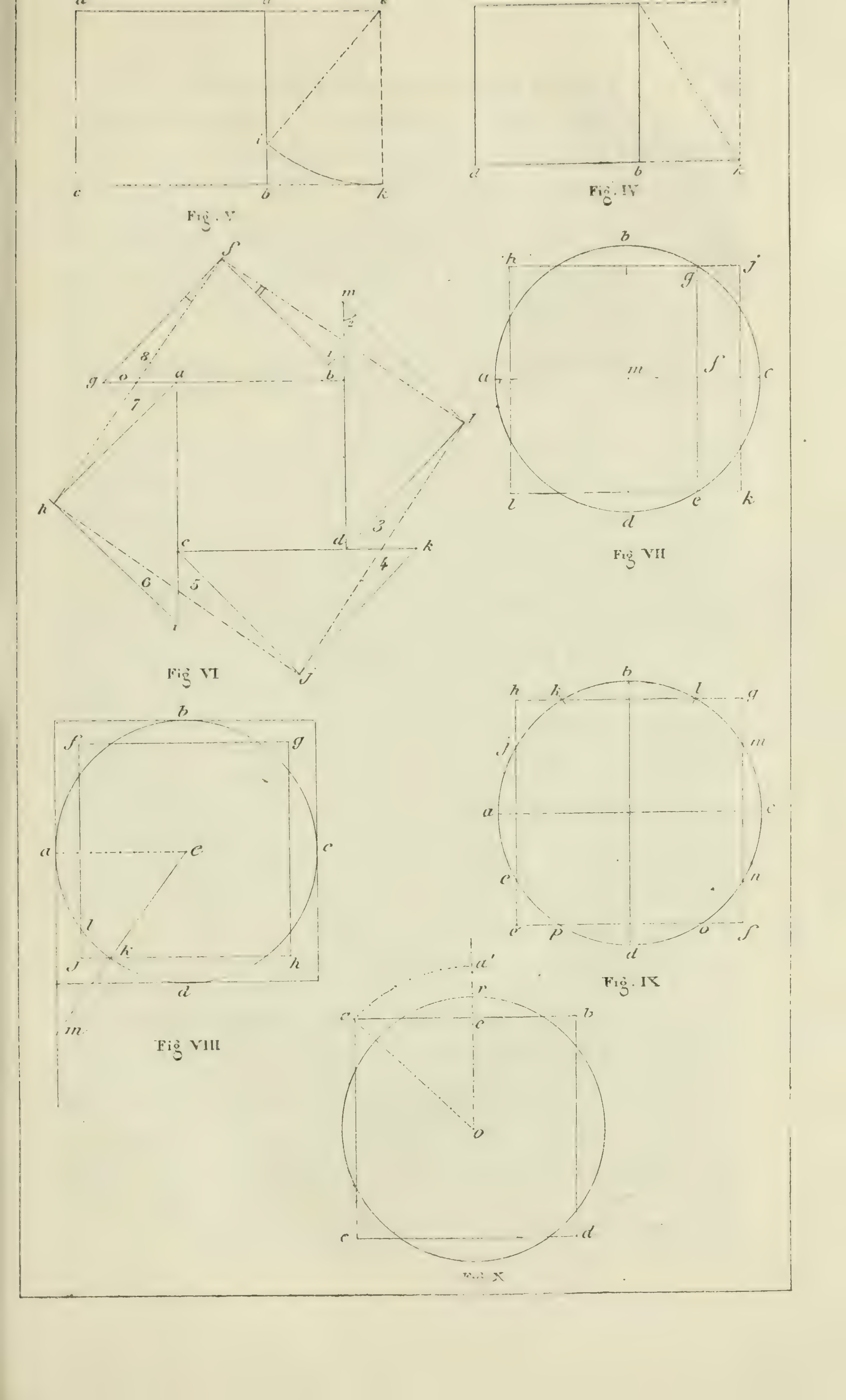
CONSTRUCTIONS DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE DUES A CE MATHÉMATICIEN

Par M. **Edmond Bordage**, professeur au Collège de Nantua.

(Suite et fin, voir p. 12.)

Cette construction est en germe chez Baudhâyana qui dit : « *Pour faire la somme de deux carrés quelconques, avec le côté* ae *du plus petit* (fig. 4) *on fait au plus grand un accroisse-*

(*) Ces chapitres traitant de matières tout à fait étrangères aux mathématiques élémentaires seront, pour ce motif, développés dans le *Journal des Mathématiques spéciales*. Aussitôt qu'ils seront publiés, nous reprendrons ici, avec la seconde partie, l'exposition élémentaire à laquelle nous faisons allusion dans les lignes qui terminent cet article.


Fig. V
Fig. IV
Fig. VI
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. X

ment, un crément aebk; *la corde tendue en travers de ce crément, soit* ak, *est le côté de la somme.* »

Pour retrancher un carré d'un autre, Baudhâyana dit ensuite : « *Avec le côté de celui qu'on veut retrancher, on dessine au plus grand un crément* aebk (fig. 5) ; *un des flancs* ek *de ce crément est reporté en biais sur l'autre flanc en* ci. *Là où il tombe, on détache ce qui dépasse et le fragment restant* ai *est le côté de la différence.* »

Il avait dit précédemment : « *Dans un carré parfait, la corde tendue en biais* (la diagonale) *produit une surface de contenance double.* »

Puis : « *Si l'on prend le côté du carré, si l'on élève en l'une des extrémités une perpendiculaire égale à la ligne productrice du double* (la diagonale) ; *si l'on joint les extrémités de ces deux lignes perpendiculaires, la ligne en biais ainsi obtenue sera le côté d'un carré* triple *du carré primitif.* »

Aboul-Wéfa a aussi traité la question des trois carrés.

Dans ses écrits, l'énoncé est ainsi formulé : « *Former un carré avec trois briques carrées et égales.* » Sa solution très élégante, étant considérées les données *matérielles* de la question, est celle-ci : Il coupe deux des briques suivant la diagonale et applique ces demi-carrés par la diagonale autour de la troisième brique restée intacte *abcd* (fig. 6). Il tend successivement un cordeau ou pose une règle sur les nouveaux sommets *f*, *h*, *j*, *l*. — Les petits morceaux triangulaires tels que *fog* qui dépassent les quatre côtés *hf*, *fl*, *lj* et *jh* sont retournés et appliqués de façon à remplir les quatre petits vides tels que *hoa*.

On vérifie facilement l'exactitude de ce procédé.

Si, en effet, on supposait menées les lignes *fm*, *bl*, *lk*, *dj*, *ij*, *hc*, *af* et *gh* ; les quatre quadrilatères *fmbl*, *lkdj*, *cjih* et *fagh* seraient des parallélogrammes ; car les côtés *ml* et *fb*, *dl* et *jk*, *cj* et *hi*, *ah* et *fg* seraient égaux, comme côtés de l'angle droit de triangles isoscèles égaux. Ces côtés seraient aussi parallèles deux à deux. En effet, considérons un de ces quadrilatères *fmbl* par exemple. L'angle *bml* $= 45°$; l'angle *fbm* complément d'un angle *gbf* égal à $45°$, vaut lui aussi $45°$. Les angles *bml*, *fbm* étant égaux, on conclut de là le

parallélisme des côtés *fb* et *ml*. Le quadrilatère *fbml* est donc bien un parallélogramme, puisque deux de ses côtés opposés sont égaux et parallèles. — La démonstration serait identiquement la même pour les trois autres parallélogrammes. — Les quatre parallélogrammes considérés seraient de plus égaux, car leurs autres côtés tels que *fm*, *lk*, *ij*, *gh* seraient égaux comme appartenant à des triangles *fbm*, *ldk*, *icj*, *gah* dont on prouverait aisément l'égalité. De l'égalité des quatre parallélogrammes on déduit l'égalité de leurs diagonales ; c'est-à-dire que

$$fl = lj = hj = fh.$$

La figure *hflj* est donc un losange. Prouvons maintenant que les angles sont droits. Considérons l'un de ces angles $\widehat{hfl}$, par exemple. On voit qu'on peut obtenir cet angle en retranchant de l'angle droit *gfb* la partie $\widehat{gfo}$ et en ajoutant au reste $\widehat{ofb}$ la partie $\widehat{bfl}$ qui est, nous le savons, égale à $\widehat{gfo}$ *(d'après l'égalité des parallélogrammes)*. L'angle *hfl* est donc aussi droit. On prouve de la sorte que le losange *hflj* est un carré, puisque ses angles sont droits. Il est évident aussi que les petits triangles désignés sur la figure 6 par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *(les chiffres pairs désignant les triangles intérieurs au carré* hflj *et les chiffres impairs les triangles extérieurs)* sont égaux comme appartenant à des parallélogrammes égaux. On pourra donc remplir les vides triangulaires 1, 3, 5, 7 par les petits triangles de brique 2, 4, 6, 8. Ce qui prouve bien que les trois briques données disposées comme il a été dit forment exactement le carré *hflj*.

Mydorge donne, dans son manuscrit, trois constructions pour faire un carré égal à un cercle donné. Voici ces trois constructions :

1° « *Il faut diviser le semi-diamètre en deux parties égales par une perpendiculaire menée d'une part et d'autre jusqu'à la circonférence. Le carré décrit de cette ligne sera égal au cercle donné.* » Il dit aussi : « *Le cercle* abcd (fig. 8), *le semi-diamètre* mc *estant donnés, je divise* mc *également au point* f, *auquel je descris la perpendiculaire* efg ; *de laquelle je descris le quarré* hjkl *égal au cercle* abcd. »

(Il faut observer que le carré *hjkl* doit être construit de

façon que les points *a*, *b*, *c*, *d* soient les milieux des côtés de ce carré.)

2° « *Après avoir descrit le quarré à l'entour de la circonférence* (le carré circonscrit), *il faut diviser le quart du cercle en trois parties égalles et du centre par la section inférieure mener une ligne droite tant qu'elle rencontre le costé du quarré estant continué, et la partie d'entre le diamètre et la section donnera le costé du quarré.*

» *Le cercle* abcd (fig. 8) *estant donné et le quart* ad *divisé en trois parties égalles*, k *estant le point de division inférieur, je descris la ligne* em ; *et* am *donnera le costé du quarré qui est* fgjh, *lequel est égal au cercle donné* abcd.

3° » *Il faut diviser le cercle en quatre parties égalles par deux diamètres et diviser chaque quart de la circonférence en trois parties égalles et de deux sections en deux sections mener une ligne droicte, lesquelles quatre droictes menées d'une part et d'autre feront un quarré égal au cercle donné.*

» *Le cercle* abcd (fig. 9) *étant divisé en quatre parties égalles par deux diamètres* ac *et* bd *et la quarte partie de chaque circonférence en trois parties égalles, ce qui donne les points* j, k, l, m, n, o, p, e, *de section en section, je mène les lignes droictes* e'f, fg, gh *et* he' *qui font le quarré* e'fgh *égal au cercle* abcd. »

Baudhâyana avait lui aussi traité la question de la quadrature du cercle et la question qui consiste à transformer un carré en un cercle équivalent. Voici quelles étaient les constructions qu'il employait :

1° « *Pour faire d'un carré un cercle, on rabattra* (fig. 10), *à partir du centre la moitié de la diagonale sur la ligne* eo. *Avec celle-ci et le tiers de ce qui dépasse* $\left(\mathrm{oe} + \frac{1}{3}\mathrm{ea}'\right)$, *on tracera le cercle qui sera équivalent au carré donné* abcd.

2° » *Pour faire d'un cercle un carré, on fait* 8 *parts du diamètre : une de ces parts sera divisée en* 29 *portions dont on retirera* 28 $\left(\textit{et il restera } \frac{1}{29}\cdot\frac{1}{8}\right)$ *ainsi que* $\frac{1}{6}$ *d'une portion diminuée de son propre huitième.* »

Ou en chiffres

$$\text{D.}\left[\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\left(\frac{1}{29.8}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{29.8.6}\right)\right]$$

ou encore

$$\text{D.}\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{1}{8.29.6}+\frac{1}{8.29.6.8}\right),$$

« *Ceci étant le côté du carré équivalent, le coefficient en série* est $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. »

Il ajoute encore : « *Où bien on fera* 15 *parts du diamètre, desquelles on retranchera* 2 : *telle est la racine imparfaite du carré équivalent au cercle.* » Mais comme $\frac{13}{15}$ est la valeur connue de $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ employée par Héron pour la surface du triangle équilatéral, nous retombons dans la construction de Claude Mydorge. Du reste, Baudhâyana lui-même la déclare « imparfaite » (à-nityâ). C'est le terme qu'il emploie.

Nous venons de citer quelques-unes des questions contenues dans le manuscrit de Claude Mydorge, retrouvé par M. Charles Henry. A côté de ces questions, on trouve de remarquables constructions de polygones inscrits et à côtés donnés, d'élégants procédés de trisection de l'angle et de transformation de surface, etc. — Ces questions sont pleines d'intérêt, et elles nous paraissent dignes d'être introduites dans l'enseignement secondaire et, surtout, dans l'*enseignement professionnel.*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. PICQUET, *répétiteur à l'École Polytechnique.*

Monsieur le rédacteur,

Vous avez bien voulu me faire part des doutes émis par un de nos collègues relativement à l'existence d'une solution élémentaire pour l'une des questions proposées à l'examen écrit de l'École forestière en 1885. Je m'empresse de vous

communiquer celle que j'aurais désiré rencontrer dans les copies des candidats; et, si vous vous placez à ce point de vue qu'une question de concours doit se décomposer en plusieurs parties de difficulté successivement croissante, de façon à permettre le classement des candidats, je pense que vous apprécierez avec moi que la question dont il s'agit n'était pas de nature à mériter les reproches de notre collègue.

L'énoncé était le suivant :

Effectuer la division $\frac{1}{(1-x)^3}$, *trouver la loi du quotient, et chercher, par les règles de la division, à quelle condition le quotient, prolongé indéfiniment, représente la fraction proposée.*

Solution. — *Première partie.* Effectuer la division, et induire par l'observation la loi du quotient

$$1 + 3x + 6x^2 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} + \dots$$

Cette première partie, très simple, a été traitée par la plus grande partie des candidats.

Deuxième partie. — Démontrer la loi induite, en observant également la loi des restes, admettant l'une et l'autre jusqu'au reste qui suit l'inscription au quotient du terme en x^{n-1}, et prouvant qu'elles subsistent pour le terme suivant du quotient, et pour le reste suivant.

Je ne crois pas utile d'insister sur ce côté de la question qui, quoique moins simple que le précédent et n'ayant été traité que par un nombre beaucoup plus restreint de candidats, n'offre aucune difficulté.

Troisième partie. — Il résulte de ce qui précède que le reste obtenu après que l'on a écrit au quotient le terme $\frac{1}{2} n(n+1) x^{n-1}$ est

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n - n(n+2)x^{n+1} + \frac{1}{2} n(n+1)x^{n+2}.$$

On a donc, d'après l'identité de la division, en désignant ce reste par R,

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + \frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1} + \frac{R}{(1-x)^3}.$$

ou

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1}$$
$$+ \frac{x^n}{2(1-x)^3}[(n+1)(n+2) - 2n(n+2)x + n(n+1)x^2].$$

Si $x \geqslant 1$, il est clair que le terme complémentaire du second membre augmente indéfiniment avec n.

Si l'on a, au contraire, $x < 1$, j'écris ce terme

$$\frac{n(n+1)(n+2)x^n}{2(1-x)^3}\left[\frac{1}{n} - \frac{2x}{n+1} + \frac{x^2}{n+2}\right];$$

le second facteur tend évidemment vers zéro à mesure que n augmente. Quant au premier, si l'on passe d'une valeur de n à la suivante, on le multiplie par $\frac{n+3}{n}x$, expression plus petite que l'unité dès que l'on a

$$n > \frac{3x}{1-x},$$

et qui va toujours en diminuant. Les valeurs successives du premier facteur sont donc constamment inférieures, à partir d'une certaine valeur de n, à celles des termes d'une progression géométrique dont la raison serait l'une quelconque des valeurs, inférieures à l'unité, de la quantité $\frac{n+3}{n}x$; par suite il tend vers zéro, et le quotient, prolongé indéfiniment, représente la fraction proposée.

Je ne pense pas, Monsieur le Rédacteur, être sorti dans cette démonstration des limites du programme de l'École forestière, puisque je n'ai invoqué que l'identité de la division et la théorie des progressions géométriques, et je suppose que vous trouverez avec moi que cette troisième partie de la question, sans être au-dessus de la force des meilleurs candidats, était propre à les révéler. Que si notre estimable collègue tirait quelque objection de ce fait qu'il y est fait usage d'autre chose que des règles de la division, sa dialectique pourraît paraître subtile en ce sens que, si l'énoncé vise évidemment l'identité de la division, il ne s'oppose en quoi que ce soit à l'emploi ultérieur d'autres propriétés.

Enfin, j'ajouterai que la démonstration suivante, relative au

cas où $x < 1$, très élémentaire, eût encore été considérée comme très suffisante et parfaitement accueillie, une fois la question entamée comme plus haut avec l'identité de la division.

On a, pour $x < 1$

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x}{1-x}$$

$$x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x^2}{1-x}$$

. . . .

d'où, en ajoutant

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}(1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

De même, en multipliant successivement par x, x^2. . .

$$x + 2x^2 + \ldots + nx^n + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2},$$

$$x^2 + \ldots + (n-1)x^n + \ldots = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

. . . .

d'où en ajoutant

$$1 + 3x + 6x^2 + \ldots \frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}[1 + x + x^2 + \ldots] = \frac{1}{(1-x)^3} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Nota. — Je puis dire que je partage complètement l'opinion de M. Picquet et je trouve, avec lui, que la question proposée aux examens écrits de l'Ecole forestière admettait une solution qui ne dépassait nullement la force des meilleurs candidats à cette école; la rédaction qu'on vient de lire en est bien la preuve. Mais je dois ajouter qu'en lui transmettant les doutes auxquels il a été fait allusion, au début de cette note, le collègue qui me les communiquait ne les a pas accompagnés d'une critique quelconque. Il avait, me disait-il, quelque peine à voir comment on pouvait

résoudre la question posée, sans dépasser les limites des mathématiques élémentaires. J'ai prié M. Picquet de vouloir bien lever les doutes qui m'avaient été transmis; telle est l'origine de la présente lettre. Je pense qu'elle donnera pleine satisfaction à notre collègue; les candidats à l'École forestière la consulteront aussi avec intérêt, et il ne me reste plus qu'à remercier M. Picquet de l'obligeance avec laquelle il a répondu au désir que je lui témoignais.

G. L.

Extrait d'une lettre de M. Aug. Poulain, *à Angers.*

... La démonstration donnée page 7, pour établir le théorème relatif au carré du côté d'un triangle, peut être abrégée comme il suit et avec cette particularité avantageuse qu'elle s'adresse également bien au cas où le point B est intérieur ou extérieur au cercle considéré dans la démonstration de M. Mosnat.

En considérant la transversale qui passe par le centre du cercle, on voit que la puissance du point B par rapport au cercle CC′ est égale à $\pm\left(\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2\right)$. Le signe $+$ doit être pris dans le cas du point extérieur, le signe $-$ dans l'hypothèse contraire.

Plaçons-nous dans le premier cas, lequel correspond à la figure (*).

Nous avons

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = BC\,.\,BC' = BC(BC - 2CD),$$

ou

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC\,.\,CD.$$

C. Q. F. D.

(*) Le lecteur est prié de se reporter à la figure de la page 7, mais les lignes AE, BE de cette figure sont inutiles dans la présente démonstration.

Comme nous le fait observer avec raison M. Poulain, dans une autre lettre, on peut ainsi établir le théorème de Pythagore, et d'une façon bien simple, en décrivant un cercle ayant pour centre l'une des extrémités B de l'hypoténuse BC, et pour rayon le côté BA qui y aboutit. La puissance du point C par rapport à ce cercle est représentée par $\overline{CA}^2$ ou encore par (CB — BA) (CB + BA). D'où résulte la relation de Pythagore.

Mais nous croyons que cette remarque a été faite depuis longtemps et il est probable que la démonstration précédente fait partie de la collection des 70 (?) démonstrations connues du théorème en question. G. L.

QUESTION 101

Solution par M. Lucien Lévy.

Sur la bissectrice de l'angle droit d'un triangle ABC, *rectangle en* A, *on prend un point* M. *Soit* D *le point où la bissectrice rencontre l'hypoténuse*, P *la projection de* M *sur* AC. *Déterminons ce point* M *de façon que la somme des aires des triangles* BMD *et* MPC *soit égale à une surface donnée.*

Soit AM $= x$, AD $= d$, $\frac{s\sqrt{2}}{4}$ la surface donnée. Abaissons de B la perpendiculaire BH $= \frac{c\sqrt{2}}{2}$ sur la bissectrice. Si l'on remarque que AP $=$ PM $= \frac{x\sqrt{2}}{2}$, on obtient immédiatement l'équation du problème

$$\frac{1}{2}(d-x)\frac{c\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\left(b - \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)\frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{s\sqrt{2}}{4},$$

ou
$$(d-x)c + \left(b - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)x = s, \qquad (1)$$

ou
$$x^2 + (c-b)x\sqrt{2} + (s-cd)\sqrt{2} = 0. \qquad (2)$$

La discussion de cette équation n'offre aucune difficulté : on la simplifiera en distinguant le cas où c est plus grand que b. Il est alors nécessaire que l'on ait

$$s < cd, \qquad (3)$$

et une seule racine est positive. Pour qu'elle convienne, il faut qu'elle soit inférieure à d ; ce qui donne, en substituant d dans le premier membre de l'équation (2),

$$d^2 - bd\sqrt{2} + s\sqrt{2} > 0,$$

ou
$$s\sqrt{2} > (b\sqrt{2} - d)d,$$

ou encore
$$s\sqrt{2} > \frac{bd^2}{c}. \qquad (4)$$

Les conditions (3) et (4), compatibles à cause de $c > b$, suffisent.

Si c est inférieur à b, la condition de réalité des racines de l'équation (2) fournit l'inégalité

$$s \leqslant \frac{(b-c)^2 + 2cd\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Pour achever la discussion, il restera à exprimer que x est positif et inférieur à d, c'est-à-dire à comparer s aux quantités cd et $\frac{bd^2}{c}$ dont chacune peut être plus grande que l'autre. Cette discussion n'offre aucune difficulté ; j'examinerai seulement un cas.

$$\text{Soit } \frac{bd^2}{c} < cd < \frac{(b-c)^2 + 2cd\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Si s est inférieur à $\frac{bd^2}{c}$, les racines sont de signes contraires et d est entre ces racines; donc aucune ne convient. Si s est entre $\frac{bd^2}{c}$ et cd, les racines sont de signes contraires, d est plus grand que les deux, la positive convient donc. Si enfin s est entre cd et $\frac{(b-c)^2 + 2cd\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, les deux racines sont positives et conviennent, comme il est facile de s'en assurer.

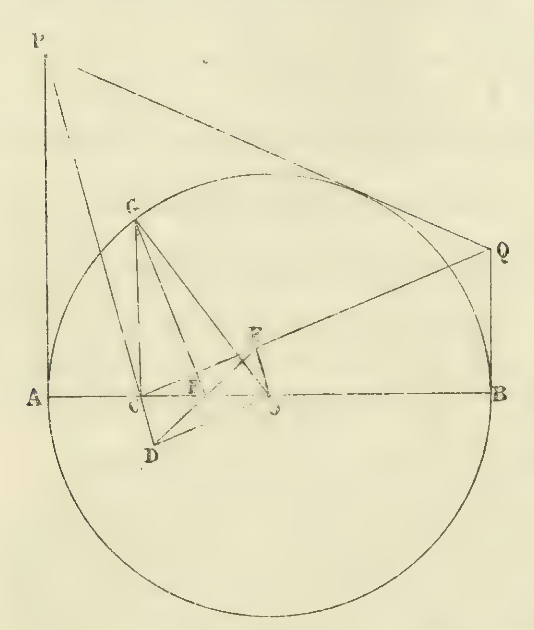
Les autres cas s'examineraient de même; mais il est préférable de généraliser l'énoncé de manière à n'avoir aucune restriction de grandeur pour la variable x. En donnant au point M diverses positions sur les prolongements de la bissectrice dans les deux sens, on vérifiera aisément que l'énoncé pourra être conservé, à condition de compter comme négative l'aire du triangle BMD dès que le point M a dépassé le point D dans le sens AD, et comme négative l'aire du triangle MPC dès que le point M, se déplaçant dans le même sens, a dépassé le symétrique de A par rapport au point D. Lorsque le point M est sur le prolongement de AD, du côté de A, il faut considérer la distance AM comme négative et l'aire du triangle MPC aussi comme négative. Ces conventions se présentent d'elles-mêmes: le changement de signe de l'aire d'un triangle provient toujours du changement de sens d'une base ou d'une hauteur.

Nota. — Autre solution par M. Bordage.

QUESTION 167

Solution par M. Étienne Thévenet, de Thiers.

On donne un cercle O *de diamètre* AB, *deux tangentes parallèles* AP, BQ, *une troisième tangente mobile* PQ *et un point fixe* C *sur le diamètre. On abaisse* OD, OE *respectivement perpendiculaires sur* PC, QC. *La droite* DE *coupe* AB *en* F. *Enfin, on élève* CG *perpendiculaire à* AB, *cette droite coupe la circonférence en* G.



Démontrer que :

1° Le point F *est fixe,*

2° La droite GF *est la médiane antiparallèle du riangle* GOC.

1° Le quadrilatère inscriptible CEOD donne

$$\frac{CF}{OF} = \frac{CD \times CE}{OE \times OD}. \qquad (1)$$

Les deux triangles semblables COD, APC donnent

$$\frac{CD}{OD} = \frac{R - OC}{AP}. \qquad (2)$$

De même les deux triangles semblables COD, APC donnent

$$\frac{CE}{OE} = \frac{R + OC}{BQ}. \qquad (3)$$

Multipliant membre à membre (2) et (3), on a

$$\frac{CE \times CD}{OD \times OE} = \frac{R^2 - \overline{OC}^2}{AP \times BQ}.$$

Comparant la dernière égalité à la première, on a

$$\frac{FC}{OF} = \frac{R^2 - \overline{OC}^2}{AP \times BQ};$$

or $$AP \times BQ = R^2,$$

d'où $$\frac{CF}{OF} = \frac{R^2 - \overline{OC}^2}{R^2}.$$

Donc le point F est fixe.

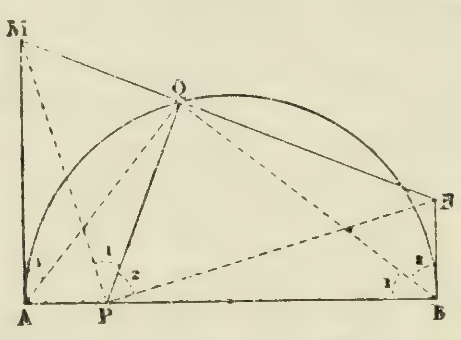
2° GF est la médiane antiparallèle du triangle GOC, puisque dans ce triangle nous avons

$$\frac{CF}{OF} = \frac{R^2 - \overline{OC}^2}{R^2} = \frac{\overline{CG}^2}{\overline{OG}^2}.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Chapron, à Bar-sur-Aube; G. Nesly, à la Guadeloupe; L. Prince, élève au lycée de Grenoble.

QUESTIONS PROPOSÉES

204. — On considère un cercle et un diamètre AB, un point P sur AB et les tangentes aux points A et B.



Par P on mène une semi-droite mobile qui rencontre le cercle en Q et, par le point Q, on trace une droite perpendiculaire à PQ qui rencontre les tangentes fixes aux points M, N.

On détermine ainsi deux quadrilatères dans lesquels on mène les diagonales; trouver le lieu décrit par le point de concours de ces diagonales : 1° dans le quadrilatère APQM; 2° dans le quadrilatère PQBN.

Ce lieu est l'ensemble de deux ellipses dont les axes sont proportionnels, le grand axe de la première étant égal au petit axe de la seconde. *(G. L.)*

Nota. — Pour faciliter la recherche de la solution demandée on peut observer : 1° que MPN est un angle droit ; 2° qu'en posant $PA = h$, $BP = h'$, on a

$$\text{tg}\, MAQ \,.\, \text{tg}\, AQP = \frac{h}{h'};$$

3° Que les ellipses indiquées dans l'énoncé se déduisent des cercles décrits sur AP et sur BP comme diamètres en déformant les ordonnées de ces cercles dans un rapport constant.

On peut aussi noter, parmi les propriétés de la figure, que le produit AM . BN est constant et que la droite qui joint les deux points dont nous avons demandé le lieu géométrique, est parallèle à AB.

205. — Résoudre l'équation

$$a(a + x)(a + 2x)(a + 3x) = b(b + x)(b + 2x)(b + 3x).$$

(G. L.)

Errata. **1**. — (*Journal* 1885, p. 117). Il faut substituer le point O_{p+1} au point O^{p-1} et par suite, écrire :

Ligne 11 : $\dfrac{x_p - x_{p+1}}{b} = a\left[\dfrac{1}{a+pb} - \dfrac{1}{a+(p+1)b}\right]$

au lieu de $\dfrac{x_{p-1} - x_p}{b} =$ id.

Ligne 15 : $\dfrac{O_pO_{p+1}}{BD} = \dfrac{ab}{(a+pb)[a+(p+1)b]}$

au lieu de $\dfrac{O_pO_{p-1}}{BD} =$ id.

Ligne 18 : $\dfrac{O_2O_3}{BD} = \dfrac{1}{10}$

au lieu de $\dfrac{O_2O_1}{BD} = \dfrac{1}{10}$

(Communiqué par M. Monsallut, professeur au collège de St-Jean-d'Angély).

2. — (*Journal*, p. 11, 1886)
Dernière ligne, *au lieu de* HD, *lisez* DD'
(Id. p. 12), *au lieu de* l'épreuve du tracé, *lisez* l'épure du tracé.

3. — (Id. p. 15), ligne 19 *lisez* $\overline{DL}^2 = \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2$ *et non* $\overline{DL}^2 - \overline{LG}^2 + \overline{DG}^2$; et, même page ligne 10 (en remontant) *lisez* $\overline{DS}^2$ *et non* $\overline{DS}^3$.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2322 6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Éd. Guillet,** professeur au Lycée d'Avignon.

Une sphère, dont l'élasticité est parfaite, tombe d'une hauteur h *sur un plan incliné d'un angle* α *sur l'horizon. Elle rebondit, suivant la loi connue de l'égalité d'angles d'incidence et de réflexion, pour venir rencontrer le plan incliné, une seconde fois, puis une troisième, et ainsi de suite. — On demande de calculer l'amplitude de chaque bond, ainsi que l'angle sous lequel la bille vient rencontrer le plan à chaque nouvelle incidence.*

Soient A le point de départ de la sphère et B le point où elle rencontre le plan incliné pour la première fois. Nous prendrons pour plan de la figure le plan vertical dans lequel reste constamment la sphère, c'est-à-dire celui qui est déterminé par la verticale AB et la ligne de plus grande pente BX du plan incliné.

La vitesse acquise v_0 pendant la chute AB de hauteur h est

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \qquad (1)$$

et l'angle ABN formé par la verticale AB avec la normale BN au plan incliné en B est égal à α.

Au point B la sphère rebondit avec la vitesse v_0 et dans une direction BC faisant avec BN l'angle α.

Nous sommes donc, pour le premier bond, ramenés à étudier le mouvement d'un corps pesant lancé avec la vitesse initiale v_0 dans la direction BC.

On sait que la trajectoire est une parabole ; de sorte qu'il suffira de déterminer le point d'intersection B′ de cette parabole avec la droite BX, en même temps que la tangente à la courbe en B′.

Désignons par a la base OX du plan incliné, par v_x et v_y les projections horizontale et verticale de la vitesse à un instant quelconque t ou, ce qui est la même chose, les vitesses des projections horizontale et verticale du mouvement de l'espace :

enfin par x et y les coordonnées du point de la trajectoire occupé par la sphère à l'époque t.

Nous avons :

$$v_x = v_0 \sin 2\alpha, \qquad (2)$$
$$v_y = v_0 \cos 2\alpha - gt, \qquad (3)$$
$$x = v_0 t \sin 2\alpha, \qquad (4)$$
$$y = v_0 t \cos 2\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + a \operatorname{tg} \alpha ; \qquad (5)$$

en prenant pour axes de coordonnées les deux droites rectangulaires OX et OA et en remarquant que l'angle de BC avec l'horizontale est $\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$.

Eliminant t entre les équations (4) et (5), nous aurons la relation qui lie à chaque instant les coordonnées d'un point quelconque de la trajectoire :

$$y = a \operatorname{tg} \alpha + x \operatorname{cotg} 2\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \sin^2 2\alpha}. \qquad (6)$$

En appelant (x_1, y_1) les coordonnées du point B′, on aura donc aussi, puisque ce point appartient à la trajectoire :

$$y_1 = a \operatorname{tg} \alpha + x_1 \operatorname{cotg} 2\alpha - \frac{gx_1^2}{2v_0^2 \sin^2 2\alpha}. \qquad (7)$$

Mais le point B′ appartenant encore à la droite BX, les deux triangles semblables OBX et O′B′X donnent

$$\frac{\text{OB}}{\text{O'B'}} = \frac{\text{OX}}{\text{O'X}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a \operatorname{tg} \alpha}{y_1} = \frac{a}{a - x_1}. \qquad (8)$$

Les deux équations (7) et (8) déterminent les deux inconnues x_1 et y_1.

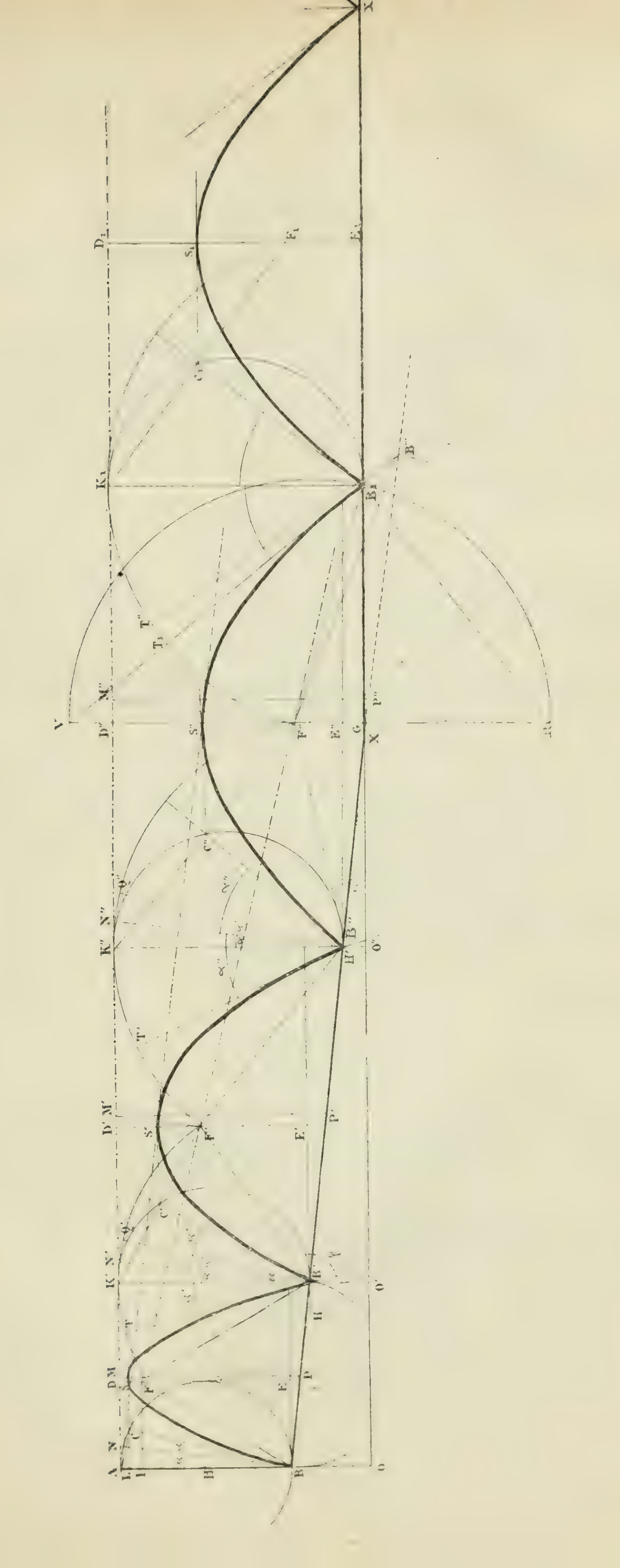
De la dernière, on tire

$$y_1 = a \operatorname{tg} \alpha - x_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

et, en portant dans l'équation (7), on a

$$x_1[gx_1 - 2v_0^2 \sin^2 2\alpha(\operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha)] = 0. \qquad (9)$$

On a une première solution : $x_1 = 0$, qu'il était facile de prévoir et qui correspond au point B; ce n'est pas celle-là que nous cherchons.



La deuxième solution

$$x_1 = \frac{2v_0^2 \sin^2 2\alpha(\cotg 2\alpha + \tg \alpha)}{g}$$

correspond au point B′.

On a d'ailleurs

$$\cotg 2\alpha + \tg \alpha = \frac{\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos \alpha},$$

et

$$\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha = \cos \alpha.$$

Donc, en résumé

$$x_1 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha. \qquad (10)$$

Remplaçant v_0^2 par $2gh$ pour que x soit connu uniquement en fonction des données, on aura

$$x_1 = 4h \sin 2\alpha. \qquad (11)$$

En portant cette valeur de x_1 dans la relation (8), on aura

$$y_1 = (a - 4h \sin 2\alpha) \tg \alpha. \qquad (12)$$

Durée du premier bond. — Si l'on veut obtenir le temps t_1 au bout duquel le mobile atteint le point B′, il suffit de remplacer x_1 par la valeur qui vient d'être trouvée dans la formule

$$x_1 = v_0 t_1 \sin 2\alpha,$$

d'où l'on déduit

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \sin 2\alpha};$$

et, par suite

$$t_1 = \frac{4h \sin 2\alpha}{v_0 \sin 2\alpha},$$

c'est-à-dire

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}, \quad \text{ou} \quad t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}}. \qquad (13)$$

Calcul de l'amplitude BB′. — Observons que, dans le trapèze rectangle OBO′B′, on a

$$BB' = \frac{OO'}{\cos \alpha}$$

ou

$$BB' = \frac{x_1}{\cos \alpha}.$$

On a donc, en désignant par A l'amplitude du premier bond,

$$A = \frac{4h \sin 2\alpha}{\cos \alpha};$$

et, si l'on remplace $\sin 2\alpha$ par $2 \sin \alpha \cos \alpha$, il vient

$$A = 8h \sin \alpha. \qquad (14)$$

Angle d'incidence au point B'. — En désignant par v_{x_1} et v_{y_1} les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la sphère en B' et par φ l'angle de la direction de cette vitesse avec l'horizon, on aura

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{y_1}}{v_{x_1}}.$$

Or

$$v_{x_1} = v_0 \sin 2\alpha, \qquad (15)$$
$$v_{y_1} = v_0 \cos 2\alpha - g t_1,$$

ou

$$v_{y_1} = v_0 \cos 2\alpha - g \frac{2v_0}{g}.$$

D'ailleurs

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

donc

$$v_{y_1} = - v_0(1 + 2 \sin^2 \alpha). \qquad (16)$$

Cette valeur négative de la composante verticale v_{y_1} de la vitesse montre qu'en B' la sphère descendrait si elle n'était arrêtée par le plan incliné.

On a maintenant

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}.$$

On voit que l'angle φ est négatif, c'est-à-dire que la vitesse en B' est dirigée au-dessous de l'horizontale de ce point.

Si l'on considère l'angle TB'H, opposé par le sommet à l'angle φ, on aura

$$\operatorname{tg} TB'H = \frac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Or l'angle N'B'T de la vitesse en B' avec la normale B'N' au plan incliné est égal à $\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi - \alpha)\right]$; en appelant α' cet

angle N'B'T, on aura donc

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{cotg} (\varphi - \alpha),$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha}.$$

En remplaçant $\operatorname{tg} \varphi$ par la valeur absolue précédemment trouvée, il vient

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1 + \dfrac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \times \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\dfrac{1 + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} - \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}},$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha + 2 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha}.$$

Remplaçons $\sin 2\alpha$ par $2 \sin \alpha \cos \alpha$, et nous avons

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha \left[1 + 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha\right]}{\cos \alpha}.$$

D'ailleurs

$$1 + 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 3.$$

On obtient ainsi ce résultat simple

$$\operatorname{tg} \alpha' = 3 \operatorname{tg} \alpha. \qquad (17)$$

Vitesse v_1 *du mobile en* B'. — Si l'on veut avoir la vitesse absolue v_1 de la sphère en B', il suffit d'appliquer la formule

$$v_1^2 = v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2.$$

On a donc

$$v_1^2 = v_0^2 \left[\sin^2 2\alpha + (1 + 2 \sin^2 \alpha)^2\right].$$

Or

$$\begin{cases} \sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ (1 + 2 \sin^2 \alpha)^2 = 1 + 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha \\ 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha - 4 \sin^4 \alpha. \end{cases}$$

Ainsi

$$v_1^2 = v_0^2 \left[1 + 8 \sin^2 \alpha\right]. \qquad (18)$$

Détermination du point S *le plus élevé dans le premier bond.* — La direction de la vitesse au point S étant horizontale, la composante verticale de cette vitesse sera nulle en ce point, et si nous appelons t' le temps nécessaire à la sphère pour atteindre ce point S, nous aurons

$$v_0 \cos 2\alpha - gt' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$t' = \frac{v_0 \cos 2\alpha}{g}.$$

Les coordonnées x et y du point S seront déterminées en remplaçant t par la valeur de t' dans les relations :

$$x = v_0 t \sin 2\alpha,$$

$$y = v_0 t \cos 2\alpha - \frac{1}{2} gt^2 + a \operatorname{tg} \alpha,$$

ce qui donne

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{g},$$

$$y = \frac{v_0^2 \cos^2 2\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \cos^2 2\alpha}{g^2} + a \operatorname{tg} \alpha.$$

Et, en remplaçant $\frac{v_0^2}{2g}$ par h et simplifiant, on a :

$$x = h \sin 4\alpha, \qquad (19)$$

$$y = a \operatorname{tg} \alpha + h \cos^2 2\alpha. \qquad (20)$$

Si l'on se rappelle que $OB = a \operatorname{tg} \alpha$, on voit que la hauteur ES du sommet S au-dessus de l'horizontale BM qui passe en B est

$$SE = h \cos^2 2\alpha. \qquad (21)$$

Remarque. — On aurait encore pu obtenir l'abscisse x du point S en cherchant le maximum de la fonction (6), ce qui revient à exprimer que l'équation

$$\frac{gx^2}{2v_0^2 \sin^2 2\alpha} - x \operatorname{cotg} 2\alpha - a \operatorname{tg} \alpha + y = 0$$

a ses deux racines égales.

On a ainsi

$$x = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha \operatorname{cotg} 2\alpha}{g},$$

ou

$$x = h \sin 4\alpha, \qquad (19)$$

et

$$y = a \operatorname{tg} \alpha + h \cos^2 2\alpha.$$

(A suivre.)

SUR UN PROBLÈME GRAPHIQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

Le problème que nous avons en vue est classique s'il en fut. C'est le suivant :

Mener par un point donné une droite qui passe par le point de rencontre inaccessible de deux droites données.

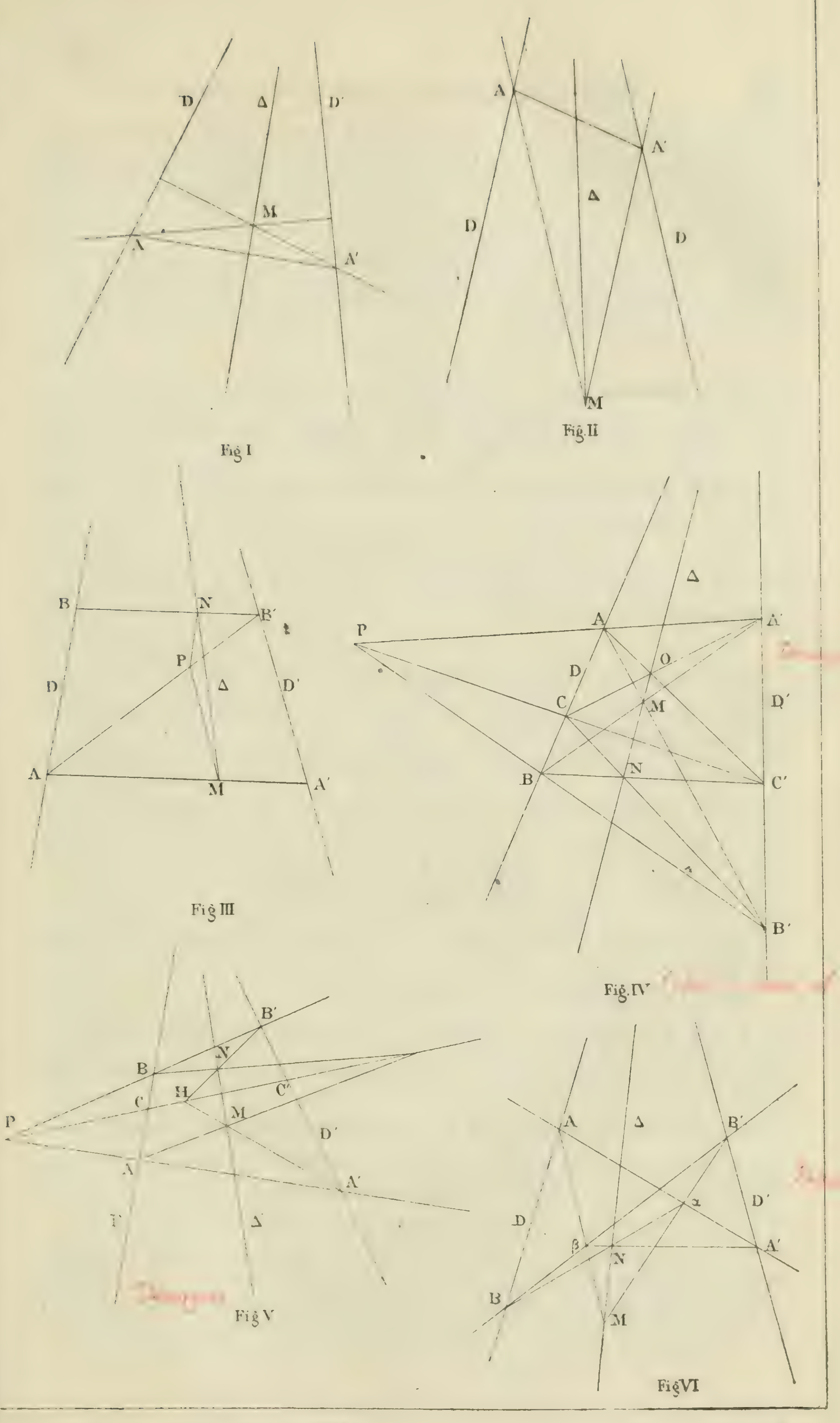
Ce problème se présente très fréquemment dans les épures. Il est bon de pouvoir le résoudre sans hésitation, chaque fois qu'il se présente. Or, les dispositions particulières de chaque épure rendent plus commode l'emploi de telle ou telle solution. Les lignes *déjà tracées sur l'épure, ou dont on aura besoin dans la suite*, peuvent, en effet, se prêter plus aisément, à la construction requise par telle solution qu'à celle exigée par telle autre.

Il est donc avantageux de se trouver en possession de plusieurs procédés, afin d'appliquer l'un ou l'autre suivant le cas. Cette observation justifiera peut-être la publication de cette note, extrêmement élémentaire. Il est bien évident que la plupart des procédés ici indiqués auront déjà été remarqués. Le sixième, pourtant, est peut-être nouveau, et son emploi semble devoir être presque toujours le plus commode; c'est un peu là ce qui nous a engagé à publier ces très simples remarques.

Dans tout ce qui suit, nous appelons M le point donné, D et D′ les droites données, Δ la droite cherchée.

Première solution. — Par le point M, mener des perpendiculaires aux droites D et D′ (*fig. 1*). La perpendiculaire à D coupe D′ en A′; la perpendiculaire à D′ coupe D en A; la droite Δ est la perpendiculaire abaissée de M sur AA′. Cela résulte immédiatement du théorème des trois hauteurs d'un triangle.

Cette solution, remarquablement simple en théorie, présente


D Δ D′
M
A A′
Fig I
A A′ Δ D D
M
Fig.II
B N B′
P
D Δ D′
A M A′
Fig III
P A A′
D O
C M D′
B N C′
Δ
B′
Fig.IV
B′
B N
H C′
C M
P D′
A A′
Δ
Fig V
A Δ B′
α D′
D
β N A′
B
M
FigVI

l'inconvénient d'exiger en pratique l'emploi de l'équerre (*), puisqu'elle comporte le tracé de trois perpendiculaires. Nous préférons les solutions où seule la règle intervient. On aura pourtant l'occasion d'appliquer cette solution dans le cas assez fréquent où les perpendiculaires menées de M à D et à D' joueront un autre rôle dans l'épure et, par conséquent, devront être tracées.

Deuxième solution. — Mener par M des parallèles à D et à D' *(fig. 2)*; la parallèle à D' coupe D en A; la parallèle à D coupe D' en A'. La droite Δ est la ligne qui joint le point M au milieu de AA', d'après la propriété des diagonales du parallélogramme.

Ici encore l'équerre interviendra. Mais, comme précédemment, on peut avoir besoin des droites MA et MA' pour l'épure elle-même.

Troisième solution. — Par M, tirer une droite quelconque qui coupe D en A, D' en A' *(fig. 3)*. Mener une parallèle quelconque BB' à AA', et joindre A à B'; mener enfin MP, parallèle à D', jusqu'à la droite AB', puis PN, parallèle à D', jusqu'à la droite BB'. La droite Δ passe par le point N.

On a, en effet,

$$\frac{BN}{NB'} = \frac{AP}{PB'} = \frac{AM}{MA'},$$

ce qui prouve que MN passe par le point de rencontre de AB et A'B'.

Même observation que ci-dessus.

Dans les solutions suivantes, l'équerre n'intervient plus; l'emploi de la règle suffit : c'est un avantage incontestable.

Quatrième solution. — Par le point M mener deux droites quelconques AB' et BA' (telles pourtant que le point de rencontre de AA' et BB' soit en dedans des limites de l'épure)

(*) Nous négligeons ici, comme dans tout ce qui suit, l'emploi du compas qui serait plus précis. Il est bien rare, en pratique, lorsqu'on a une équerre sous la main, que l'on se serve d'un compas pour mener des perpendiculaires ou des parallèles.

(fig. 4). Par le point de rencontre P des droites AA′ et BB′, tirer une autre droite quelconque CC′. Les droites BC′ et B′C d'une part, AC′ et A′C de l'autre, se coupent en N et en O sur la droite Δ. Ces deux points de rencontre N et O appartiennent, en effet, comme le point M, à la polaire du point P par rapport aux droites D et D′, polaire qui, passant par le point commun à D et à D′, n'est autre que la droite Δ.

Cinquième solution. — Par un point P, pris arbitrairement, mener trois droites quelconques *(fig. 5)* (*) qui coupent respectivement D en A, B, C et D′ en A′, B′, C′. Tirer MA et MA′ qui coupent CC′ en H et en H′. Tirer HB et H′B′ qui se coupent en N. Le point N appartient à la droite Δ; en effet, les triangles MAA′ et NBB′ sont homologiques, CC′ étant l'axe d'homologie. Donc, la droite qui joint les sommets correspondants M et N passe par le point commun aux droites AB et A′B′.

Sixième solution. — Voici enfin la solution que nous considérons comme la plus simple et la plus commode; elle n'exige que l'emploi de la règle; on n'a besoin, pour l'appliquer, que de tracer quatre droites. On peut, en effet, supposer qu'il existe toujours sur l'épure *deux droites quelconques* AA′ et BB′ *(fig. 6) coupant* D *et* D′. D'ailleurs, le tracé de ces deux *droites quelconques* ne peut être considéré comme une complication. Cela posé, on tire MA et MB′ qui coupent respectivement BB′ et AA′ en β et en α. Les droites Bα et A′β se coupent en N sur la droite Δ cherchée.

La démonstration est immédiate; l'hexagone BAβA′B′αB est inscrit dans la conique constituée par l'ensemble des droites AA′ et BB′; donc en vertu du théorème de Pascal, et numérotant respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6 les côtés BA, Aβ, βA′, A′B′, B′α, αB, on voit que le point M commun aux côtés 2 et 5, le point N commun aux côtés 3 et 6, et le point commun aux côtés 1 et 4 (droites D et D′) sont en ligne droite.

(*) Il arrivera souvent que l'épure contiendra déjà trois droites concourantes coupant D et D′.

Nous ferons observer, en terminant, que les solutions 1 et 2 ne peuvent donner qu'un point de la droite Δ, tandis que les quatre autres solutions en feraient connaître autant qu'on voudrait.

DIVERS THÉORÈMES

SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA SOMME D'UN NOMBRE ET DE CE NOMBRE RENVERSÉ

Par M. **Emile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Soient, dans le système de numération dont la base est x, A, B, C, etc., divers nombres (dont le premier chiffre à gauche n'est pas zéro, et nous ferons cette hypothèse dans tout notre travail). Soient a, b, c, etc., les nombres respectivement formés par les chiffres de A, de B, de C, etc., lus de droite à gauche; nous appellerons a, b, c, etc., nombres renversés de A, B, C, etc. (les premiers chiffres à gauche de a, b, c, etc., peuvent évidemment être nuls); soient N_a, N_b, N_c, etc. les nombres formés par les sommes $A + a$, $B + b$, $C + c$, etc.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $N_a = N_b$, A *et* B *ayant le même nombre de chiffres, est que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes dans* A *soit égale à la somme des chiffres correspondants dans* B*; si* A *et* B *ont un nombre impair de chiffres, il faut de plus que le chiffre du milieu soit le même dans* A *et dans* B.

1° Le nombre des chiffres est pair : $2m$.

En appelant a_0, a_1, a_2, etc., les chiffres des unités, des x^m, des carrés des x^m, etc., dans A on a :

$$A = a_0 + x.\, a, + \dots x^{m-1}.\, a_{m-1} + x^m.\, a_m + x^{m+1}\, a_{m+1}$$
$$+ \dots .\, x^{2m-1}\, a_{2m-1},$$
$$a = a_{2m-} + x.\, a_{2m-2} + \dots \qquad \dots x^{2m-1}\, a_0,$$

et par suite :

$$N_a = (a_0 + a_{2m-1})(1 + x^{2m-1}) + (a_1 + a_{2m-2})x(1 + x^{2m-3})$$
$$+ \ldots (a_{m-1} + a_m) x^{m-1} (1 + x)$$

ou

$$N_a = \Sigma_{p=0}^{p=m-1} (a_p + a_{2m-p-1}) x^p (1 + x^{2m-2p-1});$$

de même

$$N_b = \Sigma_{p=0}^{p=m-1} (b_p + b_{2m-p-1}) x^p (1 + x^{2m-2p-1}).$$

Il est évident que si pour toutes les valeurs de p de o à $m - 1$

$$a_p + a_{2m-p-1} = b_p + b_{2m-p-1},$$

on aura

$$N_a = N_b;$$

la condition est donc suffisante.

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, c'est-à-dire que (A et B étant deux nombres de $2m$ chiffres), si $N_a = N_b$, on a, pour toute valeur de p comprise de 0 à $m - 1$:

$$a_p + a_{2m-p-1} = b_p + b_{2m-p-1}.$$

Nous poserons

$$a_p + a_{2m-p-1} - b_p - b_{2m-p-1} = k_p;$$

on aura alors

$$N_a - N_b = k_o (1 + x^{2m-1}) + k_1 x (1 + x^{2m-1})$$
$$+ \ldots k_{m-2} x^{m-2} (1 + x^3) + k_{m-1} x^{m-1} (1 + x),$$

ou, en désignant par k_j le premier des nombres k_p qui n'est pas nul :

$$N_a - N_b = x^j k_j (1 + x^{2m-2j-1}) + x^{j+1} k_{j+1} (1 + x^{2m-2j-3})$$
$$+ \ldots . x^{m-1} k_{m-1} (1 + x). \qquad (1)$$

Si $N_a = N_b$, le second nombre est nul : donc k_j est un multiple de x; mais comme les nombres a_j, a_{2m-j-1}, b_j, b_{2m-j-1} qui entrent dans k_j sont des chiffres, c'est-à-dire sont plus plus petits que x, k_j ne peut, comme multiple de x, être que $+ x$ ou $- x$.

Supposons d'abord $k_j = + x$;

divisons par x^j le 2me nombre de l'identité (1), elle devient

$$o = k_j (1 + x^{2m-2j-1}) + x k_{j+1} (1 + x^{2m-2j-3})$$
$$+ \ldots x^{m-j-1} k_{m-1} (1 + x);$$

puisque $k_j = x$ on a, en désignant par R l'ensemble des termes qui suivent le premier :

$$x(1 + x^{2m-2j-1}) + R = o. \qquad (2)$$

Or aucune des quantités k_{j+j1}, k_{j+2}, etc., ne peut être plus petite que $-2(x-1)$: on a donc, en valeur absolue.

$$R < x.\,2(x-1)(1+x^{2m-2j-1}) + x^2.\,2(x-1)(1+x^{2m-2j-3})$$
$$+ \ldots x^{m-j-1}.\,2(x-1)(1+x),$$

ou, toutes réductions faites,

$$R < 2x(x^{2m-2j-2}-1).$$

Cette quantité est évidemment inférieure à $x(1+x^{2m-2j-1})$: donc l'identité (2) est impossible et k_j ne peut être égal à $+x$: un *même* raisonnement montre que k_j ne peut non plus être égal à $-x$.

Aucune des quantités k_0, $k_1 \ldots k_{m-1}$ ne peut donc être la première qui ne soit pas nulle ; elles sont donc toutes nulles et le théorème est démontré, c'est-à-dire que la condition est nécessaire.

2° Le nombre de chiffres est impair : $2m+1$. Avec des notations analogues aux précédentes, en posant

$$a_p + a_{2m-p} - b_p - b_{2m-p} = k_p$$

pour toutes les valeurs de p comprises entre 0 et $m-1$ et

$$k_m = a_m - b_m,$$

on aura

$$N_a - N_b = k_0(1+x^{2m}) + k_1x(1+x^{2m-2})$$
$$+ \ldots k_{m-i}x^{m-1}(1+x^2) + k_mx^m(1+x^0).$$

Il est évident que si les valeurs de k_m, k_1, $k_2 \ldots k_{m-1}$ sont nulles, on aura $N_a - N_b$, ce qui montre que la condition est suffisante.

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, remarquons que k_m sera compris entre $-(x-1)$ et $+(x+1)$ et que k_0, $k_1 \ldots k_{m-1}$ seront compris entre $-2(x-1)$ et $+2(x-1)$, et appelons k_j la première des quantités k qui ne soit pas nulle.

Si $N_a = N_b$, on aura comme précédemment

$$0 = k_j(1+x^{2m-2j}) + k_{j+1}x(1+x^{2m-2j-2})$$
$$+ \ldots k_{m-1}x^{m-j-1} + 2k_mx^{m-j};$$

k_j doit donc encore être soit $+x$, soit $-x$.

Par conséquent si nous démontrons que, en valeur absolue, on a toujours

$$x(1+x^{2m-2j}) > 2(x-1)x(1+x^{2m-2j-2})$$
$$+ \ldots 2(x-1)x^{m-j-1}(1+x^2) + 2(x-1)x^{m-j},$$

il sera établi que l'identité $N_a = N_b$ ne peut avoir lieu que lorsque $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, etc.

Or, toutes réductions faites, le second membre de l'inégalité précédente devient $2x(x^{2m-2j-1} - 1)$, ce qui est évidemment toujours inférieur à $x(1 + x^{2m-2j})$.

La condition est donc nécessaire. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE.

... J'ai, dans mon Mémoire *sur les transformations centrales des courbes planes (Mathesis*, 1884, pp. 73 et 97), donné une construction du centre de courbure dans l'hyperbole équilatère que je vais indiquer ici, en me reportant à la *fig. 60* (p. 29 du numéro de février) de votre Mémoire : *Si la perpendiculaire élevée en* O *au rayon vecteur* OM *coupe la normale* $M\omega$ *au point* N, *on a* $M\omega = NM$.

Ce qui fournit une construction bien simple du centre de courbure ω.

Rattacher l'une à l'autre nos deux constructions serait peut-être pour vos jeunes lecteurs le sujet d'un exercice assez intéressant...

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

(*Suite*, voir p. 16.)

3. — *Déterminer* a, b, c *de façon que le polynôme*

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c,$$

soit divisible par

$$(x^2 - 1)(x + 3).$$

Le diviseur proposé étant du troisième degré, le quotient est un diviseur du premier degré de la forme $x + \lambda$. Écrivons donc

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c \equiv (x^2 - 1)(x + 3)(x + \lambda).$$

En égalant, de part et d'autre, le terme en x^3 on trouve d'abord $\lambda = 2$ et l'on a

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c \equiv (x^2 - 1)(x + 3)(x + 2).$$

On peut alors, pour déterminer les inconnues a, b, c, effectuer le calcul indiqué ; ou bien, si l'on préfère, donner à x des valeurs particulières très simples : $0, +1, -1$, on trouve sans effort, par l'une ou l'autre de ces deux voies,

$$a = 5, \quad b = -5, \quad c = -6.$$

4. — *Lieu des points tels que la somme de leurs distances à un point fixe* O *et à une droite fixe* Δ *soit constante et égale à* h.

Le lieu est une parabole ayant pour foyer O et pour directrice une droite Δ', parallèle à Δ, située à une distance h de Δ et dans la région à laquelle appartient le point O. On peut, à propos de cette question, chercher le lieu des points tels que la somme de leurs distances à un point et à une circonférence fixes soit constante; ce lieu est évidemment une ellipse.

5. — *Quelle est la progression arithmétique dans laquelle les sommes des* n *premiers termes est toujours égale à* $4n^2$?

C'est la progression

$$4, 12, 20, 28, \ldots$$

On la trouve en raisonnant ainsi. Soit S_n la somme des n premiers termes

$$u_1, u_2, \ldots u_n,$$

de la progression inconnue.

On a

$$S_n = 4n^2,$$

et par conséquent

$$S_{n-1} = 4(n - 1)^2;$$

d'où

$$S_n - S_{n-1} = u_n = 4(2n - 1).$$

On observera que cette méthode s'applique à l'énoncé plus général dans lequel on propose de déterminer *une suite* sachant que la somme de ses n premiers termes est exprimée par

$$\alpha n^2 + \beta n,$$

α, β étant des constantes données.

6. — *En désignant par* p *et* q *deux entiers positifs, trouver pour* x = 1, *la valeur de l'expression*

$$\frac{px^{p+q} - (p+q)\,x^{q} + q}{(x-1)^2}.$$

Le numérateur s'annule pour $x = 1$; s'il n'est pas divisible par $(x-1)^2$, la valeur demandée est infinie. Mais, en effectuant la division, on trouve que le quotient est

$$px^{p+q-2} + 2px^{p+q-3} + 3px^{p+q-4} + \dots + (q-1)px^{p}$$
$$+ qpx^{p-1} + q(p-1)x^{p-2} + \dots + q\,.\,2x + q\,.\,1.$$

Pour $x = 1$, la valeur demandée est

$$p(1 + 2 + \dots + q) + q(1 + 2 + \dots + \overline{p-1}),$$

ou

$$\frac{pq(p+q)}{2}.$$

7. — *Étant données les sommes* S_1 *et* S_2 *des termes des deux progressions géométriques indéfiniment décroissantes*

$$S_1 = 1 + Q_1 + Q_1^2 + \dots$$
$$S_2 = 1 + Q_2 + Q_2^2 + \dots$$

trouver la somme $S_{1,2}$ *des termes de la progression géométrique*

$$S_{1,2} = 1 + Q_1Q_2 + Q_1^2Q_2^2 + \dots$$

Les formules connues

$$S_1 = \frac{1}{1-Q_1}, \qquad S_2 = \frac{1}{1-Q_2}, \qquad S_{1,2} = \frac{1}{1-Q_1Q_2},$$

donnent immédiatement

$$1 - \frac{1}{S_{1,2}} = \left(1 - \frac{1}{S_1}\right)\left(1 - \frac{1}{S_2}\right).$$

Plus généralement, si l'on considère h progressions géométriques indéfiniment décroissantes

$$S_1, \quad S_2, \quad \dots\ S_h,$$

on a

$$1 - \frac{1}{S_{1,2\dots h}} = \left(1 - \frac{1}{S_1}\right)\left(1 - \frac{1}{S_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{S_h}\right).$$

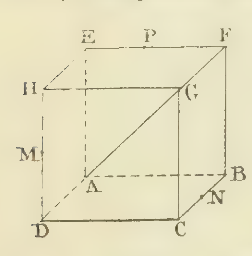
(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1885)

EXAMENS ÉCRITS (*).

Géométrie descriptive.

On donne dans le premier dièdre : un point A dont la cote $\alpha a'$ est de 19^{mm}, l'éloignement $\alpha a = 22^{mm}$; un point G dont la côte $\gamma g' = 53^{mm}$, l'éloignement $\gamma g = 48^{mm}$, et dont la distance au plan de profil de A vers la droite est de 52^{mm}. La droite AG est une diagonale du parallélipipède rectangle dont une face est horizontale ; une autre, parallèle au plan vertical ; trouver : 1° les projections du parallélipipède ; 2° celles de la sphère qui lui est circonscrite. — Par les milieux M, N, P des trois arêtes DH, BC, EF on fait passer un plan ; trouver les intersections de ce plan avec le parallélipipède, avec la sphère et les vraies grandeurs de ces sections. — Pour la mise à l'encre, on supprimera la portion de la sphère située au-dessus du plan sécant ; et la portion du parallélipipede située au-dessous. (12 juin — 1 h. 1/2 à 4 h.)



Lavis.

Laver soit à teintes plates superposées, soit à teintes fondues, la projection horizontale d'un tronc de cône de révolution plein reposant par une base sur le plan horizontal.

Les dimensions sont : rayon de la base inférieure 8^{cm}, rayon de la base supérieure 3^{cm}. Les rayons lumineux sont parallèles à une droite dont les projections font des angles de 45° avec la partie gauche de la ligne de terre. (13 juin — 1 h. 1/2 à 4 h. 1/2.)

CONCOURS GÉNÉRAUX (**)

CLASSE DE PHILOSOPHIE (PARIS)

Mathématiques.

On donne un cercle O et un point G intérieur à ce cercle. 1° Démontrer qu'il existe une infinité de triangles ABC inscrits dans ce cercle et tels que les médianes de chacun d'eux se coupent en G. 2° Trouver le lieu géométrique des milieux des côtés des triangles ABC. 3° Examiner si, pour toutes les positions de G, on peut prendre un point quelconque de la circonférence O

(*) Voyez pour les autres questions *Journal* 1885, p. 184.

(**) Ces énoncés nous ont été communiqués par M. Bordage, professeur au collège de Nantua.

comme sommet d'un des triangles ABC. Quand il en est autrement, déterminer l'arc du cercle O sur lequel sont alors situés les sommets des triangles ABC. 4° Démontrer que la somme des carrés des côtés des triangles ABC a une valeur constante.

TROISIÈME (PARIS)

I. — On donne sur une circonférence deux points fixes A et B que l'on joint à un point quelconque M de la circonférence et du centre on mène sur MB la perpendiculaire OK, qui, par sa rencontre avec MA, forme le triangle MKP. On propose de déterminer les lieux géométriques que décrivent: 1° le point de rencontre des médianes; 2° le point de rencontre des bissectrices ; 3° le point de concours des hauteurs; 4° le centre du cercle circonscrit du triangle MKP, lorsque M se déplace sur la circonférence O.

II. — On trace deux cercles ayant pour rayon 2 décimètres et dont les centres O et O' sont distants de 2 décimètres, et on demande de calculer la surface de la partie OAO'B commune à ces deux cercles.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES

CERTIFICAT D'APTITUDE

Mathématiques.

Une sphère de rayon R et un cône droit dont le rayon de base = R et la hauteur 2R, sont posés sur un plan P, le cône reposant sur sa base ; on coupe les deux solides par un plan Q parallèle au plan P, situé à une distance x du plan P. — 1° Déterminer x de façon que les sections faites par le plan Q dans les deux solides aient la même surface. 2° Déterminer x de façon que le volume du tronc de cône compris entre les plans P et Q soit égal à n fois le volume du segment sphérique compris entre ces mêmes plans. — Pour quelles valeurs de n le problème est-il possible?

AGRÉGATION

1° Mesure du parallélipipède.

2° D'un point P pris sur le prolongement du diamètre AB d'une demi-circonférence de rayon R, on lui mène une tangente PC et l'on fait tourner la figure autour de la droite ABP. La droite PC engendre l'aire latérale d'un cône et l'arc BC engendre une zone. On demande à quelle distance de O il faut prendre le point P pour que le rapport de l'aire latérale du cône à l'aire de la zone soit égal à un nombre donné m. Le problème est-il toujours possible, quelle que soit la valeur attribuée à m?

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

Juillet 1885.

1° — Établir la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2° — Calculer, en fonction de $\sin 2x$ les expressions

$$\sin x + \cos x, \quad \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3° — Trouver les maxima ou les minima de ces expressions quand x reste compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

Novembre 1885.

Résoudre un triangle, connaissant deux côtés ainsi que la somme, ou la différence, des cosinus des angles opposés à ces côtés.

ACADÉMIE D'ALGER

6 juillet 1885.

Un triangle équilatéral ABC, de 5^m82564 de côté, tourne autour d'une droite AX, située dans son plan, passant par son sommet A et faisant avec AC un angle de 30°. Calculer la surface engendrée par son périmètre et le volume engendré par son aire.

— On donne une circonférence et un angle au centre et on demande de mener entre les côtés de cet angle une tangente de longueur minimum. Déterminer le point de contact.

— Abaisser une perpendiculaire d'un point donné sur une droite donnée. Construction et théorie.

ACADÉMIE DE BESANÇON

20 juillet 1885.

On donne un rectangle ABCD dont les dimensions sont $AB = a$, $BC = b$. On prend sur DC et sur le prolongement de BC deux longueurs égales DE, CF que l'on désigne par x. Déterminer x de façon que le volume engendré par le quadrilatère AEFB tournant autour de AB soit égal au volume engendré par le rectangle ABCD tournant aussi autour de AB. Conditions de possibilité du problème. Peut-on interpréter les solutions négatives?

21 juillet 1885.

On donne une droite AB et deux points A et B sur cette droite. En ces points on élève à la droite les perpendiculaires AA' et BB'. On prend un troisième point O, sur AB entre A et B. Ce point O est le sommet d'un angle droit qui tourne autour de ce point comme pivot. Les côtés de cet angle coupent AA' et BB' en M et P. On demande d'étudier la variation de la somme

AM + BP; de trouver son minimum et de calculer par les tables de logarithmes l'angle φ que forment les droites OP et AB dans la position qui répond au minimum. On prendra pour le calcul $OA = 1295^m$, $OB = 845^m$.

22 juillet 1885.

I. — Transformer l'expression

$$\sqrt{x^2 + x + 1 - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x}}$$

en une autre qui ne contienne que deux radicaux simples.

II. — Soit un rectangle ABCD. Sur DC comme diamètre on décrit le demi-cercle DEC à l'extérieur du rectangle. On considère la figure limitée par le demi-cercle et les trois côtés DA, AB, BC du rectangle. Déterminer $AB = x$, $BC = y$ de façon que le périmètre de la figure considérée soit égal à p et sa surface égale à k^2. Conditions de possibilité. Distinction des cas où il y a une ou deux solutions. Quelle relation faut-il établir entre p et k pour que le rectangle se réduise à un carré ?

23 juillet 1885.

On donne une droite D et deux points P et Q; par la droite et ces deux points on fait passer deux plans qui forment un dièdre dont on demande les plans bissecteurs. *Données :* les points P et Q sont sur la ligne de terre, $Pa' = 1$, $a'b = 5$, $bQ = 1$, $aa' = 4$, $bb' = 4$.

24 juillet 1885.

Sur une droite AB de longueur a on prend un point M à la distance $AM = x$. On construit avec AM le triangle équilatéral AMN, puis on élève en N la perpendiculaire NP sur MN et en B la perpendiculaire BP sur AB. Calculer la surface du quadrilatère ANPB. Cette surface passe-t-elle par un maximum ou par un minimum quand M se déplace entre A et B ?

25 juillet 1885.

Couper une sphère de rayon a par deux plans parallèles de façon que l'aire de la zone correspondante ait une valeur donnée, représentée par $1\pi ab$ et que le volume du segment sphérique compris entre ces deux plans parallèles soit maximum.

QUESTION 101 (*)

Solution géométrique par M. A. Fitz-Patrick, élève de mathématiques élémentaires au Lycée de Poitiers.

Sur la bissectrice de l'angle droit d'un triangle ABC *rectangle en* A, *on prend un point* M; *soient* D *le point où la bissectrice rencontre l'hypoténuse,* P *la projection de* M *sur le côté* AC. *Déterminer le point* M *de façon que les aires des triangles* BMD *et* MPC *aient une somme donnée.*

(*) Voyez une solution algébrique (*Journal*, p. 44).

On doit avoir

$$MBD + MPC = S,$$

ou en observant que

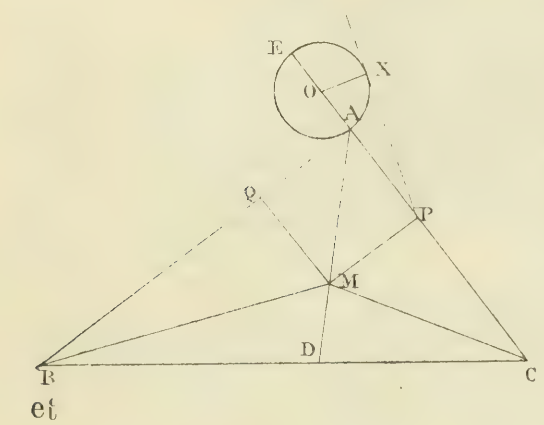
$$MBD = ABD - ABM,$$

$$ABD - ABM + MPC = S;$$

ce qui peut s'écrire

$$ABM - MPC = ABD - S = m^2,$$

puisque le triangle ABD est connu.



Or

$$ABM = \frac{1}{2} AB \times MQ = \frac{1}{2} AB \times AP.$$

et

$$MPC = \frac{1}{2} PC \times MP = \frac{1}{2} PC \times AP;$$

donc

$$AB \times AP - PC \times AP = 2m^2,$$

ou

$$AP(AB - PC) = 2m^2.$$

Mais

$$PC = AC - AP;$$

d'où, en substituant dans l'égalité précédente,

$$AP\,(AB - AC + AP) = 2m^2.$$

On est donc ramené à construire deux lignes connaissant la somme et le produit de leurs mesures.

La longueur OP une fois déterminée, on aura facilement le point P et enfin le point M cherché.

QUESTION 141

Solution par M. Lucien Lévy.

Construire un triangle sachant que la bissectrice coupe deux circonférences données sous des angles donnés et que les sommets opposés sont (*) les centres des deux circonférences.

(*) L'énoncé renfermait une erreur qui se trouve ici rectifiée et que M. Fitz-Patrick nous a signalée.

Menons une corde CD faisant avec la première circonférence O le premier angle donné α, c'est-à-dire faisant avec la tangente, à son extrémité C, l'angle α. Puis décrivons une circonférence concentrique à la première et touchant la corde CD. La bissectrice du triangle à construire sera évidemment tangente à cette circonférence. Elle sera, de même, tangente à une seconde circonférence de centre O′ et construite d'une manière analogue : elle sera donc une tangente commune à deux circonférences connues. Le sommet du triangle se trouvera à l'intersection de cette tangente avec la droite qui joint le centre O d'une circonférence au symétrique du centre O′ de l'autre circonférence par rapport à cette tangente.

Discussion. — La bissectrice pouvant être extérieure ou intérieure, la discussion est ramenée à celle des tangentes communes à deux circonférences. La seule circonstance spéciale au problème actuel est que, dans le cas des circonférences égales aux deux tangentes communes intérieures, ne correspond aucune solution.

Nota. — Autres solutions par MM. Bordage, professeur au collège de Nantua; Vigarié, élève externe à l'École des mines; Huré (Jules), du collège de Montargis, Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers.

QUESTIONS PROPOSÉES

206. — Démontrer que si les côtés b, c d'un triangle et l'angle compris A, vérifient la relation

$$b = 4c \cos\left(30^\circ + \frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{A}{2}\right):$$

1° l'angle A est le double de C; 2° les côtés a, b, c vérifient l'égalité

$$a^2 = c(b + c);$$

on pourra déduire (par des considérations géométriques) cette seconde propriété de la précédente.

(G. L.)

207. — Résoudre les équations

$$a(xy + yz + zx) = xyz,$$
$$y^2x^2 + z^2y^2 + x^2z^2 = 2xyz\,(x + y + z),$$
$$a(x + y + z)^2 = 4xyz.$$

On vérifiera qu'elles admettent *six* solutions et que ces solutions sont réelles. *(G. L.)*

208. — Soient deux cercles Δ, Δ' tangents au point M; par M, on mène une transversale mobile qui coupe Δ en A et Δ' en B. La perpendiculaire élevée à AB au point B et la tangente à Δ en A se coupent en C; si du point C on abaisse une perpendiculaire sur la ligne des centres, on obtient une droite qui rencontre AB en I.

Le lieu du point I est une circonférence. *(G. L.)*

209. — On considère deux droites parallèles Δ, Δ' et un point fixe O. Par O, on trace une droite qui rencontre Δ en A, Δ' en A'. On élève alors au point A' une perpendiculaire à AA' et l'on prend sur cette perpendiculaire A'I = OA.

Démontrer que le lieu du point I est un système de deux droites, quand on fait tourner OAA' autour du point O.

On suppose, bien entendu, que la longueur OA est portée sur la perpendiculaire dont il est question ci-dessus, dans les deux sens. *(G. L.)*

Nota. — La question 167 dont nous avons publié une solution (p. 46), a été également résolue par MM. Bourdier, du Lycée de Grenoble, et Henri Martin, du Lycée Condorcet.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3900 6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Éd. Guillet,** professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, voir p. 49.)

Etude du deuxième bond. — En appelant, comme nous l'avons fait, v_1 la vitesse en B′ et α' l'angle de la normale B′X′ avec la direction de la vitesse v_1 après le choc en B′, les calculs et les raisonnements seront identiques à ceux que nous avons faits pour étudier la trajectoire parabolique BSB′.

Prenons pour nouveaux axes de coordonnées O′X et O′B′; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_1 \sin(\alpha + \alpha') \\ v_y &= v_1 \cos(\alpha + \alpha') - gt \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_1 t \sin(\alpha + \alpha') \\ y &= v_1 t \cos(\alpha + \alpha') - \frac{1}{2} g t^2 + (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

En désignant par h' la hauteur de chute capable de donner à la sphère la vitesse v_1, on a

$$h' = \frac{v_1^2}{2g}$$

ou

$$h' = \frac{v_0^2}{2g}(1 + 8 \sin^2 \alpha),$$

c'est-à-dire

$$h' = h(1 + 8 \sin^2 \alpha). \qquad (24)$$

Eliminant t entre les équations (23) on aura la relation qui lie les coordonnées d'un point quelconque de la deuxième courbe B′S′B″ :

$$y = x \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') - \frac{gx^2}{2v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha')} + (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha. \quad (25)$$

Si nous appelons x_2 et y_2 les coordonnées du point B″ où la deuxième trajectoire rencontre la droite BX, nous

avons

$$y_2 = x_2 \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') - \frac{gx^2}{2v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha')} + (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha. \quad (26)$$

D'autre part, les triangles semblables OBX et O″B″X donnent

$$\frac{y_2}{a \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a - x_2 - x_1}{a},$$

d'où

$$y_2 = (a - x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha. \quad (27)$$

Portant cette valeur de y_2 dans l'équation (26), on a

$$-x_2 \operatorname{tg} \alpha = x_2 \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') - \frac{gx_2^2}{2v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha')};$$

ou, en simplifiant et en faisant disparaître la solution $x_2 = 0$, qui correspond au point de départ B′:

$$x_2 = \frac{2v_1^2}{g} \sin^2(\alpha + \alpha') [\operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') + \operatorname{tg} \alpha].$$

Or

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha') \cos \alpha};$$

de sorte qu'il vient

$$x_2 = \frac{2v_1^2}{g} \times \frac{\sin(\alpha + \alpha') \cos \alpha'}{\cos \alpha}$$

et enfin

$$x_2 = 4h' \sin(\alpha + \alpha'). \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha}. \quad (28)$$

L'ailleurs

$$\sin(\alpha + \alpha') \cos \alpha' = \sin \alpha \cos^2 \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha' \cos \alpha;$$

Et de la relation

$$\operatorname{tg} \alpha' = 3 \operatorname{tg} \alpha$$

on déduit :

$$\sin \alpha' = \frac{3 \sin \alpha}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha}}.$$

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha}}.$$

On peut donc éc ire

$$x_2 = \frac{16h' \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 8 \sin^2 \alpha}$$

et, si l'on tient compte de la relation (24), on a

$$x_2 = 16h \sin \alpha \cos \alpha \qquad (29)$$

ou

$$x_2 = 8h \sin 2\alpha \qquad (30)$$

Remarque. — La comparaison des formules (30) et (11) montre que

$$x_2 = 2x_1. \qquad (31)$$

Durée du deuxième bond. — Si nous appelons t_2 la durée du deuxième bond, le chemin horizontal parcouru étant x_2, on calculera t_2 à l'aide de la formule

$$x = v_1 t \sin (\alpha + \alpha'),$$

dans laquelle on remplacera t par t_2 et x par x_2. On en déduit

$$t_2 = \frac{x_2}{v_1 \sin (\alpha + \alpha')}.$$

Or

$$\sin (\alpha + \alpha') = \sin \alpha \cos \alpha' + \sin \alpha' \cos \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\sin (\alpha + \alpha') = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha}}.$$

On aura donc, en remplaçant x_2, v_1, et $\sin (\alpha + \alpha')$ par leurs valeurs, en fonction des données :

$$t_2 = \frac{4h}{v_0},$$

et puisque

$$h = \frac{v_0{}^2}{2g},$$

il vient

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}. \qquad (32)$$

Remarque. — Si nous comparons les formules (32) et (13), nous voyons que

$$t_2 = t_1,$$

c'est-à-dire que le deuxième bond est effectué dans le même temps que le premier.

Amplitude du deuxième bond. — Le trapèze rectangle O'B'B''O''

donne

$$B'B'' = \frac{x^2}{\cos\alpha}.$$

On a donc, en désignant par A' l'amplitude du deuxième bond,

$$A' = \frac{16h \sin\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha}$$

ou

$$A' = 16h \sin\alpha. \qquad (33)$$

Remarque. — La comparaison des formules (33) et (14) montre que

$$A' = 2A, \qquad (34)$$

c'est-à-dire que la deuxième amplitude est double de la première, comme le prouvait d'ailleurs l'égalité

$$x_2 = 2x_1,$$

puisqu'on a

$$\frac{x_1}{A} = \frac{x_2}{A'} = \cos\alpha.$$

(A suivre.)

DIVERS THÉORÈMES

SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA SOMME D'UN NOMBRE ET DE CE NOMBRE RENVERSÉ

Par M. **Emile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite et fin*, voir p. 60.)

Problème I. — *A étant un nombre de* n *chiffres écrit dans le système dont la base est* x, *trouver combien la somme* A + a = X_a *peut avoir de valeurs différentes lorsque* A *varie de* x^{n-1} *à* $x^n - 1$.

$$X_a = (a_0 + a_{n-1})(1 + x^{n-1})$$
$$+ (a_1 + a_{n-2})\,x\,(1 + x^{n-3}) + \ldots \qquad (3)$$

Si n est pair $= 2m$, il y aura évidemment m termes dans le second membre.

Si n est impair $= 2m + 1$, il y en aura $m + 1$ à cause du terme $2a^m x^m$.

Pour avoir toutes les valeurs possibles de N_a il suffira de donner dans (3) aux coefficients toutes les valeurs dont ils sont susceptibles et de les combiner de toutes les manières possibles : car chaque combinaison différente donnera une valeur différente pour N_a d'après le théorème précédemment établi ; or

$a_0 + a_{n-1}$ peut prendre les $2(x - 1)$ valeurs $1, 2, \ldots 2(x - 1)$.

$a_1 + a_{n-2}$, $a_2 + a_{n-3}$, etc., peuvent prendre les $2(x - 1) + 1$ valeurs $0, 1, 2, \ldots 2(x - 1)$.

Si $n = 2_{m+1}$, le chiffre a_m ne pourra avoir que les x valeurs $0, 1, 2 \ldots (x - 1)$; le problème a donc sa solution dans le théorème suivant.

Théorème II. — *Le nombre total des valeurs différentes que peut prendre* N_a, A *ayant* n *chiffres, est*

$$2(x - 1)(2x - 1)^{m-1} \text{ si } n = 2m$$

ou

$$2x(x - 1(2x - 1)^{m-1} \text{ si } n = 2m + 1.$$

Remarque I. — Si n est pair, N_a est toujours divisible par $x + 1$.

Remarque II. — Le théorème II a lieu quelle que soit la base x, même pour $x = 2$.

Parmi les nombres écrits dans une même base il en est pour lesquels $A = a$; il faut et il suffit pour cela que les chiffres à égale distance des extrêmes dans A soient égaux deux à deux : appelons de tels nombres, nombres *symétriques*.

Problème II. — *Combien y a-t-il de nombres symétriques parmi les nombres de* n *chiffres ?*

1° $n = 2m$.

Les chiffres de A sont :

$$a_0, a_1 \ldots a_{m-1}, a_{m-1} \ldots a_1, a_0.$$

a_0 ne peut avoir que les $x - 1$ valeurs $1, 2, 3 \ldots (x - 1)$, tous les autres peuvent avoir les x valeurs $0, 1, 2, 3 \ldots (x - 1)$.

Il y aura donc autant de valeurs différentes pour A qu'il y aura de nombres de m chiffres (tous les chiffres pouvant être nuls sauf le premier), c'est-à-dire

$$x^{m-1}(x - 1)$$

2° $n = 2m + 1$.

Les chiffres de A sont :

$$a_0, a_1 \ldots a_{m-1}, a_m, a_{m-1}, \ldots a_1, a_0.$$

a_0 ne peut avoir que les $x - 1$ valeurs 1, 2, 3, ... $(x - 1)$, tous les autres peuvent avoir les x valeurs 0, 1, 2, 3, ... $(x - 1)$.

Comme a_m peut avoir x valeurs, le nombre de nombres symétriques de $2m + 1$ chiffre est donc x fois le nombre de nombres de m chiffres (tous les chiffres pouvant être nuls sauf le premier), c'est-à-dire d'après ce qui précède

$$x \cdot x^{m-1}(x - 1) \quad \text{ou} \quad (x - 1)x^m.$$

Ainsi, dans le cas de n pair il y a

$(x - 1)x^{\frac{n-2}{2}}$ nombres symétriques de n chiffres.

Dans le cas de n impair il y a

$(x - 1)x^{\frac{n-1}{1}}$ nombres symétriques de n chiffres.

Problème III. — *Trouver combien il y a de nombres symétriques entre* 1 *et* x^n.

En cherchant combien il y a de nombres symétriques de un chiffre, de deux chiffres, etc., de n chiffres et faisant la somme des résultats trouvés, l'application des formules précédentes donne pour ce nombre

$$2(x^m - 1), \quad \text{si } n = 2m$$

et

$$x^m + x^{m-1} - 2, \quad \text{si } n = 2m - 1.$$

Remarque III. — Si au lieu de considérer la somme $A + a$ nous considérons la différence $A - a$, nous pouvons faire une étude tout à fait analogue qui se déduira du théorème suivant.

Théorème III. — *Si* A *et* B *ont le même nombre de chiffres et que la différence de deux chiffres à égale distance des extrêmes dans* A *soit égale à la différence des chiffres correspondants dans* B, *on aura* $A - a = B - b$, *et réciproque-*

ment; si A *et* B *ont un nombre impair de chiffres, il faut de plus que le chiffre du milieu soit le même dans* A *et dans* B.

Remarques dans le système de numération dont la base est dix.

I. La plus petite solution de l'équation indéterminée

$$A + a = H^2 \text{ est } A = 29.$$

II. — La plus petite solution de l'équation indéterminée

$$A - a = H^2 \text{ est } A = 10.$$

III. — L'on établit assez vite par une vérification raisonnée que pour aucun nombre A de deux chiffres l'on a

$$A^2 + a^2 = H^2$$

et que 65 est le seul nombre de deux chiffres tel que

$$A^2 - a^2 = H^2.$$

On a en effet

$$\overline{65}^2 - \overline{56}^2 = \overline{33}^2.$$

Les problèmes généraux d'où proviennent ces remarques ne paraissent pas d'une solution facile.

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey.**

1. — L'évaluation des formules usuelles est si nécessaire, que les géomètres ont multiplié avec raison les procédés fournissant le plus rapidement les cubatures fondamentales. Mais on est surpris de trouver encore dans les ouvrages classiques (*) tous ces procédés isolés les uns des autres, sans lien apparent, quand ils se condensent en deux formules bien simples qui sont :

1° *L'omniformule de cubature* (voir note V, § 32);

2° *La formule dite de Guldin.*

Il nous semble que cette condensation généraliserait les idées, régulariserait et diminuerait les efforts de mémoire.

(*) Dans une thèse présentée à la Faculté de Paris (*Des Quadratures*, juillet 1868), M. Pujet, après avoir établi le théorème suivant : *Le volume du solide compris entre deux plans parallèles e t une surface réglée quelconque est*

2. — Définition de l'omniformule (voir note V, § 32). — Un volume quelconque V peut être considéré comme limité par deux plans parallèles y déterminant des bases B, b différentes de zéro *ou nulles* et par une surface latérale passant par le périmètre des bases.

Soit h la distance des bases, B′ la section faite dans le volume par un plan équidistant de ces bases; dans les cas les plus usuels, la mesure du volume est donnée par la formule

$$V = \frac{h}{6}(B + b + 4B'),$$

que nous proposons de nommer l'*omniformule*, à cause du grand nombre de ses applications.

3. — Nous supposons démontrées les formules classiques servant à évaluer le volume du *prisme* et celui de la *pyramide*.

4. Lemme. — Soit : la pyramide quadrangulaire S AC A′C′ à base trapézoïdale AC C′A′ ; A″C″ la parallèle équidistante de AC et A′C′ ; C′D la distance de C′ à la section triangulaire SA″C″.

Le triangle A″C″C′ est le quart du trapèze ACC′A′; donc la pyramide SA″C″C′ est le quart de la pyramide SACC′A′.

Or la pyramide SA″C″C′ a pour mesure

$$S\,A''C'' \times \frac{C'D}{3};$$

égal à la somme des volumes des trois cônes ayant pour hauteur commune la demi-distance des bases parallèles, et pour bases respectives: l'un, la base inférieure: l'autre, la base supérieure; et le troisième, quatre fois la section moyenne, théorème qui est la traduction de ce que M. Rey appelle, dans la présente note, l'*omniformule*, dit (p. 55) :

« Cette démonstration tout élémentaire d'un théorème très général pourrait être introduite dans l'enseignement, et l'on en déduirait très aisément les expressions connues du volume du tronc de pyramide et du volume du tronc de prisme, ainsi que le cubage des mètres de pierre, fossés ou tombereaux. On pourrait également l'appliquer au cubage des troncs d'arbres et des tonneaux. »

Enfin M. Pujet, dans la thèse citée, l'applique au volume du segment sphérique.

Le vœu qu'exprime ici M. Rey a donc été formulé déjà très explicitement, y a une vingtaine d'années ; l'omniformule est aujourd'hui très connue (voyez : Rouché et de Comberousse. *Traité de Géométrie*, 4e édition, § 656 ; Vacquant, *Cours de Géométrie élémentaire*, § 659. Voyez aussi les traités de tachymétrie où la formule en question se nomme *règle des trois niveaux :* expression plus imagée et qui nous paraît préférable) et on l'enseigne dans la plupart des cours. Il lui reste, il est vrai, à pénétrer dans les programmes. G. L.

donc la pyramide SACC′A′ a pour mesure

$$4 SA''C'' \times \frac{C'D}{3}.$$

Remarques. — Si A′ coïncide avec C′, le lemme continue à être vrai.

— Les distances de A, C, A′ à SA″C″ sont égales à C′D.

5. Théorème fondamental. — *L'omniformule est vraie pour tout volume V à bases parallèles et à faces trapézoïdales ou triangulaires.*

Soit V le volume ACDFA′C′E′F′; A″C″D″E″F′ la section B′ équidistante des bases B, b; OO′ la hauteur h divisée en deux parties égales par le point S de la section B′.

Les triangles (non tracés pour ne pas surcharger la figure) SAC, SCD, SDF, SFA et SA′C′, SC′E′, SE′F′, SF′A′ décomposent le volume en :

1° Une pyramide SACDF de base B, de hauteur $SO = \frac{h}{2}$, qui a pour mesure

$$\frac{h}{6} \times B;$$

2° Une pyramide SA′C′E′F′ de base b, de hauteur $SO' = \frac{h}{2}$, qui a pour mesure

$$\frac{h}{6} \times b;$$

3° Des pyramides SACC′A′, SCDC′, SC′DE′, SE′DFF′, SFF′AA′, dont, en vertu du lemme précédent, la somme a pour mesure

$$4 \frac{h}{6} (SA''C'' + SC''D'' + SD''E'' + SE''F'' + SF''A'' = B',$$

car les distances des points C′, D, F à la section B′ sont égales à $\frac{h}{2}$.

On en conclut

$$V = \frac{h}{6} (B + b + 4B').$$

Remarque. — Si b était nulle, le théorème ne cesserait pas d'être vrai.

6. Corollaires. — Du théorème précédent il résulte que l'omniformule est vraie pour

1° Le prisme;

2° La pyramide;

3° Le tronc de prisme triangulaire considéré comme couché sur une de ses faces trapézoïdales lui servant de base B;

4° Le tronc du parallélépipède considéré comme couché sur une de ses faces trapézoïdales lui servant de base B.

5° Le tronc de pyramide à bases parallèles;

6° Les volumes à bases rectangulaires et à faces latérales trapézoïdales dont le tas de cailloux, les charrettes, les brouettes, les obélisques, etc., présentent des applications.

7° Les volumes des terrasses ou plates-formes avec leurs talus descendants, des fossés avec leurs talus montants, etc.

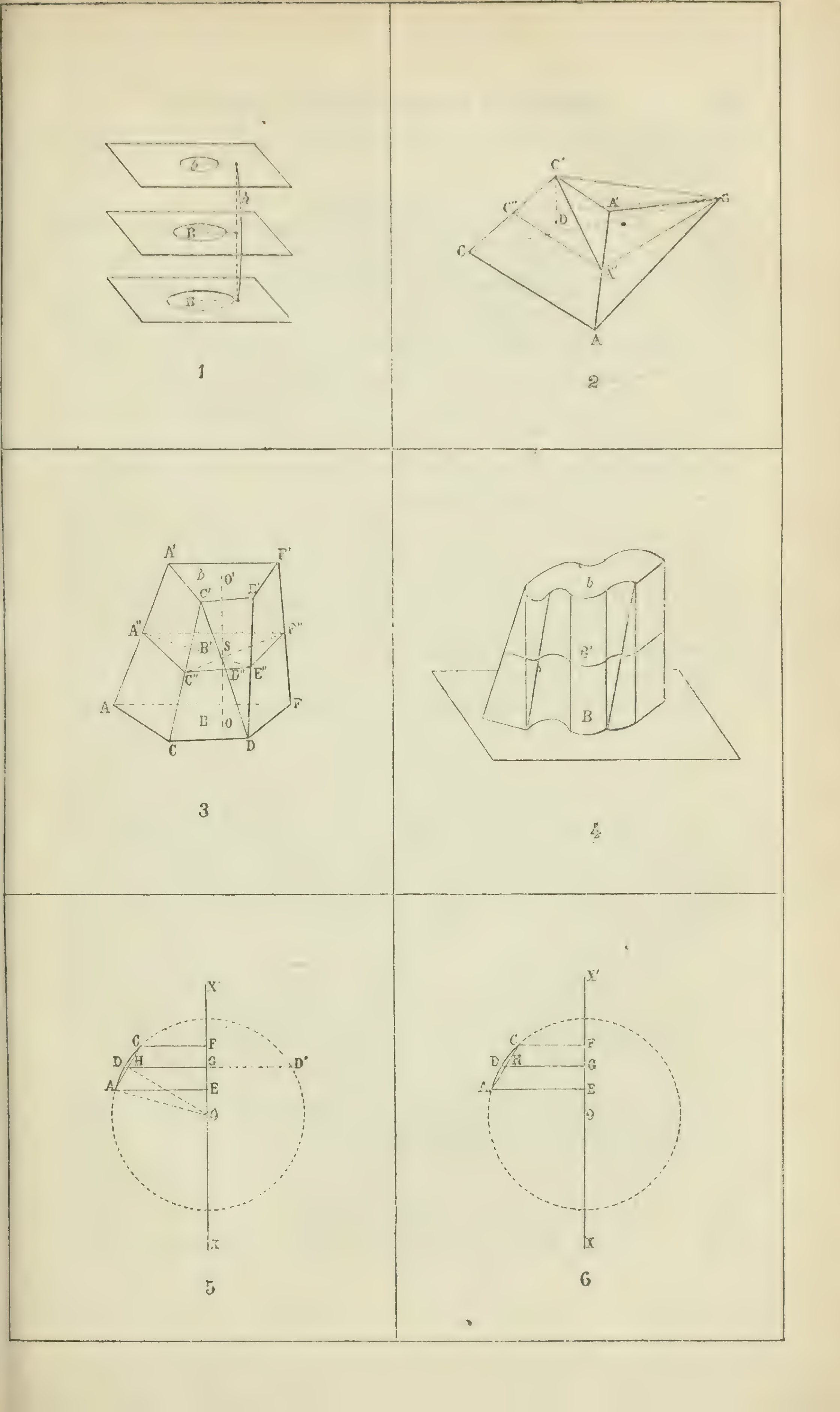
A l'évaluation des volumes des deux dernières catégories exactement donnée par l'omniformule, on applique souvent la formule du tronc de pyramide, *bien à tort*, puisque les arêtes latérales ne concourent pas.

7. Formules classiques. — Les formules classiques relatives à l'évaluation du tronc de prisme triangulaire, du tronc de parallélépipède, du tronc de pyramide à bases parallèles se déduisent aisément de l'omniformule.

Afin de ne pas allonger notre article outre mesure, nous laissons au lecteur le soin d'en faire la vérification. Ces formules classiques sont évidemment préférables à l'omniformule : car, dans les applications, elles présentent moins de données à mesurer directement.

8. Cylindres, cônes, troncs de cône à bases parallèles dont les bases sont quelconques. — L'omniformule leur est applicable, car ils sont les limites de prismes, de pyramides, de troncs de pyramide à bases parallèles.

9. Volume compris entre deux plans parallèles et des surfaces latérales planes, cylindriques, coniques se raccordant suivant des lignes droites. — Un pareil volume est la somme algébrique de volumes spécifiés dans les paragraphes précédents, tous compris



b
B
B
h
1
C'
C''
D
A'
S
C
A''
A
2
A'
F'
b
O'
C'
E'
A''
F''
B'
S
C''
D''
E''
A
F
B
O
C
D
3
b
B'
B
4
X'
C
F
D
H
G
D'
A
E
O
X
5
X'
C
F
D
H
G
A
E
O
X
6

entre les mêmes deux plans parallèles; donc l'omniformule lui est applicable.

10. Anneau engendré par un segment circulaire tournant autour d'un axe passant par le centre de l'arc du segment et situé dans son plan. — Soit V le volume engendré par le segment circulaire ADCH exécutant une révolution autour de XX'. Si on le considère comme compris entre les plans passant par A, C perpendiculaires à XX', ses bases B, b sont nulles, sa section B' équidistante des bases est la couronne engendrée par HD, H étant le milieu de la corde AC.

Soit h la hanteur EF, on a

$$V = \frac{2}{3} h\pi(OA^2 - OH^2) = \frac{2}{3} h\pi \times AH^2 = \frac{2}{3} \pi DH \times HD'$$

$$= \frac{2}{3} h\pi(DG^2 - GH^2) = \frac{2}{3} hB' = \frac{h}{6}(B + b + 4B'),$$

puisque B et b sont nulles.

Remarque. — Si le segment générateur devient un demicercle, l'omniformule donne naturellement

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

11. Segment sphérique à bases parallèles. — Son volume étant la somme des volumes engendrés par le segment circulaire ADCH et par le trapèze ACFE, l'omniformule lui est applicable.

Elle donne

$$V = \frac{FE}{6} \pi(AE^2 + CF^2 + 4DG^2 - 4HG^2);$$

et si on remplace dans cette expression $4DG^2 - 4HG^2$ par la quantité égale AC^2, on retombe sur la formule classique.

12. — L'omniformule s'applique évidemment aux onglets des volumes spécifiés §§ 10 et 11.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

DU MOUVEMENT SCIENTIFIQUE EN ITALIE

UN NOUVEAU JOURNAL DE MATHÉMATIQUES A ROME — ANNONCE

Par M. **Aristide Marre.**

L'Italie fait des efforts constants et obtient des succès remarquables dans toutes les branches de la science contemporaine. L'élan scientifique y est donné de toutes parts et à tous les degrés de l'enseignement. L'Académie royale des sciences de Turin, l'Académie royale des *Lincei* de Rome et l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, l'Institut royal lombard de Milan, l'Académie des sciences de Naples, l'Institut royal vénitien, l'Académie des sciences de Bologne, celles de Padoue, Pise, Modène, Palerme, Messine, etc., se livrent à l'envi à l'étude des sciences exactes et de leurs merveilleuses applications. Les Universités, les instituts techniques, les gymnases, toutes les écoles, grandes et petites, marchent vers un même but : la conquête de la science. C'est la science, en effet, qui désormais, dans la paix comme dans la guerre, sera le facteur principal de la force, de la grandeur et de l'indépendance des nations. On le comprend en Italie; c'est pourquoi nous assistons en ce moment à ce remarquable spectacle : pendant qu'un illustre général, ambassadeur d'Italie en France, lit à l'Académie des sciences de Paris un mémoire « sur la densité et la figure de la Terre », un étudiant romain publie dans une revue belge, la *Mathesis*, une « note sur l'hélice osculatrice », et dans les écoles du peuple on étudie le petit livre du professeur Artimini, sur le téléphone et les autres instruments électriques. Aussi les statistiques téléphoniques récemment publiées mettent-elles en évidence ce fait spécial qui a bien sa signification et sa portée, à savoir que l'Italie, moins riche et moins peuplée que la France.

compte pourtant un bien plus grand nombre d'abonnés au téléphone.

Chez nos voisins, les mathématiciens, physiciens et astronomes forment une véritable légion. Qu'il nous soit permis de citer ici les noms de MM. Armuzzi, Aschieri, Ascoli, Azzarelli, Bardelli, Bartoli, Battaglini, Basso, D. Besso, Beltrami, Betti, Bombicci, prince Balthasar Boncompagni, Borgatti, Cagnassi, Canestrini, Cantoni, Capelli, Capitó, Cappa, Cardani, Casorati, Cattaneo, Cavalli, Celoria, Cerruti, Césaro, Colombo, Cordenons, Cremona, Denza, Emo, Fabri, Faifofer, Fambri, Farini, Favaro, Felici, Ferrari, Ferrini, Frattini, Formenti, Gastaldi, Genocchi, Giunti, Govi, Grassi, Guccia, Grattarola, Jadanza, Lazzeri, Luvini, Maisano, Marangoni, Martinetti, Martini, Masoni, général de Menabrea, Mugna, Nonnis-Marzano, d'Ovidio, Paci, Padova, Pagliani, Palmieri, Pavesi, Pennacchiotti, Pincherle, Pisati, Poncini, Porta, Provenzali, Pucci, Puppati, Realis (*), Riccardo de Paolis, Riccò, Righi, Roiti, Romanese, Rossi, Rovelli, Ruffini, Saccheri, Santini, Scacchi, Schiaparelli, Serpieri, Stefanelli, Tacchini, Trevellini, Velloni, Vicentini, Vimercati, Volta, Zanotti, etc.

Les journaux scientifiques ne manquent point aux étudiants en Italie; ils tiennent leurs lecteurs au courant des découvertes des inventions et des travaux publiés dans le royaume et dans les pays étrangers. Parmi les principaux, il suffira de mentionner le *Giornale di Matematiche* de Battaglini, la *Rivista di matematica elementare* du professeur Gastaldi, le *Periodico tecnico* de Saccheri, la *Rivista scientifico-industriale* de Guido Vimercati, le *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* du prince Balthasar Boncompagni, et pour la physique et la chimie, *il Nuovo Cimento.* A ces diverses revues, il conviendra d'ajouter le Journal de mathématiques qui vient d'être fondé, dans l'intérêt de l'enseignement secondaire, par David Besso, professeur de mathématiques à l'Institut royal technique de Rome, l'auteur

(*) Enlevé à la science et à l'affection de ses nombreux amis le 9 février dernier. G. L.

de savants travaux sur l'Analyse supérieure, et notamment sur les équations différentielles linéaires. Ce nouveau journal est intitulé : *Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario*; il paraîtra tous les deux mois et donnera six livraisons par an. Le premier cahier ou fascicule, numéro de janvier-février 1886, vient de paraître. Il contient un mémoire sur le tétraèdre à faces égales, par D. Besso; la démonstration d'une proposition fondamentale de la théorie de l'équivalence par A. Faifofer; des exercices pour l'école par D. Besso, c'est-à-dire trente cinq questions d'arithmétique et trente questions de trigonométrie, et enfin une revue bibliographique par G. Frattini. Cette quatrième et dernière partie du premier fascicule donne le compte rendu analytique des éléments de géométrie de Riccardo de Paolis, professeur de géométrie supérieure à l'Université royale de Pise.

Le prix de l'abonnement au *Periodico di Matematica* du professeur Besso, est de six francs par an pour l'Italie, et de sept francs pour les autres États de l'Union postale. Cette petite somme devra être adressée directement à M. David Besso, via Nazionale, n° 230, Rome. Les abonnés qui voudront collaborer au Journal, recevront gratuitement 25 exemplaires tirés à part de chacun de leurs travaux.

NOTICE NÉCROLOGIQUE SUR S. REALIS

Ce n'est pas, à proprement parler, une notice nécrologique que je me propose de consacrer à la mémoire du savant éminent dont j'ai annoncé la mort dans le précédent numéro du *Journal de Mathématiques spéciales*. Je n'ai pas assez, personnellement, connu Realis pour retracer, comme il faudrait le faire, cette vie tout entière vouée à la science et je connais seulement quelques-uns des nombreux et importants travaux qu'il a publiés en France et en Italie (*). Je veux seulement

(*) Une lettre de M. Joseph Realis, que j'ai reçue quand cette notice était composée, me donne la liste à peu près exacte des notes et mémoires publiés par son frère. Cette monographie comprend les titres de ces articles dont le nombre est supérieur à cent!

adresser quelques mots d'adieu bien sympathiques à celui qui, comme je l'ai dit dans les quelques lignes auxquelles je viens de faire allusion, a collaboré à cette publication et lui a témoigné tant de bienveillants encouragements. Cette collaboration a été l'objet, entre Realis et moi, d'un échange de lettres nombreuses; elles m'ont permis d'apprécier toute l'érudition et toute l'amabilité de ce profond et charmant esprit.

Savino Realis était né à Turin, le 18 octobre 1818, d'une ancienne et très distinguée famille de Piémont. Son père était avocat et passait pour l'un des meilleurs jurisconsultes du barreau de Turin. D'après des renseignements que je dois à l'obligeance de son vieil et fidèle ami, M. Genocchi, Realis montra de bonne heure un goût très vif pour l'étude des sciences exactes. Il fit ses études à l'Université de Turin, où il fut un des brillants élèves des professeurs Plana, Bidone, Giulio, et y obtint le diplôme d'ingénieur (1839). C'est en 1840 que son père le conduisit à Paris. Il put y poursuivre et y compléter ses études, et il garda de ce séjour à Paris un souvenir tel qu'il laissait rarement s'écouler une année sans venir y passer quelques semaines. Comme le rappelait, avec raison, un article paru le 15 février dans la *Gazette de Turin*, il aimait bien la France et il aimait bien Paris. Il prit part, très jeune, à la direction du premier chemin de fer qui fut construit dans le Piémont, et depuis cette époque (1843 environ) sa vie fut partagée entre l'exercice pratique de l'art de l'ingénieur et les recherches si profondes et si judicieuses qu'il a consacrées à la théorie des nombres ou à l'analyse indéterminée. Ces notes ou mémoires ont été publiées dans diverses revues, notamment : dans le *Bullettino* du prince Balthasar Boncompagni, en Italie, et dans les *Nouvelles Annales*, en France. Ici même, ont paru diverses notes et questions qui ont dû donner à nos lecteurs une idée, par l'intérêt et la difficulté qu'elles présentent, du savoir si étendu du géomètre qui les produisait. En m'adressant (le 30 décembre dernier) quelques pages qui ont été insérées dans le numéro de février suivant, Realis s'excusant du retard qu'il avait mis à me les envoyer, me disait : « Le dépérissement de ma santé est la principale justification que je puis alléguer pour mes négligences et

mon inaction. Pour cette raison, je ne me suis plus guère occupé à des travaux suivis, et ce n'est qu'occasionnellement qu'il m'arrive de m'appliquer à rédiger quelques notes, tirées, comme la petite communication ci-jointe, *de mes vieux brouillons.* »

Je suppose, et la lettre qu'on lira plus loin me paraît justifier cette hypothèse, qu'on trouvera dans les vieux brouillons dont parle ici Realis une ample moisson de pensées judicieuses et de formules pleines d'intérêt; à ce propos, on me permettra d'émettre le vœu que, pour le plus grand profit de la science, elles ne soient pas perdues !

On ne comprendrait peut-être qu'assez imparfaitement la teneur de la lettre à laquelle je viens de faire allusion si je n'expliquais ici, en deux mots, son origine. J'avais communiqué, à cette époque, à M. Catalan, avec l'expression de l'insuccès de mes recherches personnelles, le désir de voir se produire une démonstration rapide et simple de cette belle et fondamentale propriété des nombres : *tout nombre entier est la somme de quatre carrés entiers.* C'est à ce propos que M. Catalan me renvoya à Realis, qui me répondit la lettre suivante et (abstraction faite d'une partie plus personnelle, concernant le Congrès de Grenoble) je crois devoir la publier *in extenso* à cause de l'intérêt scientifique incontestable qu'elle possède. On comprendra certainement, après l'avoir lue, comment on s'attachait, même de loin, à l'homme dont l'érudition aimable et sûre vous était si libéralement ouverte, et quelle sympathie cordiale faisait naître en vous le commerce mathématique entretenu avec cet esprit supérieur, aussi modeste que savant.

G. L.

« Turin, 19 septembre 1885.

« Cher Professeur,

« Notre illustre ami et maître aime quelquefois à plaisanter, et à railler agréablement son monde ; voilà pourquoi il m'a mis en cause à propos de votre question sur la décomposition des nombres en quatre carrés. Démontrer le théorème de Fermat (et en général les théorèmes arithmologiques) au moyen

de simples identités, sans s'appuyer sur des considérations spéciales aux nombres entiers, cela ne se peut; les identités expriment des relations communes à toutes sortes de quantités et ne donnent que ce qu'on leur a déjà confié implicitement; elles ne créeront donc pas plus un théorème purement arithmologique qu'elles ne produiront une proposition de mécanique ou de physique.

« Les identités sont cependant d'admirables instruments pour simplifier le travail intellectuel, et pour faire ressortir les conséquences, quelquefois très cachées, des données que l'on possède. M. Catalan le sait mieux que personne, et votre excellente *Algèbre* est là pour montrer l'efficacité et la portée de ce moyen de recherche, quand il est bien employé. Puisque nous sommes sur le sujet, et que vous m'en fournissez l'opportunité, permettez-moi de rapporter ici les formules suivantes, que j'avais construites, il y a longtemps, à l'occasion de quelques tentatives infructueuses touchant la démonstration que vous avez demandée à notre illustre maître.

« I. — Hypothèse :

$$x(4x+k) = (x+\alpha)^2 + (x+\beta)^2 + (x+\gamma)^2 + (x+\delta)^2.$$

« Conséquence :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{k-2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}, \\ 4x+k &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(4\alpha-k)^2+(4\beta-k)^2+(4\gamma-k)^2+(4\delta-k)^2}{k-2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}. \end{aligned}\right.$$

« II. — Hypothèse :

$$(4x\mp 1)(x+k) = (x+\alpha)^2 + (x+\beta)^2 + (x+\delta)^2 + (x+\gamma)^2.$$

« Conséquence :

$$\left\{\begin{aligned} 4x\mp 1 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(4\alpha\pm 1)^2+(4\beta\pm 1)^2+(4\gamma\pm 1)^2+(4\delta\pm 1)^2}{4k\mp 1-2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}, \\ x+k &= \frac{(k-\alpha)^2+(k-\beta)^2+(k-\gamma)^2+(k-\delta)^2}{4k\mp 1-2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}, \end{aligned}\right.$$

où les signes se correspondent.

« III. — Hypothèse :

$$pq = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2.$$

« Conséquence :

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{(ap-\alpha)^2+(bp-\beta)^2+(cp-\gamma)^2+(dp-\delta)^2}{q+(a^2+b^2+c^2+d^2)p-2(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)}, \\ q &= \frac{(aq-\alpha)^2+(bq-\beta)^2+(cq-\gamma)^2+(dq-\delta)^2}{p+(a^2+b^2+c^2+d^2)q-2(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)}, \end{aligned}\right.$$

où l'on peut disposer de a, b, c, d à volonté, ces quantités étant indépendantes de p et q.

« Ce que vous avez demandé à l'éminent professeur, si j'ai bien compris, c'est une simplification à la démonstration donnée par Euler (en substitution de la démonstration difficile de Lagrange), et introduite, avec modifications, par Serret dans la première édition de son *Algèbre supérieure* (et aussi, d'une manière incomplète, par Le Besgue dans ses *Exercices d'analyse numérique*). Si les formules ci-dessus vous paraissent susceptibles d'une application utile pour l'objet que vous avez en vue, elles sont fort à votre service. Quant à en déduire, sans autre secours, la démonstration complète du théorème, c'est vain espoir ; je crois pouvoir en dire autant des autres relations de ce genre que l'on pourrait produire. Aussi, je ne me suis plus occupé du théorème en question que pour en développer, à l'occasion, quelques conséquences ou quelques propositions complémentaires (V., par exemple, les *Nouvelles Annales*, année 1873, p. 212 ; année 1878, p. 381 ; année 1879, p. 500).

« Veuillez agréer, cher professeur, l'expression empressée de mes sentiments très sympathiques et de haute considération. « S. REALIS. »

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

(*Suite*, voir p. 63.)

8. — *On donne les deux équations*

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

qui permettent de calculer x', y' *connaissant* x *et* y.

Trouver les conditions que doivent vérifier les coefficients a,

b, c ; α, β, γ *pour que : calculant* x″ y″ *au moyen de* x′ y′ *comme on a déduit* x′ y′ *de la connaissance d'*x *et d'*y, *on ait* x″ = x, y″ = y*: et cela, quels que soient* x *et* y.

Les relations

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = \alpha x + \beta y + \gamma;$$
$$x = ax' + by' + c,$$
$$y = \alpha x' + \beta y' + \gamma;$$

donnent

$$x(a^2 + b\alpha - 1) + yb(a + \beta) + ac + b\gamma + c = 0,$$

et

$$x\alpha(a + \beta) + y(b\alpha + \beta^2 - 1) + c\alpha + \beta\gamma + \gamma = 0$$

Ces deux dernières égalités doivent être vérifiées, quelsque soient x et y. On a donc

$$a^2 + b\alpha - 1 = 0, \qquad b(a + \beta) = 0, \qquad ac + b\gamma + c = 0,$$
$$\alpha(a + \beta) = 0, \qquad b\alpha + \beta^2 - 1 = 0, \qquad c\alpha + \beta\gamma + \gamma = 0.$$

Ces six conditions se réduisent aux suivantes

$$\beta = -a, \qquad \alpha = \frac{1 - a^2}{b}, \qquad \gamma = -\frac{c(1 + a)}{b}.$$

L'interprétation géométrique de cette question, posée, nous a-t-on dit, aux examens du baccalauréat, à Rennes, est bien connue ; et l'on sait comment cet exercice se présente naturellement quand on veut déterminer les formules générales de la transformation homographique en involution. On peut vérifier d'ailleurs que les formules que nous venons de trouver

$$(\mathrm{H})\quad \left\{\begin{aligned} x' &= ax + by + c,\\ y' &= \frac{1 - a^2}{b}x - ay - \frac{(1 + a)c}{b}, \end{aligned}\right.$$

donnent bien, pour x'' et y'', les valeurs x et y qui ont servi de point de départ. Il suffit de résoudre les équations précédentes par rapport à x et à y.

Parmi les formules que l'on peut déduire des précédentes nous signalerons les suivantes :

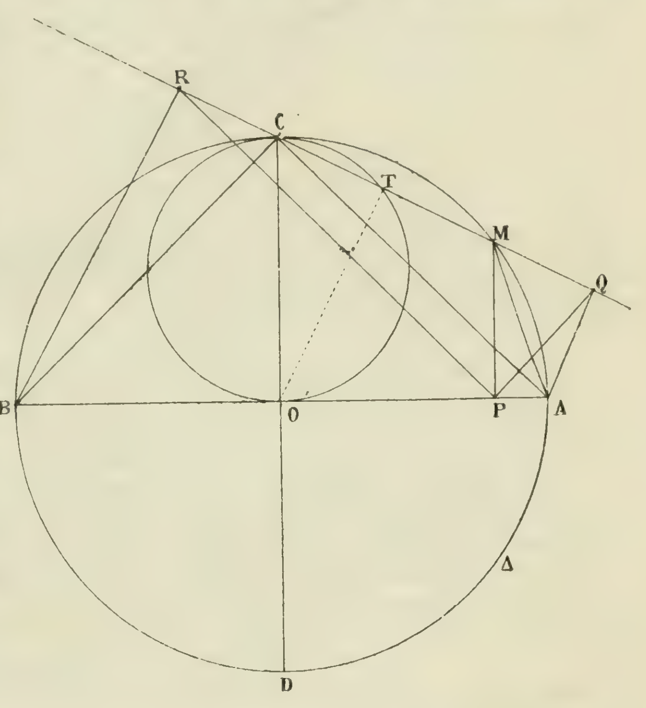
$$\beta x' = (\alpha + \beta)x - \alpha y,$$
$$\beta y' = (\alpha + 2\beta)x - (\alpha + \beta)y.$$

(A suivre.)

QUESTION 143

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

On considère un cercle Δ et deux diamètres rectangulaires AB *et* CD; *d'un point* M, *mobile sur* Δ, *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur* AB. *Par le point* P, *on mène des parallèles aux droites* CA *et* CB *et l'on joint* MC. *Cette droite* MC *rencontre les parallèles en question aux points* R *et* Q. *Trouver le lieu décrit par le milieu de* RQ. *Ce lieu est un cercle.*



Les deux angles APQ et AMQ sont tous deux égaux à 45°; donc le quadrilatère APMQ est inscriptible et par suite AQ est perpendiculaire sur CM.

On voit de même que BR est perpendiculaire sur CM. Si du point O on abaisse une perpendiculaire sur RQ, elle passe tout à la fois : 1° par le milieu de RQ parce que O est le milieu de AB, 2° par le milieu de CM parce que O est le centre du cercle qui passe par les points C et M. Ainsi le lieu cherché est le cercle décrit sur OC comme diamètre.

Nota. — Autres solutions par MM. Chapron; J.-B. Perrin, maître répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand; Vigarié; Mazeman, élève au lycée de Lille (classe de M. Lefebvre); A. Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL (*)

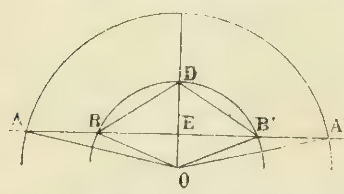
(SESSION DE JUILLET 1885)

MONTPELLIER

1° On donne un triangle ABC dont les côtés sont :

$AB = 3a \quad BC = 6a \quad CA = 5a.$

Trouver : 1° la médiane AD; 2° la distance de cette médiane à l'une des extrémités du côté BC; 3° cosinus BAC; 4° sinus BDA.



2° On donne deux circonférences concentriques (leurs rayons sont R et r) et une droite OD qui passe par le centre commun O. On propose de mener une sécante perpendiculaire à ABB'A' OD, de telle sorte que l'aire du triangle AOA soit dans un rapport donné m avec l'aire du quadrilatère OBDB'. On prendra pour inconnue la distance OE.

BORDEAUX

1° Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle, sachant que les trois arêtes issues d'un même sommet sont en progression arithmétique, que la surface totale est 208^{m},9, et que la somme des trois arêtes est 18 mètres.

2° On donne deux cercles qui se coupent, ainsi que leurs rayons R et r et la distance des centres d. On demande de calculer l'angle sous lequel on voit du centre du plus petit cercle la corde commune.

Application numérique: $R = 3256$, $r = 2460$, $d = 4245$.

3° Une droite rencontre la ligne de terre; trouver l'angle qu'elle fait avec cette ligne.

LYON

Première Série. — 1° Sur les côtés d'un angle droit AOB, on prend $OB = 1$, $OA = 2$. Mener par le point B dans le plan de cet angle un axe xy qui ne rencontre pas OA, de telle sorte que la figure tournant autour de xy, la somme des surfaces engendrées par les droites OA et OB soit égale à une quantité donnée S. Conditions de possibilité pour qu'il y ait deux solutions ou une seule.

Application numérique : $S = \frac{3}{11}$.

2° Les deux traces d'un plan sont, dans l'épure, dans le prolongement l'une de l'autre, et font avec la ligne de terre un angle de 60°. Trouver l'angle que le plan fait avec la ligne de terre.

(*) Énoncés communiqués par M. Monsallut, professeur au collège de Saint-Jean-d'Angély.

Deuxième série. — 1° Mesure de l'aire de la sphère.

2° Un ballon de forme sphérique a été gonflé avec 500^{mc} de gaz; calculer sa surface. — Une couche uniforme de verglas, de 1^{mm} d'épaisseur tombe sur l'hémisphère supérieur; quelle quantité de lest devra-t-on jeter pour conserver la même force ascensionnelle? (On prendra 0.9 pour la densité du verglas.)

Troisième série. — 1° Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un seul sommet.

2° Appliquer au cas d'un triangle équilatéral dont le côté est de 1 mètre, tournant autour d'un axe incliné à 45° sur l'un des côtés.

GRENOBLE

1° Etant donné un cube dont le côté est a, on demande la forme, le volume et la surface du polyèdre dont les sommets seraient les centres des six faces du cube.

2° Entre quelles limites doit être compris l'arc x (supposé plus petit que 180°) pour satisfaire à l'inégalité

$$\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} \geqq 0.$$

AIX

1° On donne les trois côtés d'un triangle. Calculer l'angle A et rendre la formule calculable par logarithmes.

2° On donne un plan par ses traces et un second plan défini par la ligne de terre et un point. Trouver leur intersection.

3° Décrire le phénomène de la précession des équinoxes. Exposer le déplacement de l'axe du monde, qui est la cause de ce phénomène.

BESANÇON

1° Calculer les angles d'un triangle dont on donne les trois côtés :

$$a = 33^{m},45, \quad b = 42^{m},89, \quad c = 43^{m},17;$$

2° Etablir comment on détermine l'intersection d'une droite et d'une sphère données par leurs projections.

QUESTIONS PROPOSÉES

210. — A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne.

1° Démontrer que l'expression

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{A}{4} + \operatorname{cotg}\frac{A}{4}\right) - \operatorname{cotg}\frac{A}{4}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)$$

conserve la même valeur quand on effectue sur les lettres A, B, C une permutation circulaire.

2° Mettre sous une forme symétrique la valeur commune aux trois quantités que l'on peut ainsi former.

(Catalan.)

211. — Étant données deux circonférences O, O′, on mène les rayons OA, O′B qui se coupent en C sous un angle constant; on demande le lieu géométrique décrit par le milieu de AB. (*A. Fitz-Patrick.*)

212. — Démontrer qu'un triangle ABC a ses angles aigus ou qu'il possède un angle obtus suivant que la somme des carrés de ses trois côtés est plus petite ou plus grande que le double du carré du diamètre du cercle circonscrit; et réciproquement. (*G. L.*)

ERRATA (*)

Page	ligne	*Au lieu de :*	*Lisez :*
7	11	segment C,	segment CD.
14	dern. ligne	prolongeons AD,	prolongeons CD.
15	1	triangle BCD,	triangle BCA.
15	3	BC,	BD.
22	20	$3,3 = 0^{mq},01$,	$\pi a^2 = 0^{mq},01$.
»	26	arête AB,	arête AS.
»	27	avec AB.	avec AB et AC.
»	32	arête AC,	arête AS.
37	5 en remont.	fig. 8.	fig. 7.
44	6	déterminons,	déterminer.
»	1 en remont.	$\sqrt{2}$ en dénominateur,	$2\sqrt{2}$.
45	8 en remont.	*symétrique de A par rapport au point* D,	*point d'intersection avec* AD *de la perpendiculaire menée* [*par* C *sur* AC.
»	3, 6, 7, 9,	c en dénominateur,	$c\sqrt{2}$.
46	6 en remont.	COD, APC,	COE, BQC.
65	3	x^q,	x^p.
70	25	somme,	différence.

(*) Ces divers errata nous ont été signalés par M. Béla, au Collège de Beauvais.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7792 6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Ed. Guillet,** professeur au lycée d'Avignon

(*Suite*, voir p. 73).

Angle d'incidence au point B''. — En appelant v_{x_2} et v_{y_2} les projections horizontale et verticale de la vitesse en B'', nous aurons :

$$v_{x_2} = v_1 \sin(\alpha + \alpha'),$$
$$v_{y_2} = v_1 \cos(\alpha + \alpha') - gt_2.$$

Or nous connaissons v_1, $\sin(\alpha + \alpha')$ et t_2 et l'on a

$$\cos(\alpha + \alpha') = \cos\alpha \cos\alpha' - \sin\alpha \sin\alpha',$$

c'est-à-dire

$$\cos(\alpha + \alpha') = \frac{1 - 4\sin^2\alpha}{\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha}}.$$

On aura donc

$$\left.\begin{aligned} v_{x_2} &= 4 v_0 \sin\alpha \cos\alpha \\ v_{y_2} &= -v_0 [1 + 4\sin^2\alpha] \end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

On pourra remarquer, comme en B', que v_{y_2} est négatif.

Si nous désignons par φ' l'angle T'B''H'', nous aurons

$$\operatorname{tg}\varphi' = -\frac{v_{y_2}}{v_{x_2}},$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{1 + 4\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Soit encore α'', l'angle N''B''T' de la tangente en B'' avec la normale au plan incliné au même point; on a

$$\alpha'' = \frac{\pi}{2} - (\varphi' - \alpha),$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \operatorname{cotg}(\varphi' - \alpha),$$

mais

$$\operatorname{cotg}(\varphi' - \alpha) = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\alpha}.$$

On a donc :

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{1 + \dfrac{1 + 4 \sin^2 \alpha}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \times \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\dfrac{1 + 4 \sin^2 \alpha}{4 \sin \alpha \cos \alpha} - \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}},$$

et enfin

$$\operatorname{tg} \alpha'' = 5 \operatorname{tg} \alpha. \qquad (36)$$

Loi de progression des angles d'incidence. — La formule précédente peut s'écrire

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \operatorname{tg} \alpha' + 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Or, en passant du point B″ au point suivant d'incidence B‴, les mêmes phénomènes se reproduisent évidemment avec cette seule différence que l'angle α' est remplacé par α'' et l'angle α''' remplace α'', de sorte qu'on a encore

$$\operatorname{tg} \alpha''' = \operatorname{tg} \alpha'' + \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha''' = 7 \operatorname{tg} \alpha.$$

On aurait de même

$$\operatorname{tg} \alpha'''' = 9 \operatorname{tg} \alpha$$

et en général

$$\operatorname{tg} \alpha_n = (2n + 1) \operatorname{tg} \alpha. \qquad (37)$$

On voit ainsi que les tangentes des angles d'incidence suivent la loi de progression des nombres impairs.

Si n augmente indéfiniment, $\operatorname{tg} \alpha_n$ augmente aussi indéfiniment, de sorte que α_n a pour limite $\frac{\pi}{2}$ quand n tend vers l'infini La sphère finira donc par rouler sur le plan incliné, mais seulement après un nombre infini de bonds.

Vitesse v_2 *du mobile en* B″. — On a

$$v_2^2 = v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2.$$

Or les formules (35) donnent

$$v_{x_2}^2 = 16 v_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$v_{y_2}^2 = v_0^2 [1 + 4 \sin^2 \alpha]^2 ;$$

donc

$$v_2^2 = v_0^2 [1 + 24 \sin^2 \alpha]. \qquad (38)$$

Si l'on appelle h'' la hauteur de chute capable de donner à un corps pesant la vitesse v_2, on aura

$$v_2^2 = 2gh''.$$

D'autre part

$$v_0^2 = 2gh;$$

donc

$$h'' = h[1 + 24 \sin^2 \alpha]. \qquad (39)$$

Détermination du sommet S' de la deuxième parabole. — Si nous exprimons que l'équation

$$\frac{gx^2}{2v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha')} - x \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha') - (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha + y = 0 \quad (25)$$

a deux racines égales en x, la racine commune sera l'abscisse du sommet S'.

On a ainsi

$$x = \frac{v_1^2 \sin^2(\alpha + \alpha') \operatorname{cotg}(\alpha + \alpha')}{g}$$

ou

$$x = h' \sin 2(\alpha + \alpha'); \qquad (40)$$

on a aussi

$$y = (a - x_1) \operatorname{tg} \alpha + h' \cos^2 2(\alpha + \alpha'). \qquad (41)$$

Le sommet S' est ainsi déterminé par ses deux coordonnées et la hauteur E'S' du sommet S' au-dessus de l'horizontale B'E' est

$$E'S' = h' \cos^2 2(\alpha + \alpha'), \qquad (42)$$

Amplitude du troisième bond. — En désignant par A'' la troisième amplitude, il sera inutile de recommencer les calculs ; tout se passe comme dans le deuxième bond et il suffira dans la formule

$$A' = 4h' \sin(\alpha + \alpha') \frac{\cos \alpha'}{\cos^2 \alpha},$$

déduite de la relation (28), de remplacer

$$A' \text{ par } A'', \quad h' \text{ par } h'', \quad \text{et} \quad \alpha' \text{ par } \alpha'';$$

ce qui donne

$$A'' = 4h'' \sin(\alpha + \alpha'') \frac{\cos \alpha''}{\cos^2 \alpha}.$$

Or

$$\sin(\alpha + \alpha'') \cos \alpha'' = \sin \alpha \cos^2 \alpha'' + \cos \alpha \sin \alpha'' \cos \alpha'';$$

de plus, de la formule

$$\operatorname{tg} \alpha'' = 5 \operatorname{tg} \alpha$$

on déduit

$$\sin \alpha'' = \frac{5 \sin \alpha}{\sqrt{1 + 24 \sin^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha'' = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + 24 \sin^2 \alpha}};$$

donc

$$\sin \alpha \cos^2 \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha'' \cos \alpha'' = \frac{6 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{1 + 24 \sin^2 \alpha}.$$

D'autre part, on a trouvé

$$h'' = h(1 + 24 \sin^2 \alpha).$$

On a donc enfin

$$A'' = 24h \sin \alpha. \qquad (43)$$

Loi de progression des amplitudes. — La comparaison des formules (43) et (14) montre que

$$A'' = 3A.$$

Nous avons eu déjà

$$A' = 2A.$$

La loi se manifeste par ces trois premiers résultats et il est facile d'établir qu'on aura de même

$$A_{n-1} = nA,$$

A_{n-1} représentant l'amplitude de la n^e branche parabolique.

Nous avons eu, en effet :

$$A'' = \frac{4h'' \sin (\alpha + \alpha'') \cos \alpha''}{\cos^2 \alpha},$$

et, pour la n^e parabole, h'' sera remplacé par h_{n-1} et α'' par α_{n-1}. On aura donc

$$A_{n-1} = \frac{4h_{n-1} \sin (\alpha + \alpha_{n-1}) \cos \alpha_{n-1}}{\cos^2 \alpha}.$$

Or,

$$\sin (\alpha + \alpha_{n-1}) \cos \alpha_{n-1} = \sin \alpha \cos^2 \alpha_{n-1} + \cos \alpha \sin \alpha_{n-1} \cos \alpha_{n-1}$$

d'ailleurs,

$$\operatorname{tg} \alpha_{n-1} = (2n - 1) \operatorname{tg} \alpha;$$

d'où

$$\sin \alpha_{n-1} = \frac{(2n - 1) \sin \alpha}{\sqrt{1 + 4(n - 1) n \sin \alpha^2}},$$

$$\cos \alpha_{n-1} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + 4(n - 1) n \sin^2 \alpha}};$$

donc

$$\sin(\alpha + \alpha_{n-1}) \cos \alpha_{n-1} = \frac{2n \sin \alpha \cos^2 \alpha}{1 + 4(n-1) n \sin^2 \alpha}.$$

D'autre part

$$h_{n-1} = h[1 + 4(n-1) n \sin^2 \alpha].$$

On a donc enfin

$$A_{n-1} = n \times 8h \sin \alpha,$$

c'est-à-dire

$$A_{n-1} = nA. \qquad (44)$$

(A suivre.)

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey** (*).

(*Suite*, voir p. 79.)

13. — L'omniformule est vraie pour les volumes décrits par ABC, CBD, ABDC exécutant une révolution complète ou une portion de révolution autour de XX′, car ils sont la différence des volumes engendrés par BA*ab*, BC*ab*, etc., auxquels l'omniformule s'applique. Il est important de remarquer que XX′ passe par les centres O, O′ O″ des arcs AB, BC, CD : car si cela n'avait pas lieu, la proposition ne serait pas exacte (*fig. 7*).

14. Théorème. — *Deux volumes* V, v, *coupés constamment par des plans parallèles suivant des sections dans le rapport constant* K, *sont aussi dans le rapport* K.

On démontre le théorème exactement comme celui relatif à l'équivalence en volume de deux pyramides ayant la même hauteur et des bases équivalentes.

(*) Une erreur s'est glissée dans notre précédent article : (p. 94, l. en remontant), au lieu de

$$V = \frac{FE}{6} \pi(\overline{AE}^2 + \overline{CF}^2 + 4\overline{DG}^2 - 4\overline{HG}^2),$$

il faut lire

$$V = \frac{FE}{6} \pi(\overline{AE}^2 + \overline{CF}^2 + 4\overline{DG}^2 - 4\overline{HG}^2 + 4\overline{HG}^2).$$

15. — *Volume limité par des fuseaux cylindriques circonscrits à un segment sphérique à bases parallèles et par les plans de ces bases (fig. 8).*

Tout plan parallèle aux bases qui coupe le volume (ACDE... A'C'D'E') et le segment sphérique, y détermine deux sections : l'une semblable à la base ACDE... du volume, l'autre qui est le cercle inscrit dans la première section. Le rapport de ces deux sections est donc constant et égal à $\frac{\text{ACDE}\ldots}{\text{cercle } O_1 I}$; par suite l'omniformule, s'appliquant au segment sphérique, s'applique en vertu du théorème précédent au volume dont nous nous occupons.

L'omniformule présente ici la particularité que son expression réduite ne contient pas π.

16. — *Volume précédent dont la base inférieure* B *passe par le centre de l'hémisphère et dont la base supérieure* b *est nulle (fig. 9.)*

Des volumes de cette nature sont par exemple ceux qui recouvrent des voûtes en arc de cloître en plein cintre.

Si r est le rayon de l'hémisphère, l'omniformule réduite donne

$$V = \frac{2}{3} Br \cdot$$

Si B est un carré,

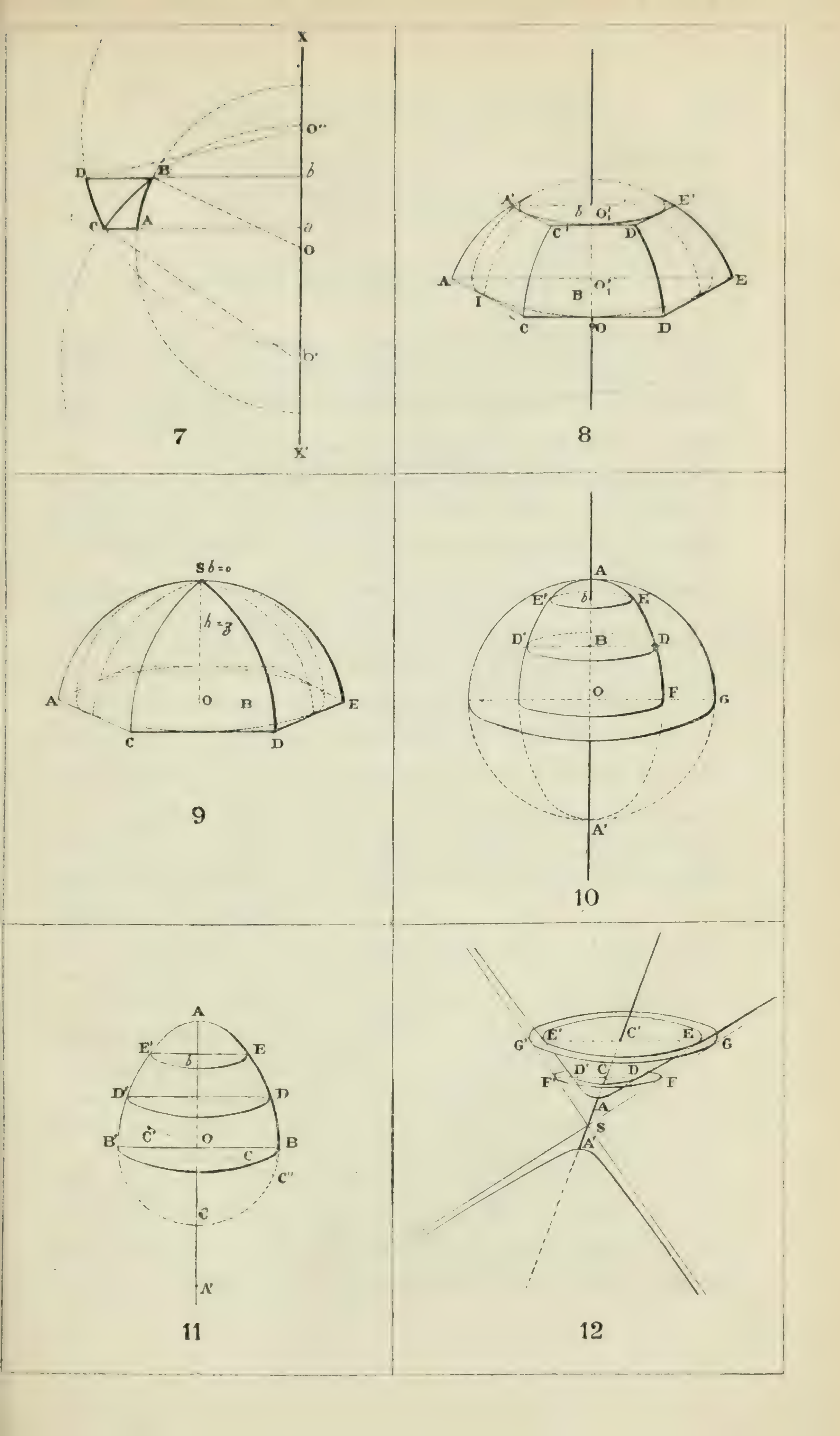
$$V = \frac{8r^3}{3} \cdot$$

Si B est l'aire d'un polygone régulier dont le nombre des côtés double indéfiniment, l'omniformule donne naturellement à la limite

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot$$

17. — *Volume limité par deux plans parallèles et des surfaces réglées se raccordant suivant des droites.*

Un pareil volume étant la limite de volumes spécifiés paragraphe 9, l'omniformule lui est applicable.


X
O''
D
B
b
C
A
a
O
b'
7
X'
A'
b
O'
E'
C
D
A
O'1
E
I
B
C
O
D
8
S b=o
h=z
A
O
B
E
C
D
9
A
E'
b
E
D'
B
D
O
F
G
A'
10
A
E'
E
b
D'
D
B'
C'
O
B
C
C''
C
A'
11
G'
E'
C'
E
G
D'
C
D
F'
F
A
S
A'
12

18. Corollaire. — Comme volume de la famille spécifiée dans le paragraphe précédent, nous citerons :

1° Les segments à bases elliptiques parallèles. d'hyperboloïde à une nappe ;

2° Les segments à bases parallèles limités par une surface conoïde fermée ;

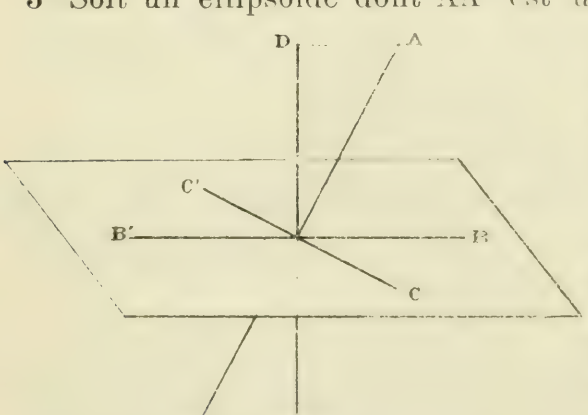
3° Les segments à bases parallèles limités latéralement par des surfaces planes, hyperboloïdales, paraboloïdales hyperboloïdales, conoïdales se raccordant suivant des droites.

19. — *Segments ellipsoïdaux à bases parallèles.*

1° Le segment DD'EE', déterminé dans un ellipsoïde de révolution par deux plans perpendiculaires à l'axe est au segment sphérique correspondant de la sphère OA dans le rapport $\frac{\mathrm{OF}^2}{\mathrm{OG}^2}$: car les sections faites dans les deux volumes par un plan parallèle aux bases, sont dans ce rapport *(fig. 10)*.

2° Le segment DD'EE', déterminé dans l'ellipsoïde à trois axes inégaux (AA'BB'CC') par deux plans perpendiculaires à AA', est au segment correspondant de l'ellipsoïde de révolution (AA'OBOC'') dans le rapport $\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OC''}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}$: car les sections faites dans les deux volumes par un plan parallèle aux bases, sont dans ce rapport *(fig. 11)*.

3° Soit un ellipsoïde dont AA' est un diamètre et dans lequel (BB', CC') sont les axes de la section diamétrale conjuguée.



Soit DD' la projection orthogonale de AA' sur la perpendiculaire au plan BOC menée en O.

Les sections déterminées dans les deux ellipsoïdes (AA', BB', CC'), (DD', BB' CC') par un plan parallèle à BOC sont égales ; donc deux segments compris

dans les deux ellipsoïdes par deux plans parallèles à BOC, seront des volumes équivalents

De ce qui précède, il résulte que l'omniformule, vraie pour le segment sphérique à bases parallèles, est également vraie *dans tous les cas* pour le segment ellipsoïdal à bases parallèles.

20. — *Segment à bases parallèles de paraboloïde elliptique.*

21. — *Segment* V *à bases elliptiques parallèles de l'hyperboloïde à deux nappes (fig. 12).*

Soient AA′ le diamètre conjugué des bases du segment DD′EE′, SGG′ le cône asymptote et FF′GG′ le tronc de ce cône correspondant au segment.

Les plans parallèles aux bases du segment coupent le volume v compris entre l'hyperboloïde et le cône asymptote suivant des couronnes elliptiques EG, E′G′ et DF, D′F′ de même aire (voir § 28, note 2); donc v est mesurable par l'omniformule comme le serait un cylindre, et par suite l'omniformule s'applique au segment V qui nous occupe; donc le volume est la différence du volume du tronc de cône correspondant et du volume v.

22. — *Volume* V *limité par des plans parallèles et par des fuseaux cylindriques circonscrits à un segment* v *d'ellipsoïde de paraboloïde elliptique ou d'hyperboloïde à bases elliptiques situées dans les plans limitant* V.

Le volume V et le segment correspondant v sont coupés par des plans parallèles aux bases suivant des polygones semblables dans un rapport constant avec les ellipses inscrites correspondantes suivant lesquelles v est coupé (ellipses qui sont semblables entre elles).

Par suite l'omniformule étant vraie pour v, sera vraie pour V.

Comme exemple de ces volumes, on peut signaler ceux qui recouvrent différentes voûtes en arc de cloître.

(A suivre.)

THÉORÈMES

SUR LES INTERSECTIONS D'UN CERCLE ET D'UN TRIANGLE D'APRÈS M. H. M. TAYLOR, M. A.

Par **Émile Vigarié**, élève de l'École des Mines.

Dans un travail publié dans les comptes rendus de la Société Mathématique de Londres (*), M. H. M. Taylor a donné plusieurs théorèmes importants que nous allons faire connaître et dont nous déduirons des propriétés pour les cercles de Tucker, Lemoine, Neuberg, Taylor, M'Cay, ... que nous étudierons prochainement.

Si un triangle $\alpha\beta\gamma$ est inscrit dans un triangle donné ABC et si le cercle circonscrit à $\alpha\beta\gamma$ coupe les côtés BC, CA, AB en α', β', γ', nous allons montrer que le triangle $\alpha\beta\gamma$ restant semblable à lui-même :

1° Les angles du triangles $\alpha'\beta'\gamma'$ sont déterminés ;

2° Les droites $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ conservent la même direction ;

3° Si les droites $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha\beta'$ forment un triangle $A'B'C'$ et si les droites $\gamma\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$ forment un second triangle $A''B''C''$, les triangles ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ sont homologiques, leur centre d'homologie est un point fixe o;

4° Le rapport des rayons des cercles ABC, $\alpha\beta\gamma$ est proportionnel au sinus de l'angle formé par un des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ avec une droite fixe ;

5° Le lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$ est une ligne droite ;

6° L'enveloppe de chacun des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ est une parabole qui touche deux côtés du triangle ABC;

7° Le cercle $\alpha\beta\gamma$ enveloppe une conique dont le centre est

(*) Ce mémoire a pour titre : « *The relations of the intersections of a circle with a triangle,* par M. H. M. Taylor, M. A. Extrait des *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XV, n°s 222, 223 (14 février 1884). Nous devons sa connaissance à M. Taylor, qui nous en a gracieusement envoyé deux exemplaires.

au centre du cercle minimum $\alpha\beta\gamma$ et dont un des axes est dirigé suivant la droite, lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$.

1. — *Les angles du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ sont déterminés.*

Supposons que les six points α, β, γ, α', β', γ' sont sur les côtés du triangle. Dans ce cas, on a entre les angles les relations

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \alpha' = B + C \\ \beta + \beta' = A + C \\ \gamma + \gamma' = A + B\end{array}\right\}. \qquad (1)$$

En effet on a :

$$\beta = \widehat{\alpha\beta\gamma} = \pi - \widehat{\alpha\alpha'\gamma} = \widehat{\beta\alpha'\gamma},$$
$$\beta' = \widehat{\alpha'\beta'\gamma'} = \pi - \widehat{\alpha'\gamma\gamma'} = \widehat{\beta\gamma\alpha'},$$
$$\beta + \beta' = \widehat{\beta\alpha'\gamma} + \widehat{\beta\gamma\alpha'} = \pi - B = A + C;$$

on prouverait de même que $\alpha + \alpha' = B + C$ et $\gamma + \gamma' = A + B$.

Les relations (1) ont lieu quelle que soit la position du triangle $\alpha\beta\gamma$, excepté cependant dans un cas, celui où l'un des sommets, α par exemple, est sur BC et les deux autres β, γ sur les prolongements de AB, AC au delà de B et C. On démontre que dans ce cas on a

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \alpha' = \pi + A \\ \beta + \beta' = B \\ \gamma + \gamma' = C\end{array}\right\}. \qquad (2)$$

2. — *Les droites $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ conservent la même direction.*

En effet, il est facile de voir que les inclinaisons d'un côté, $\alpha\beta$ par exemple, sur CA, CB sont respectivement γ, γ'.

3. — *Les triangles* ABC, A'B'C', A''B''C'' *sont homologiques, et ont pour centre d'homologie un point fixe* o.

Appliquons le théorème de Pascal à l'hexagone $\alpha'\alpha\beta'\beta\gamma'\gamma$; nous voyons que les couples de droites ($\alpha'\alpha$, $\beta\gamma'$), ($\beta'\beta$, $\gamma\alpha'$), ($\gamma'\gamma$, $\alpha\beta'$) se coupent sur une droite, c'est-à-dire que les côtés (BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B') des triangles ABC, A'B'C' se coupent sur une droite; donc ces triangles sont homologiques.

En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ on voit que les deux triangles ABC, A''B''C'' sont homologiques.

Le même théorème appliqué une troisième fois à l'hexagone $\beta'\beta\alpha'\gamma\gamma'\alpha$ montre que $AA''A'$ est une droite, de même pour $BB''B'$, $CC''C'$; donc les trois droites passent par un point o.

Il est évident que les droites $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha\beta'$, restent parallèles à elles-mêmes quand $\alpha\beta\gamma$ reste semblable à lui-même; de même pour $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$; donc puisque les droites $\gamma'\beta$, $\gamma'A''$, $\beta A''$ conservent la même direction, les droites $AA''A'$, $BB''B'$, $CC''C'$ sont fixes et le centre d'homologie o est par suite fixe.

4. — *Le rapport des rayons des cercles* ABC, $\alpha\beta\gamma$ *est proportionnel au sinus de l'angle formé par un des côtés du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *sur une droite fixe.*

La figure étant déterminée quand trois des six points sont déterminés, il est clair que nous pouvons exprimer chaque angle et chaque ligne de la figure en fonction des angles du triangle ABC, des angles du triangle $\alpha\beta\gamma$ et de l'angle que fait un des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ avec un côté de ABC.

Posons, par exemple, $\widehat{\beta\alpha\gamma} = \theta$.

Les angles des côtés de $\alpha\beta\gamma$ avec les côtés de ABC seront les suivants :

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{B\gamma\alpha} = A + C - \theta \\ \widehat{C\alpha\beta} = B + \gamma - \theta \\ \widehat{A\beta\gamma} = C + \gamma - \theta\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\widehat{A\gamma\beta} = B - \gamma + \theta \\ \widehat{C\beta\alpha} = \alpha - C + \theta \\ \widehat{B\alpha\gamma} = \theta\end{array}\right.$$

Nous pouvons maintenant établir la relation qui existe entre l'angle θ et le rayon r du cercle circonscrit à $\alpha\beta\gamma$ dont les angles sont connus. Soit R le rayon du cercle circonscrit à ABC; on a :

$$B\alpha = \gamma\alpha \frac{\sin \widehat{B\gamma\alpha}}{\sin \widehat{\gamma B\alpha}} = \gamma\alpha \frac{\sin (A + C - \theta)}{\sin B},$$

$$C\alpha = \beta\alpha \frac{\sin \widehat{C\beta\alpha}}{\sin \widehat{\beta C\alpha}} = \beta\alpha \frac{\sin (\alpha - C + \theta)}{\sin C},$$

et
$$B\alpha + C\alpha = BC = a = 2R \sin A.$$

Si dans cette dernière égalité nous remplaçons $B\alpha$, $C\alpha$ par leurs valeurs, en tenant compte des relations

$$\gamma\alpha = 2r \sin \beta, \qquad \beta\alpha = 2r \sin \gamma,$$

on a

$$2r \sin\beta \frac{\sin(A + C - \theta)}{\sin B} + 2r \sin\gamma \frac{\sin(\alpha - C + \theta)}{\sin C}$$
$$= 2R \sin A$$

ou
$$\frac{R}{r} = \frac{\sin\beta \sin(B + \theta)}{\sin A \sin B} + \frac{\sin\gamma \sin(\alpha - C + \theta)}{\sin A \sin C}$$
$$= L \sin(\psi + \theta), \qquad (3)$$

formule dans laquelle

$$L \sin\psi = \frac{\sin\beta}{\sin A} + \frac{\sin\gamma \sin(\alpha - C)}{\sin A \sin C},$$

$$L \cos\psi = \frac{\sin\beta}{\sin A} \operatorname{cotg} B + \frac{\sin\gamma \cos(\alpha - C)}{\sin A \sin C}.$$

On peut donner à la valeur de L une forme contenant symétriquement A et α, B et β, C et γ. Cette valeur est la suivante :

$$L^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = \sin^2\alpha \cos A \sin B \sin C$$
$$+ \sin^2\beta \sin A \cos B \sin C$$
$$+ \sin^2\gamma \sin A \sin B \cos C$$
$$+ 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin A \sin B \sin C.$$

(A suivre.)

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE *p*. (*)

Par M. **G. de Longchamps.**

---

1. Définition des points réciproques d'ordre *p*. — Imaginons deux points M, M′ dont les coordonnées barycentriques, relativement au triangle de référence ABC, sont, respectivement, α, β, γ ; α', β', γ' ; et supposons que ces coordonnées vérifient les égalités

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^p} = \frac{\beta\beta'}{b^p} = \frac{\gamma\gamma'}{c^p}, \qquad \text{(A)}$$

formules dans lesquelles p désigne un nombre entier, positif ou négatif; nous dirons que ces points M et M_p ainsi liés l'un à l'autre *sont réciproques et d'ordre* p.

(*) Pour plus de rapidité et de commodité, j'emploie dans cette note l'idée des coordonnées barycentriques ; mais on peut rendre cette exposition absolument élémentaire en remplaçant α par l'aire du triangle MBC, etc.

La réciprocité des points M et M_p est évidente et résulte de la symétrie des formules (A) ; il va sans dire que, dans ces formules, *a*, *b*, *c* désignent les longueurs des côtés du triangle.

Nous nous proposons d'indiquer ici comment on peut construire, de proche en proche, les points réciproques de différents ordres : nous entrerons aussi, à propos de ces points, dans quelques réflexions générales sur les points et sur les droites qui, placés dans le plan d'un triangle, lui sont associés d'après une loi géométrique simple.

2. Points réciproques proprement dits. — Dans le cas particulier où l'on suppose $p = 0$, les formules (A) deviennent

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' ;$$

les points qui correspondent à ces égalités sont ceux que nous avons particulièrement étudiés et que nous avons nommés *points réciproques*. Nous conserverons cette dénomination et quand il nous arrivera d'employer cette expression, sans spécifier l'ordre *p* des points réciproques considérés, il sera donc entendu que nous voulons parler des points réciproques de l'ordre zéro. Nous convenons aussi de représenter ces deux points par les lettres M et M_0.

On sait comment on construit ces points réciproques ; on joint AM, cette droite rencontre BC en μ et l'on prend le point μ' isotomique de μ (*) ; la droite $A\mu'$ et les deux autres droites analogues concourent au point réciproque M_0.

3. Points réciproques du colonel Mathieu, ou points inverses. — Les points réciproques du deuxième ordre ont fait autrefois l'objet d'une étude remarquable (**) ; ce sont les *points inverses* du colonel Mathieu.

(*) C'est-à-dire symétrique de μ par rapport au milieu de BC.

(**) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1865. — Ces points ont été aussi appelés *points conjugués isogonaux* par M. Neuberg. Dans notre manière de voir, ces points rentrent dans la famille des points réciproques ; mais pour les distinguer des autres, et vu leurs propriétés remarquables, on peut, croyons-nous, leur conserver le nom qui leur a été donné par celui qui les a imaginés le premier.

Nous rappelons seulement que les points inverses se correspondent par la loi géométrique suivante :

Soit M_1 un point donné dans le plan d'un triangle ABC ; la droite symétrique de AM_1 par rapport à la bissectrice de l'angle formé par les semi-droites AB, AC d'une part, et les deux autres droites analogues d'autre part, se coupent en un point M_2. Les deux points M_1, M_2 associés de cette façon sont les points inverses du colonel Mathieu ou, dans le système de correspondance plus général que nous imaginons ici, les points réciproques du deuxième ordre.

4. Points réciproques du premier ordre. — Entre les points réciproques proprement dits et les points inverses se placent tout naturellement les points réciproques du premier ordre M, M_1, dont les coordonnées barycentriques vérifient les égalités :

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a} = \frac{\beta\beta_1}{b} = \frac{\gamma\gamma_1}{c}.$$

A ces formules correspond une transformation des figures qui ne paraît pas encore avoir été étudiée et que d'ailleurs nous ne voulons pas aborder, du moins en ce moment. Nous nous proposons seulement d'indiquer une construction géométrique permettant de trouver le point M_1, point réciproque du premier ordre, correspondant à un point donné M.

Lorsque nous aurons comblé, comme on va le voir, cette lacune qui existait entre le principe de la transformation du colonel Mathieu et celui de notre transformation par points réciproques, il sera donc acquis que les points réciproques d'ordre 0, 1, ou 2, se déduisent du point donné par des constructions connues et simples. Nous avons rappelé tout à l'heure celles qui donnent les points réciproques d'ordre 0 et 2 ; mais il nous reste à montrer comment, d'un point donné M, on déduit le correspondant réciproque du premier ordre M_1.

5. Construction des points réciproques du premier ordre. — Considérons le triangle ABC et, sur les directions BA, CA, prenons $BP = CQ = \lambda$; nous ferons d'abord

observer que le cercle APQ passe par un second point fixe situé sur le cercle circonscrit à ABC et sur la bissectrice extérieure de l'angle A.

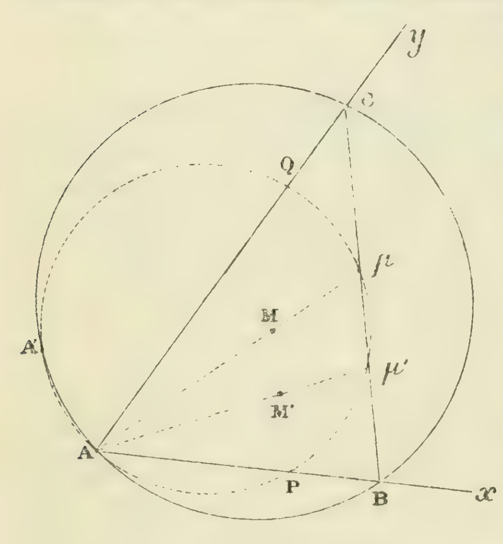
En effet, prenons AB et AC pour axes de coordonnées : l'équation du cercle APQ est

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos A - (c - \lambda)\, x - (b - \lambda)\, y = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos A - cx - by + \lambda\, (x + y) = 0.$$

Sous cette forme, nous reconnaissons immédiatement que APQ passe, abstraction faite de A, par un autre point fixe A′ appartenant au cercle circonscrit ABC et à la bissectrice extérieure de l'angle A.



Cette remarque étant faite, prenons sur les droites $A\mu$, $A\mu'$ deux points quelconques M (α, β, γ) et M′ $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Nous avons

$$C\mu \,.\, C\mu' = CQ \,.\, b.$$

et

$$B\mu \,.\, B\mu' = BP \,.\, c,$$

d'où (puisque $CQ = BP$),

$$\frac{C\mu}{B\mu} \cdot \frac{C\mu'}{B\mu'} = \frac{b}{c}.$$

Mais

$$\frac{C\mu}{B\mu} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{C\mu'}{B\mu'} = \frac{\beta'}{\gamma'};$$

écrivons donc, finalement,

$$\frac{\beta\beta'}{b} = \frac{\gamma\gamma'}{c}.$$

En appliquant cette remarque aux trois sommets du triangle ABC, on voit comment, par le moyen de la circonférence $AA'\mu$ et des deux autres circonférences analogues, on pourra trouver le point M′, réciproque du premier ordre du point donné M.

Parmi les correspondances remarquables dans les points réciproques du premier ordre, nous citerons les suivantes :

1° Au centre de gravité

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

correspond le point

$$\frac{\alpha'}{a} = \frac{\beta'}{b} = \frac{\gamma'}{c},$$

c'est-à-dire le centre du cercle inscrit.

2° Au réciproque du centre du cercle inscrit

$$\alpha a = \beta b = \gamma c,$$

correspond le point

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2},$$

c'est-à-dire le point de Lemoine.

6. — Avant de quitter les points réciproques du premier ordre, je veux encore faire connaître, concernant ces points, une élégante construction qui m'a été communiquée par M. Neuberg.

Les notations précédentes étant conservées, prenons

$$A\mu_1 = B\mu, \qquad A\mu_2 = C\mu;$$

la droite qui joint A au milieu de $\mu_1\mu_2$ passe par M, réciproque du premier ordre de M.

En effet, nous avons

$$\frac{\mu_1 AR}{BA\mu'} = \frac{A\mu_1 . AR}{AB . A\mu'},$$

$$\frac{RA\mu_2}{\mu' AC} = \frac{AR . A\mu_2}{A\mu' . AC},$$

et, par suite,

$$\frac{\mu' AC}{\mu' AB} = \frac{A\mu_1 . AC}{A\mu_2 . AB} = \frac{B\mu}{C\mu} . \frac{AC}{AB},$$

ou

$$\frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\gamma}{\beta} . \frac{b}{c}$$

ou enfin

$$\frac{BB'}{b} = \frac{\gamma\gamma'}{c}.$$

En appliquant cette construction aux points B et C on obtient ainsi trois droites qui concourent au point cherché M'.

Nous pouvons aborder maintenant le problème que nous avions d'abord en vue et dans lequel nous nous proposions la construction du point réciproque d'un ordre quelconque, correspondant à un point donné.

(A suivre.)

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

(*Suite*, voir p. 91)

9. — *Résoudre l'équation*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}.$$

Pour éviter certaines longueurs, très relatives, dans le calcul proposé, on observera que cette équation peut s'écrire

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x},$$

ou

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{-a-b}{x(x+a+b)},$$

ou encore

$$(a+b)\{x^2+x(a+b)+ab\}=0.$$

Finalement l'équation proposée est donc

$$(a+b)(x+a)(x+b)=0.$$

Si l'on suppose $a+b=0$, l'équation est identique; au contraire, si l'on a $a+b\neq 0$, les racines sont $-a$ et $-b$.

Remarque. — Beaucoup d'équations du second degré peuvent se ramener à deux équations du premier degré quand on groupe les termes qui les constituent dans un certain ordre. Ainsi les équations

$$\frac{a}{x}+\frac{a-1}{x-1}=2,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{a-1}{x-1}=2.$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x + b - a} = 2,$$
$$\frac{x}{a} + \frac{b}{x + b - a} = 2.$$

se résolvent très simplement et sans avoir recours aux formules ordinaires, en observant que $x = a$ est, évidemment, une racine.

Soit encore l'équation

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

En l'écrivant sous la forme

$$\frac{1}{x - a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{x - b},$$

on met en évidence la racine $a + b$.

Ces artifices de calcul permettent aussi de résoudre certaines équations d'un degré supérieur au deuxième.

1° Ainsi, l'équation

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = 0.$$

(*Baccalauréat*, Paris, juillet 1882)

est du troisième degré, mais elle admet visiblement la racine $x = 0$. On met d'ailleurs cette racine en évidence, en écrivant le premier membre sous la forme

$$\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2x}{x^2 - 4} = 0.$$

2° Dans l'équation du troisième degré

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 3} = 0,$$

on met en évidence la racine $x = -\frac{3}{2}$ en associant : 1° les fractions extrêmes, et 2° les deux fractions intermédiaires.

3° Pour citer un dernier exemple de cette méthode qui consiste, comme l'on voit, à signaler *a priori* une solution évidente, considérons encore les équations

$$ax + by + cz = b + c,$$
$$bx + cy + az = c + a,$$
$$cx + ay + bz = a + b;$$

ces équations sont visiblement vérifiées par $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. Si le dénominateur Δ des inconnues n'est pas nul, ces équations ne comportant qu'une solution, elles se trouvent, par cela même, résolues sans calcul.

Si l'on veut poursuivre la discussion de ce système, on doit former Δ et l'on trouve

$$\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

La discussion du signe de Δ et, par suite, la détermination des valeurs de a, b, c pour lesquelles Δ passe par zéro, offrirait quelque difficulté si l'on n'observait pas que l'on a

$$\Delta \equiv (a + b + c)(ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2),$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \equiv \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - a)^2.$$

Cette méthode de *résolution instantanée*, si l'on peut dire, d'une équation donnée, convient particulièrement bien à certains exemples et elle nous paraît propre à développer cet esprit de combinaison qui trouve, dans le calcul algébrique, de si fréquentes applications.

Nous en donnerons un dernier exemple en prenant l'équation

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \qquad (1)$$

Il est évident que cette équation sera vérifiée si l'on assigne à x une valeur telle que chacune des fractions qui constituent le premier membre soit égale à l'une des fractions du second membre. Cela revient à dire que l'égalité

$$A + B = A' + B' \qquad (2)$$

est vérifiée si l'on a $A = A'$ et, en même temps, $B = B'$. Bien entendu, la réciproque n'est pas nécessaire.

En regardant attentivement l'égalité (1) on reconnaît alors que pour $x = a + b$, les conditions suffisantes que nous venons d'admettre pour (2) sont vérifiées pour (1). On a, ainsi, une des racines de l'équation proposée.

L'autre racine x'' s'obtient, sans calcul, en appliquant les principes bien connus relatifs aux relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation. On trouve alors

$$x'' = \frac{2ab}{a + b}.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

... Je vous dois des remerciements pour la publication de l'aimable et savante lettre du bien regretté Realis. Cependant, cette lettre appelle, me semble-t-il, quelques mots d'explication...j'allais dire : *de justification*. Il n'a jamais été dans ma pensée de vouloir une démonstration du beau théorème de Fermat au moyen de *simples identités*. Si mes souvenirs sont fidèles, voici comment les choses se sont passées.

Quand vous m'avez demandé une démonstration de ce théorème, je vous ai répondu : « Adressez-vous à Realis ; il est, en théorie des nombres, beaucoup plus compétent que moi » ; ou quelque chose d'approchant. Quant à la *nature* de cette démonstration, c'est, comme vous l'écrivait Realis, « une simplification à la démonstration donnée par Euler ».

En 1848, M. Hermite a donné, dans le *Journal de Liouville*, une démonstration très simple de ce premier lemme :

Tout nombre premier, de la forme $4K + 1$, *est la somme de deux carrés.*

Si le plus éminent des géomètres français pouvait en faire autant pour cette autre proposition :

Tout nombre premier, de la forme $4K - 1$, *est la somme de quatre carrés,*

votre désir, qui est aussi le mien, serait accompli. La démonstration exposée par Le Besgue est, de tout point, fort peu satisfaisante...

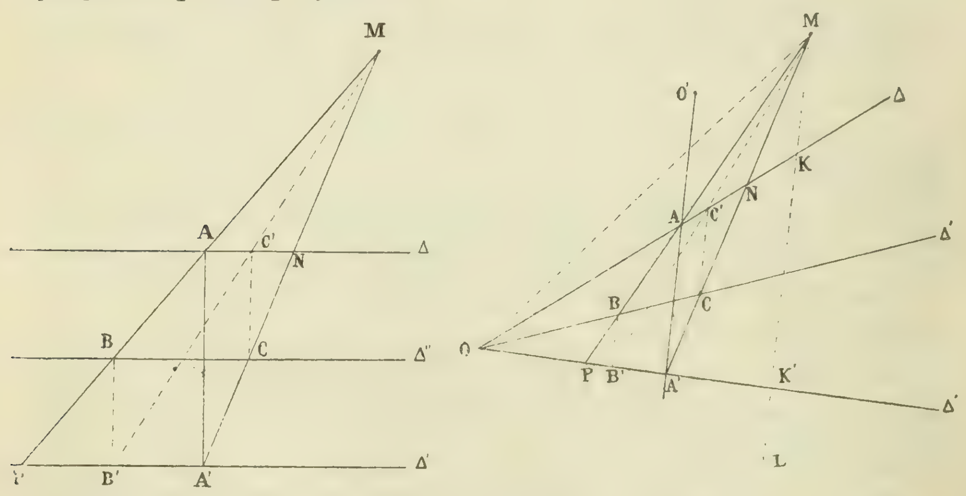
Nota. — Je ne crois pas que la notice que j'ai publiée sur Realis puisse prêter à la confusion contre laquelle proteste M. Catalan. La pensée de prendre pour la démonstration du théorème de Fermat le secours des identités est une idée que j'avais *personnellement* communiquée à Realis et qu'il a combattue dans la lettre qu'on a pu lire.

Peut-être la conclusion de cette lettre est-elle trop absolue et il me paraît difficile de borner, *à priori*, l'influence des identités dans cette partie de la théorie des nombres où l'on ne fait pas intervenir *la forme arithmétique* de ceux-ci, mais simplement, comme dans le théorème en question, la condition qu'ils sont entiers. G. L.

QUESTION 168

Solution par M. Delpirou (Lycée Janson de Sailly).

Soient Δ, Δ' *deux parallèles et* Δ'' *la parallèle équidistante; soit aussi* AA′ *une perpendiculaire commune à* Δ *et à* Δ'. *Ayant pris un point* M, *arbitrairement, dans le plan de ces droites,* MA *et* MA′ *rencontrent* Δ'', *respectivement, aux points* B *et* C. *On projette* B *en* B′ *sur* Δ'; *et* C *en* C′ *sur* Δ. *Démontrer que les trois points* C′, M, B′ *sont en ligne droite. — Généraliser cette propriété qui est projective.*



C étant le milieu de A′N, C′ est le milieu de AN.

D'autre part B étant au milieu de PA, B′ est milieu de PA′; donc MC′ passe par B′, puisque Δ et Δ' sont parallèles.

Supposons que Δ, Δ', Δ'' soient trois droites concourantes en O. Soit AA′ une sécante quelconque, et M le point considéré

du plan. Par M menons ML parallèle à AA′ et joignons MO. Par B et C menons BB′ et CC′ parallèles à AA′.

Considérons le faisceau O(MΔΔ″Δ′) coupé par les deux sécantes MP, MA′, on a

$$(MABP) = (MNCA')$$

mais d'autre part

$$(MABP) = (K'A'B'P)$$

et

$$(MNCA') = (KNC'A);$$

donc

$$(K'A'B'P) = (KNC'A),$$

ce qui exige que la droite B′C′ passe par le sommet M du faisceau M(KNC′A).

Remarque. — On serait arrivé au même résultat en projetant la première figure sur un plan quelconque et en prenant dans l'espace un centre de projection, ΔΔ′Δ″ seraient devenues trois droites concourantes et l'on aurait reproduit la deuxième figure.

Nota. — Cette généralisation n'est pas aussi complète que le comporte l'énoncé de la question proposée.

Il fallait observer d'abord que la propriété indiquée subsistait pour *trois parallèles quelconques* et pour une transversale oblique AA′; ce qui permet, en faisant la *projection conique* de la figure (sa perspective, si l'on préfère) de remplacer Δ, Δ′, Δ″ par *trois droites concourantes quelconques*; et les parallèles AA′, BB′, CC′ sont alors représentées sur la figure perspective par trois droites *concourantes*. En reproduisant la démonstration qu'on vient de lire, on vérifie la proposition suivante qui est la généralisation de la remarque élémentaire, tout à fait évidente, qui correspond à la première figure.

Étant données trois droites concourantes Δ, Δ′, Δ″ *et une transversale* O′AA′, *on joint* MA *qui rencontre* Δ″ *en* B, *puis* MA′ *qui coupe* Δ″ *en* C; *les droites* O′B *et* O′C *coupent* Δ *et* Δ′ *respectivement en des points* B′ *et* C′ *qui sont la ligne droite avec* M.

C'est ainsi qu'en partant des propriétés géométriques les plus simples et les plus évidentes, on arrive sans effort à découvrir d'autres propriétés beaucoup moins visibles et la démonstration de ces dernières constitue un exercice utile, lequel ne laisse pas, parfois, d'offrir quelques difficultés.

Dans les solutions que nous avons reçues, sauf dans celle de M. Chapron, la généralisation complète n'a pas été donnée. M. Chapron a bien fait la projection conique de la figure, mais il n'a pas cru devoir vérifier par une démonstration directe la propriété ainsi trouvée, et, dans notre pensée, c'était cette vérification même qui constituait tout l'intérêt de la question posée. G. L.

Nota. — Ont résolu (avec la restriction que nous venons de faire) cette question : MM. Chapron, à Bragelogne; G. Potier, lycée Henri IV (classe de M. Colas); Lavialle de Lameillère (id.); Garriau (id.); L. Prince et Bourdier, lycée de Grenoble; Anatole Chapelier, au lycée de Nancy.

QUESTIONS PROPOSÉES

213. — On considère deux cercles γ, γ' et sur leurs circonférences deux points A, A'; on propose de trouver sur l'axe radical Δ un point M tellement situé que les droites MA, MA' rencontrent les circonférences considérées en deux points B et B' tels que BB' soit perpendiculaire sur Δ.

(Bordage.)

214. — Lorsque quatre points A, B, C, D sont situés en ligne droite et dans l'ordre indiqué, ils déterminent six segments parmi lesquels deux (AC et BD) empiètent l'un sur l'autre.

Démontrer que si l'on fait abstraction de ces deux segments, et si les quatre points forment une division harmonique, les quatre autres segments jouissent de la propriété que l'inverse du plus petit est égal à la somme des inverses des trois autres. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9458-6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Éd. Guillet**, professeur au lycée d'Avignon

(*Suite*, voir p. 97).

MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE

Décrivons une circonférence sur AB comme diamètre; soit BN la normale au plan incliné en B, et BC la direction de la vitesse après le choc. Nous allons démontrer que l'horizontale LCS menée par le point C, où la vitesse de départ en B rencontre la circonférence, passe au sommet S de la première parabole.

En effet, le triangle rectangle BLC donne

$$BL = BC \cos 2\alpha,$$

et le triangle rectangle ABC donne à son tour

$$BC = h \cos 2\alpha.$$

On a donc

$$BL = h \cos^2 2\alpha.$$

Or la formule (21) nous a fourni

$$ES = h \cos^2 2\alpha.$$

Donc

$$BL = ES,$$

c'est-à-dire que l'horizontale du point C passe au sommet S.

Le lieu des foyers de toutes les paraboles décrites par un projectile lancé de B avec la vitesse initiale v_0 et sous des angles différents est, comme on sait et comme il est facile de le démontrer géométriquement, une circonférence décrite de B comme centre avec BA pour rayon. On aura donc, en particulier, le foyer F de la parabole BSB′ en prolongeant AC d'une quantité égale CF ; et la verticale DSFE sera l'axe de la parabole.

Cette construction montre en même temps que si l'on mène l'horizontale FI, on a

$$LI = LA$$

et, par conséquent, aussi

$$SF = SD.$$

Ce qui prouve que l'horizontale ADD′ est la directrice de la première parabole BSB′.

Pour trouver le point B′ où cette parabole rencontre BX, nous remarquerons que la tangente à la courbe parallèlement à BX a son point de contact sur le diamètre conjugué de cette droite BX; de sorte que si, par le point de contact de cette tangente, nous menons une parallèle à l'axe, elle coupera BX au milieu de BB′.

Pour mener la tangente à la parabole parallèlement à BX, supposons le problème résolu et abaissons du foyer F une perpendiculaire sur cette tangente ou sur sa parallèle BX. Cette perpendiculaire coupe la directrice en un point M, qui appartient au diamètre conjugué de la tangente. Il suffira donc de mener MP parallèle à AB pour avoir le milieu P de BB′ et, par suite, en prenant PB′ = PB, on aura le point B′.

Quant à la tangente en B′, on l'obtiendra en menant la bissectrice de l'angle K′B′F, formé par le rayon vecteur B′F et la parallèle à l'axe menée en B′.

Si l'on veut déduire de cette construction l'abscisse du sommet S ou du foyer F, on remarquera que, dans le triangle rectangle BFI, on a

$$BF = h \quad \text{et} \quad \widehat{FBA} = 4\alpha;$$

d'où

$$IF = h \sin 4\alpha;$$

c'est le résultat donné par la formule (19).

De même pour obtenir l'abscisse x_1 du point B′, nous remarquerons que

$$x_1 = 2AM.$$

Mais

$$AM = IF + DM.$$

Or

$$DM = DF \operatorname{tg} \alpha$$
$$DF = 2AL$$
$$AL = h \sin^2 2\alpha.$$

Donc

$$DM = 2h \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Par suite

$$x_1 = 2h \sin 4\alpha + 4h \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$x_1 = 4h \sin 2\alpha[\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha],$$

mais

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = 1;$$

on a donc enfin

$$x_1 = 4h \sin 2\alpha.$$

Et l'on retrouve ainsi la formule (11).

On retrouvera de même l'amplitude A en divisant x_1 par $\cos \alpha$, ce qui donne

$$A = 8h \sin \alpha.$$

Nous déterminerons tout aussi facilement, et de la même façon, tous les éléments de la deuxième parabole B'S'B'', pourvu que nous connaissions la hauteur de chute h' capable de donner la vitesse v_1, en même temps que la direction de cette vitesse après le choc.

Or, il est facile de mener B'C' telle que B'N' soit bissectrice de l'angle TB'C'.

Quant à h', nous avons trouvé :

$$h' = h[1 + 8 \sin^2 \alpha].$$

Or, si nous appelons K' le point de rencontre de la verticale en B' avec la directrice ADD' de la première parabole, nous voyons que

$$B'K' = B'U + AB.$$

Mais

$$B'U = x_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

c'est-à-dire

$$B'U = 4h \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$$
$$B'U = 8h \sin^2 \alpha.$$

On a donc

$$B'K' = h[1 + 8 \sin^2 \alpha],$$

c'est-à-dire

$$B'K' = h'.$$

On voit ainsi que la vitesse v_1 en B' est la même que si la sphère tombait librement en ce point de la même horizontale ADK' du point de départ A, et la deuxième parabole aura même directrice que la première.

On décrira donc encore une circonférence sur B'K' comme diamètre, et par le point C', où elle coupe B'C', on mènera la tangente C'S' au sommet de la deuxième parabole.

Le foyer F' se déterminera en prenant sur le prolongement de K'C' une longueur égale C'F'.

D'ailleurs ce foyer F' devra encore se trouver sur la circonférence FKF' décrite de B' comme centre avec B'K' pour rayon.

La connaissance du foyer F' et de la directrice ADD' détermine complètement la parabole, et l'on trouvera encore le point d'intersection B'' avec BX comme on a trouvé le point B'.

La figure montre comment nous avons déterminé les sommets S, S', S''..., les foyers F, F', F'' et les milieux P, P'... des amplitudes, ainsi que les tangentes en B, B', B''...

(A suivre.)

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey** (*).

(*Suite*, voir p. 101.)

23. Formule de Simpson. — La formule de Simpson

$$V = \frac{d}{3}(s_1 + 4s_2 + 2s_3 \ldots + 4s_{2n} + s_{n+1}),$$

n'est autre que l'omniformule dans laquelle on fait

$$h = 2d,$$

et elle mesure approximativement le volume, parce que ses sections de rang impair le décomposent en segments auxquels l'omniformule s'applique ou rigoureusement ou très approximativement; les sections doivent être assez rapprochées pour que leurs surfaces ne contiennent pas de ligne d'inflexion entre les sections de rang impair.

24. Démonstration analytique de l'omniformule. — Soient trois axes de coordonnées OX, OY, OZ; θ l'angle de

OZ avec le plan XOY et la surface s dont l'aire est exprimée par le polynôme $(A_0z^2 + A_1z + A_2)$ dans lequel A_0, A_1, A_2 sont des paramètres donnés.

La primitive de $A_0z^2 + A_1z + A_2$ est

$$\frac{A_0z^3}{3} + \frac{A_1z^2}{2} + A_2z + C,$$

C désignant une constante arbitraire.

Le volume V engendré par le déplacement de s quand z varie de $z = z_0$ à $z = z_1$ est donné par

$$V = \left[\frac{A_0}{3}(z_1^3 - z_0^3) + \frac{A_1}{2}(z_1^2 - z_0^2) + A_2(z_1 - z_0)\right] \sin\theta$$

ou, après la mise de $(z_1 - z_0)$ en facteur commun et les réductions faites convenablement, par

$$V = \frac{(z_1 - z_0)\sin\theta}{6} \times \left\{\begin{array}{l} A_0z_1^2 + A_1z_1 + A_2 = B \\ + A_0z_0^2 + A_1z_0 + A_2 = b \\ + 4\left(A_0\left(\frac{z_1 - z_0}{2}\right)^2 + A_1\left(\frac{z_1 - z_0}{2}\right) + A_2\right) \\ \qquad = 4B'. \end{array}\right.$$

Mais $(z_1 - z_0)\sin\theta$ est la hauteur du volume compris entre les bases parallèles B, b, dont B' est la section équivalente des bases; donc

$$V = \frac{h}{6}(B + b + 4B').$$

25. Corollaire très important. — L'omniformule s'applique à tout segment compris entre deux bases parallèles, limité latéralement par une surface de second ordre fermée, ou par des surfaces du second ordre donnant un contour latéral fermé et se raccordant suivant des droites ou des coniques.

26. Formule plus générale. — Soit l'aire s donnée par

$$s = A_0z^m + A_1z^{m-1} \ldots + A_{m-1}z + A_m.$$

En raisonnant comme dans le paragraphe précédent, on trouve que le volume engendré par s, quand z varie, depuis $z = z_0$ jusqu'à $z = z_1$, est donné par la formule

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{A_0}{m+1} (z_1{}^{m+1} - z_0{}^{m+1}) + \dfrac{A_1}{m} (z_1{}^m - z_0{}^m) \right. \\ \left. + \ldots + \dfrac{A^{m-1}}{2} (z_1^2 - z_0^2) + A_m (z_1 - z_0) \right] \\ \times \sin 0 \end{array} \right.$$

et pour $m = 2$ on retrouve l'omniformule.

Dans ce cas ($m = 2$) la formule est simple, rapide à appliquer, facile à démontrer élémentairement. Jointe à la formule de Guldin, elle suffit à l'ingénieur, à l'architecte, au constructeur, au mécanicien, etc.; elle condense un grand nombre des formules usuelles et permet de les retrouver facilement. C'est donc l'omniformule qui est importante, et non la formule plus générale, mais peu pratique, qui fait l'objet du présent paragraphe.

27. Remarque relative au tonneau. — C'est par erreur que M. Pujet, dans sa thèse citée dans la note que M. de Longchamps a placée au bas de la première page de ce travail. donne les tonneaux parmi les corps auxquels peut s'appliquer l'omniformule. Elle n'est pas applicable à la cubature des tonneaux; d'abord, parce que ceux-ci n'ont pas une forme géométrique bien définie. Si nous les considérons comme des sommes d'onglets limités par les plans des bases, les plans passant par l'axe et les joints des douves et les surfaces desdites douves, quelle forme attribuerons-nous à ces dernières surfaces?

Si on admet *approximativement* que le tonneau est un volume de révolution, le trapèze générateur est-il limité extérieurement par une chaînette, une parabole ou un arc de cercle?

Admettons cette dernière hypothèse, comme on le fait ordinairement. Alors le volume n'est pas un segment sphérique à bases parallèles, car le centre de l'arc de cercle n'est pas sur l'axe du tonneau. Dans le cas où nous sommes, le volume est engendré par un cercle variable S se mouvant parallèlement à lui-même, perpendiculairement à l'axe oz (axe du tonneau), mais on n'a pas l'équation

$$S = Az^2 + Bz + C.$$

équation nécessaire pour que l'omniformule s'applique; voir la démonstration analytique § (24).

On peut consulter à ce sujet le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (5e éd., 2e partie, § 769, p. 154). Les auteurs y disent :

« La formule $V = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2)$ (c'est l'omniformule simplifiée dans le cas présent) donne un résultat trop fort. La formule qui s'adapte le mieux à la forme générale des tonneaux est la suivante :

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left[2R^2 + 2r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right]$$

(*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. XLVIII, p. 96.)

» Enfin nous signalerons la formule

$$V = 0{,}525\ D^3$$

qui permet de jauger les tonneaux ordinaires d'une manière très rapide et suffisamment approchée en mesurant seulement la diagonale D qui va du trou de la bonde au point le plus bas de l'un des fonds. »

(A suivre.)

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p.

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 109.)

---

7. Problème I. — *Sachant trouver le point réciproque d'ordre* p, *construire le point réciproque d'ordre* — p.

Soit M (α, β, γ) le point proposé, M' $(\alpha', \beta', \gamma')$ de l'ordre p; on a

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^p} = \frac{\beta\beta'}{b^p} = \frac{\gamma\gamma'}{c^p},$$

et l'on suppose que l'on sache déduire, par une certaine construction, effectuée bien entendu avec la règle et le

compas, le point M′ du point M; on propose alors de construire le point M″ (α'', β'', γ'') réciproque de l'ordre — p.

Les coordonnées de M″ vérifient les égalités

$$\frac{\alpha\alpha''}{a^{-p}} = \frac{\beta\beta''}{b^{-p}} = \frac{\gamma\gamma''}{c^{-p}}. \qquad (1)$$

Soit pris le réciproque M_0 (α_0, β_0, γ_0) (sens ordinaire) de M; on a d'abord

$$\alpha\alpha_0 = \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0. \qquad (2)$$

D'autre part, si l'on construit le réciproque d'ordre p de M_0, on obtient un point M″ (α'', β'', γ'') et l'on a

$$\frac{\alpha''\alpha_0}{a^p} = \frac{\beta''\beta_0}{b^p} = \frac{\gamma''\gamma_0}{c^p}. \qquad (3)$$

Enfin, soit M_0'' (α_0'', β_0'', γ_0'') le réciproque (sens ordinaire) de M″, on peut écrire

$$\alpha''\alpha_0'' = \beta''\beta_0'' = \gamma''\gamma_0''. \qquad (4)$$

Les égalités (2), (3) et (4) donnent

$$\frac{\alpha\alpha_0''}{a^{-p}} = \frac{\beta\beta_0''}{b^{-p}} = \frac{\gamma\gamma_0''}{c^{-p}}.$$

Finalement le point M_0'' est le réciproque d'ordre — p du point donné M. Pour l'obtenir on voit, en résumé, qu'il faut :

1° Prendre le réciproque M_0 de M,

2° Le réciproque M″ d'ordre p de M_0,

3° Le réciproque M_0'' de M″;

le point M_0'' ainsi obtenu est le réciproque d'ordre — p de M.

Il résulte de cette première observation que si l'on sait construire les points réciproques correspondant à des valeurs positives de p, on saura, par cela même, trouver ceux qui correspondent à des valeurs négatives de p.

8. Problème II. — *Sachant construire le réciproque* M *de l'ordre* p, *obtenir celui de l'ordre* p + 2.

Les notations précédentes étant conservées, nous avons d'abord

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^p} = \frac{\beta\beta'}{b^p} = \frac{\gamma\gamma'}{c^p}. \qquad (1)$$

Prenons M′ (α_0', β_0' γ_0') réciproque de M′; nous avons aussi

$$\alpha'\alpha_0' = \beta'\beta_0' = \gamma'\gamma_0'. \qquad (2)$$

Considérons maintenant le point M″(α'', β'' γ''), inverse de

M'_0 (ou réciproque du deuxième ordre, comme on voudra l'appeler); les relations

$$\frac{\alpha'_0\alpha''}{a^2} = \frac{\beta'_0\beta''}{b^2} = \frac{\gamma''\gamma'_0}{c^2},$$

combinées avec (1) et (2), donnent

$$\frac{\alpha\alpha''}{a^{p+2}} = \frac{\beta\beta''}{b^{p+2}} = \frac{\gamma\gamma''}{c^{p+2}}.$$

Ainsi, pour obtenir le point réciproque de l'ordre $p+2$, on prendra:

1° Le réciproque M' d'ordre p du point donné M,

2° Le réciproque M'_0 (sens ordinaire) de M',

3° L'inverse M'' (ou réciproque du deuxième ordre) de M'_0; le point M'' auquel conduit cette construction est le point cherché.

9. Problème III. — *Construire la réciproque* M_p *d'un ordre quelconque* p, *positif ou négatif, correspondant à un point donné* M.

Comme l'on sait construire directement les réciproques des trois premiers ordres (0, 1, 2,) on pourra donc, par application de la construction précédente, obtenir successivement:

1° Les points réciproques d'ordre 0, 2, 4, ...; 2° en partant des réciproques du premier ordre, les réciproques d'ordre 1, 3, 5 ..., etc. (*).

Le problème I ayant ramené le cas des exposants négatifs à celui des exposants positifs, on peut conclure de ce qui précède que les points réciproques d'un ordre quelconque, pair ou impair, positif ou négatif, peuvent être obtenus par le tracé, relativement simple, que nous venons de faire connaître.

10. Points adjoints. — Considérons un point M dont

(*) On trouvera d'autres solutions de ce problème: l'une de M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 497); l'autre de M. Boubals (*Journal*, 1885, p. 31). — Voyez aussi : un mémoire de M. Brocard: ETUDE D'UN NOUVEAU CERCLE DU PLAN D'UN TRIANGLE (*Annuaire de l'Association Française*, Congrès d'Alger, 1881, p. 150); et *Journal de M. S.*, 1883, p. 74, un article de M. Lemoine: QUELQUES THÉORÈMES.

les coordonnées α, β, γ vérifient les relations

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C};$$

M. Lemoine appelle points associés (*) et nous nommons ici *points adjoints* ceux dont les coordonnées se déduisent de celles du point M en donnant aux dénominateurs, dans les formules précédentes, des signes différents.

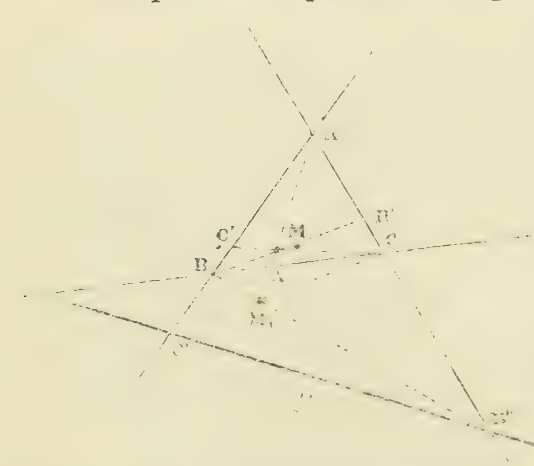
A un point donné M correspondent seulement trois points adjoints M_1, M_2, M_3 dont les coordonnées se calculent par les formules :

$$\frac{\alpha_1}{-A} = \frac{\beta_1}{B} = \frac{\gamma_1}{C},$$

$$\frac{\alpha_2}{A} = \frac{\beta_2}{-B} = \frac{\gamma_2}{C},$$

$$\frac{\alpha_3}{A} = \frac{\beta_3}{B} = \frac{\gamma_3}{-C}.$$

Si l'on prend un point M et que l'on fasse la construction qu'indique la figure (C″ étant le conjugué harmonique de C′, par rapport à AB ; et, de même B″ le conjugué de B′, par rapport à AC), les droites BB″, CC″ concourent sur AM en un point M_1 qui est le premier point adjoint.



On déduit donc très simplement, d'un point donné M, ses points adjoints M_1, M_2, M_3.

11. Droite et point harmoniquement associés. — Les trois points A″, B″, C″ qui sont considérés dans la construction précédente sont situés sur une droite μ. Le point

---

(*) Voyez Journal, 1885, p. 193. Le qualificatif *associé* étant trop générique, il me paraît préférable de désigner les points dont il est ici question par l'expression *points algébriquement adjoints*, ou, plus brièvement encore, par celle de *points adjoints* au point donné M.

M et la droite μ sont deux éléments harmoniquement associés, suivant l'expression que nous avons proposée (*).

A un point M (α, β, γ)

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

correspond une droite μ, harmoniquement associée à ce point, et l'équation de μ est

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0.$$

12. Points complémentaires (**) **et anti-complémentaires.** — A un point M (α, β, γ)

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

correspond toujours un point M' (α', β', γ') au moyen des formules

$$\frac{\alpha'}{B + C} = \frac{\beta'}{C + A} = \frac{\gamma'}{A + B}.$$

On déduit facilement de ces formules que le point complémentaire M' se déduit du point donné M, en joignant M au centre de gravité E du triangle de référence et en prolongeant cette droite d'une longueur moitié moindre.

Une autre transformation résulte des formules

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}, \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha''}{B + C - A} = \frac{\beta''}{C + A - B} = \frac{\gamma''}{A + B - C}. \qquad (2)$$

Le point M'' qui correspond aux égalités (2) est l'anti-complémentaire de M, et l'on vérifie sans peine, pour légitimer cette expression, que M est, en effet, le complémentaire de M''.

Application. — Pour montrer, sur un seul exemple, l'uti-

(*) Voyez *Journal*, p. 103.

(**) L'idée des points complémentaires a été produite récemment par M. Hain (*Archiv der Mathematik und Physik* von Grunert, octobre 1885, p. 214). Celle des points anti-complémentaires n'a pas été donnée par M. Hain, mais elle est la conséquence très naturelle de la première.

lité de ces considérations, prenons les réciproques des points de Brocard.

Ces points O_0, O'_0 ont pour coordonnées

$$b^2, \quad c^2, \quad a^2;$$
$$c^2, \quad a^2, \quad b^2;$$

par suite, le point ω milieu de $O_0O'_0$ est représenté par

$$b^2 + c^2, \quad c^2 + a^2, \quad a^2 + b^2,$$

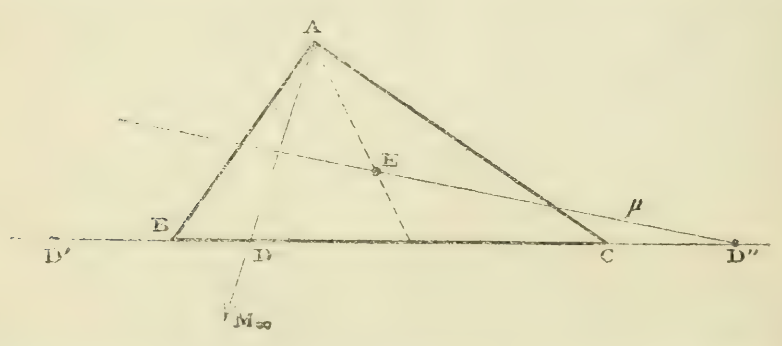
d'où l'on conclut que ω est le complémentaire du point de Lemoine K. La droite $K\omega$ étant partagée par le centre de gravité E dans le rapport de 2 à 1, on peut énoncer la propriété suivante : *Le point de Lemoine et les réciproques des points de Brocard ont le même centre de gravité que le triangle de référence* (*).

13. Point associé à l'infini. — L'idée des points complémentaires conduit encore très naturellement à la suivante.

Imaginons un point M (A, B, C) et associons-lui un point M_∞ dont les coordonnées soient

$$B - C, \quad C - A, \quad A - B.$$

Ce point M_∞ est évidemment à l'infini puisque la somme



de ses coordonnées barycentriques est nulle ; pour ce motif nous dirons qu'il est le point de l'infini, associé à M ; ou, plus brièvement, qu'il est *l'associé à l'infini.*

Nous devons montrer maintenant comment, d'un point donné M, on déduit son associé à l'infini.

A cet effet, considérons la droite μ qui joint le centre de

(*) M. Neuberg, d'après une communication qu'il m'a faite, est arrivé, de son côté, à cette propriété.

gravité E au point M ; son équation est

$$\alpha(B - C) + \beta(C - A) + \gamma(A - B) = 0.$$

Prenons la transversale réciproque

$$\frac{\alpha}{B - C} + \frac{\beta}{C - A} + \frac{\gamma}{A - B} = 0,$$

puis le point harmoniquement associé à cette dernière droite

$$\frac{\alpha}{B - C} = \frac{\beta}{C - A} = \frac{\gamma}{A - B};$$

ce point est précisément M^{∞}.

Dans la figure ci-dessus, D'' et D' sont deux points isotomiques sur BC et D est le conjugué harmonique de D' relativement à BC. On obtient ainsi une droite AD et, par une construction semblable, deux droites analogues qui sont parallèles. Elles concourent, à l'infini au point que nous représentons par M_{∞}.

(A suivre.)

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

10. — *Résoudre et discuter l'équation*

$$\frac{a^2}{x - p} + \frac{b^2}{x - q} = 1. \qquad (1)$$

(Baccalauréat ; juillet 1885.)

En développant cette équation, l'examen de la quantité U placée sous le radical prouve que celle-ci peut se mettre sous la forme

$$U = (p - q + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2.$$

Ainsi les racines sont toujours réelles ; mais on arrive bien plus rapidement à cette conclusion par la *méthode des substitutions*, qui est aujourd'hui familière aux élèves d'élémentaires. Bornée au second degré, cette méthode enseigne que si deux substitutions α, β donnent des résultats de signes contraires, les racines sont réelles : l'une étant nécessairement comprise dans l'intervalle (α, β) ; l'autre étant, au contraire, située hors de cet intervalle.

Dans tous les cas, l'équation étant

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

la suite $\quad -\infty, \quad -\frac{b}{a}, \quad +\infty$

sépare avec certitude les racines de l'équation.

Revenons à l'exemple proposé, écrivons l'équation (1) sous forme entière, si nous voulons éviter la discontinuité de la fonction, et, dans la relation

$$a^2(x - q) + b^2(x - p) - (x - p)(x - q) = 0,$$

substituons

$$-\infty \quad p \quad q \quad +\infty \,.\, (p < q).$$

Nous avons le tableau suivant :

$$-, \quad a^2(p - q), \quad b^2(q - p), \quad -;$$

c'est-à-dire

$$-, \quad -, \quad +, \quad -.$$

Les racines sont réelles et séparées.

Remarque. — La méthode très connue que nous venons d'employer est utilisée dans de nombreux exemples. On connaît notamment son application à l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

qui a ses racines réelles, propriété qui appartient d'ailleurs à toutes les équations de la forme

$$\sum \frac{1}{x-a} = 0.$$

Mais voici un exemple qui est peut-être moins classique.

Considérons l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{\alpha}{x-c} = 0. \qquad (1)$$

et supposons $a < b < c$, ou $a > b > c$ indifféremment ; dans ce cas, l'équation a ses racines réelles. On le reconnaît immédiatement en faisant varier x de $a + \varepsilon$ à $b - \varepsilon$, ε étant une quantité positive, aussi petite que l'on voudra ; ou, si l'on préfère, en substituant successivement a et b, dans l'équation (1) mise sous forme entière.

On obtient ainsi les résultats :

$$(a - b)(a - c), \qquad (b - a)(b - c)$$

dont le produit est égal à

$$(a - b)^2(a - c)(c - b).$$

Ce produit étant négatif, dans l'hypothèse que nous avons faite, nous voyons donc qu'il existe une racine dans l'intervalle (a, b) ; ainsi, l'équation a ses racines réelles.

Le calcul vérifie bien entendu le résultat précédent, et l'on trouve que la quantité soumise au radical, mise sous la forme

$$4(c - a)(c - b) + (a - b)^2(\alpha + 1)^2,$$

est essentiellement positive, quand c n'est pas compris dans l'intervalle (a, b).

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Je vous envoie la traduction que j'ai faite d'un article anglais paru dans le journal *The Educational Times.* — Cet article est intitulé : *Proof of the Rule for the composition of two parallel forces*, by J. Walmsley (Preuve de la règle de composition de deux forces parallèles, par J. Walmsley). L'auteur expose une *nouvelle* vérification de la construction ordinaire employée pour obtenir la résultante de deux forces parallèles dirigées dans le même sens ou en sens contraires. Voici quelle est la preuve qu'il en donne :

Soient P et Q les deux forces données. Joignons A et B, points d'application de ces deux forces parallèles et divisons la ligne AB en deux parties BC et CA telles que nous ayons $\frac{BC}{CA} = \frac{P}{Q}$ (le point C doit être toujours plus rapproché de P, la plus grande force, que de Q). Menons par le point C la ligne ER ou CR parallèle aux directions de P et de Q. Prenons CE = Q, CR = P, puis menons les lignes EA, AR, RB. Il nous est alors facile de prouver que EA est parallèle à BR. En effet, dans l'une et l'autre figure, les triangles AEC

Fig. 1.

et RCB sont semblables. Ils ont leurs angles en C égaux, et de plus ces angles sont compris entre des côtés proportionnels puisque, d'après la construction que nous avons faite précédemment, nous avons $\frac{BC}{CA} = \frac{RC}{EC} = \frac{P}{Q}$. Les triangles AEC et RCB, étant semblables, sont aussi *équiangles*. On conclut de là l'égalité des angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{CRB}$. Or, dans la première figure, ces angles occupent la position d'angles alternes-internes par rapport aux deux lignes AE et BR coupées par la sécante ER, leur égalité prouve le *parallélisme* de ces lignes AE et BR. Dans la 2e figure les angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{CRB}$ occupent la position d'angles correspondants par rapport aux lignes AE et BR coupées par la sécante CR; de leur égalité on déduit le *parallélisme* de AE et de BR. Alors CR dans le triangle ACR peut représenter P en A, et EC dans le triangle ACE peut représenter Q en B. Donc, à l'aide de ces triangles nous pourrons remplacer P en A, par CA et AR en A; et Q en B, par EA et AC en B. Mais AC en B et CA en A se font équilibre; les forces primitives sont donc équivalentes à AR en A et AE en B, la dernière de ces forces doit, en réalité, agir suivant BR *(fig. 1)* ou RB *(fig. 2)*. Mais ces forces par le principe de la *transmissibilité* peuvent être prises comme agissant en R. Leur résultante est alors ER, le troisième côté du triangle EAR. Cetterésultante peut se transporter en C. Il est facile de tirer de là les conclusions ordinaires pour les forces égales ou inégales, et d'en déduire la méthode graphique employée pour la détermination de la résultante.

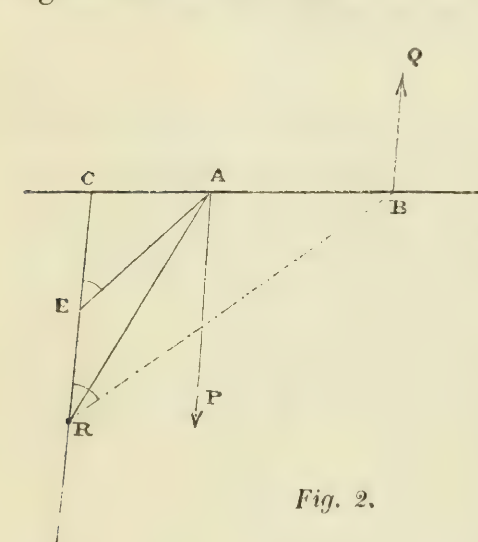


Fig. 2.

(Traduit du journal anglais *The Educational Times*, par M. Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua.)

SUR LA CONSTRUCTION DE π.

M. Ferdinand Bretschneider d'Eisenstadt a indiqué, dans le dernier numéro des *Archives de Grunert* (*), une construction assez simple pour obtenir une valeur approchée du nombre π.

On sait, dit M. Bretschneider, que l'expression

$$\frac{7}{10^7}+\frac{13\sqrt{146}}{50}$$

représente le nombre π avec *neuf* décimales exactes.

Si l'on prend seulement la partie

$$\frac{13\sqrt{146}}{50}=3,14159\ldots$$

on obtient π avec *cinq* décimales seulement; mais cette approximation suffit dans la plupart des cas,

En observant que

$$146=\overline{11}^2+\overline{5}^2,$$

on est ainsi conduit à construire une ligne x, telle que

$$\frac{x}{13}=\frac{\sqrt{\overline{11}^2+\overline{5}^2}}{50}. \qquad (1)$$

Voici, il nous semble, la meilleure façon d'utiliser cette remarque de M. Bretschneider.

Prenons une circonférence de rayon quelconque, mais dont un diamètre AB a été partagé en dix parties égales et portons, comme l'indique la figure, sur le prolongement de AB trois de ces divisions, ce qui donne les points C et D.

Soit OE le rayon perpendiculaire à AB; les tangentes en A et E se coupent en M; du point M, avec MC pour rayon, décrivons un arc de cercle (**) qui rencontre MA en R; enfin

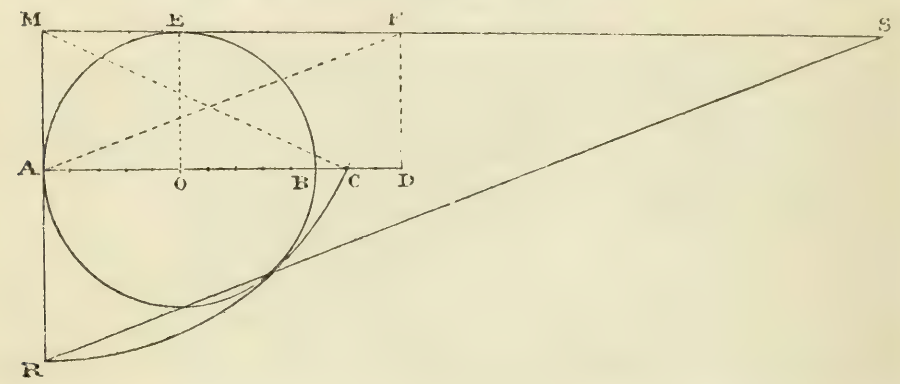
(*) *Archiv der Mathematik und Physik*, *1886*, p. 447.

(**) Cet arc de cercle est très légèrement extérieur au cercle proposé, parce que l'on a

$$\sqrt{146}>5+\sqrt{50},$$

mais la différence de deux nombres $\sqrt{146}$, $5+\sqrt{50}$ est très faible; elle est à peu près égale à $\frac{1}{100}$.

complétons la construction comme l'indique la figure, RS étant une droite parallèle à AF ; je dis que MS représente la longueur de la circonférence, avec une approximation



égale à celle qu'on obtient en faisant le calcul de cette longueur, π étant pris avec cinq décimales exactes.

En effet la proportion (1) peut s'écrire

$$\frac{10x}{13} = \frac{\sqrt{146}}{5} = \frac{\text{MC ou MR}}{\text{MA}} = \frac{\text{MS}}{\text{MF}}.$$

Mais
$$\text{MF} = \frac{13}{5}\text{R},$$
on a donc
$$\text{MS} = 2\text{R}x.$$

Dans cette formule x représente le nombre π avec cinq décimales exactes et l'on peut dire que, avec l'approximation correspondante, MS est égale à la longueur de la circonférence proposée. On accordera sans doute que, dans la pratique, une pareille approximation est très suffisante. G. L.

ERRATUM

CONCERNANT L'ESSAI SUR LA THÉORIE DES NOMBRES

De Legendre. — An VI (1re édition).

Résolution de l'équation $x^2 - 331y^2 = 1$ *par les plus petits entiers.*

Plus petites valeurs de x et d'y (d'après Legendre)

$$x = 2\ 785\ 589\ 801\ 443\ 969$$
$$y = 153\ 109\ 862\ 634\ 573.$$

RECTIFICATION

Dans la valeur de x, les deux derniers chiffres à gauche forment le nombre 70 et non 69.

VÉRIFICATION

$x^2 =$ 7 759 510 541 908 656 209 097 049 360 900
$y^2 =$ 23 442 630 035 977 813 320 534 892 329
$331y^2 =$ 7 759 510 541 908 656 209 097 049 360 899
et enfin $x^2 - 331y^2 = 1$ (ce qu'il fallait vérifier). J. Ch.

Nota. — M. Chapron qui nous communique cet erratum, l'a rencontré dans l'exemplaire qui se trouve à la bibliothèque Sainte-Geneviève. Il n'est pas impossible, comme il nous l'a fait observer, que la faute signalée ait disparu dans les éditions suivantes. Les deux derniers chiffres 9 et 3, dans les valeurs d'x et d'y données par Legendre, sont manifestement en contradiction avec l'énoncé ; puisque, dans cette hypothèse, les deux nombres x^2 et $331y^2$ se terminant respectivement par les chiffres 1 et 9, la différence $x^2 - 331y^2$ ne peut être égale à l'unité.

M. Chapron a refait les calculs de Legendre et a pu rétablir la véritable valeur de x. En nous envoyant cette intéressante rectification M. Chapron ajoute : « J'ai été aidé dans ce travail par le jeune Lefeuvre de l'institution D*... ; en quelques minutes, avec les réglettes de MM. Genaille et Lucas, il a vérifié les résultats cherchés. » Nous ne sommes d'ailleurs pas surpris de ce que nous apprend là M. Chapron ; nous avons vu fonctionner les réglettes en question au Congrès de Grenoble, au mois d'août dernier ; les résultats qu'elles donnent sont tout à fait merveilleux. G. L.

QUESTION 144

Solution par M. Chapron.

Soit ABC *un triangle,* A′ *et* A″ *les pieds sur* BC *des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle* A ; B′ *et* B″, C′ *et* C″ *les points analogues sur* AC *et sur* AB ; *soient* α' *et* α'' *les symétriques de* A′ *et de* A″ *par rapport au milieu de* BC ; β' *et* β''

les symétriques de B′ et de B″ par rapport au milieu de AC ; γ′ et γ″ les symétriques de C′ et de C″ par rapport au milieu de AB. Démontrer :

1° Que les trois circonférences décrites sur A′A″, B′B″, C′C″ comme diamètres ont même axe radical ;

2° Qu'il en est de même des trois circonférences décrites sur α′α″, β′β″, γ′γ″ comme diamètres ;

3° Que ces trois dernières circonférences se coupent, se touchent ou ne se coupent pas : suivant que ABC est acutangle, rectangle ou obtusangle ; lorsqu'elles se touchent, le point de contact est le point symétrique du sommet de l'angle droit par rapport au milieu de l'hypoténuse ;

4° Lorsqu'elles se coupent, ou se touchent, les distances d'un point d'intersection ou du point de contact sont proportionnelles aux côtés opposés ;

5° Les axes radicaux des deux groupes de trois circonférences se coupent au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

(E. Lemoine.)

Je supposerai

$$BC > CA > AB$$

ou

$$a > b > c.$$

Soient M, N, P, μ, ν, π les milieux respectivement de A′A″, B′B″, C′C″, α′α″, β′β″, γ′γ″ ;

Soient A_1, B_1, C_1 les pieds des symédianes sur les côtés BC, AC, AB.

On sait que les trois points A′, C′, B″ sont en ligne droite ainsi que A′, B′, C″. Considérons le quadrilatère complet B′C′B″C″ ; A′A″ est la troisième diagonale. M est le milieu de A′A″, N celui de la diagonale B′B″, P celui de C′C″ ; donc M, N, P sont en ligne droite comme μ, ν, π sont respectivement les points isotomiques de M, N, P (d'après la dénomination de M. de Longchamps qui appelle ainsi deux points situés sur un côté à égale distance du milieu de ce côté). Ces points sont aussi en ligne droite.

On peut, du reste, le voir autrement :

Si, par A, on mène une parallèle AX à BC et que l'on appelle I le milieu de BC, les quatre droites AX, AC, AI, AB forment un faisceau harmonique, les symétriques AM, AB, AA_1, AC

de ces quatre droites par rapport à la bissectrice AA′ forment aussi un faisceau harmonique, et, comme les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent en un même point (le point de Lemoine), les conjugués harmoniques M, N, P de A_1, B_1, C_1 par rapport à BC, AC, AB sont en ligne droite; on a alors l'égalité

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1,$$

qui entraîne

$$\frac{\mu C}{\mu B}\cdot\frac{\nu A}{\nu C}\cdot\frac{\pi B}{\pi A}=1,$$

puisque $MB=\mu C$, etc., c'est-à-dire que μ, ν, π sont en ligne droite.

Cherchons la puissance du centre du cercle circonscrit par rapport au cercle décrit sur A′A″ comme diamètre; on voit qu'elle est la même que la puissance de ce point par rapport au cercle décrit sur $\alpha'\alpha''$ comme diamètre, puisque ces deux cercles sont symétriques par rapport à OI.

Puisque A_1 et M sont conjugués harmoniques par rapport à BC, M est le point où la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC coupe BC; donc OA et MA sont perpendiculaires et le cercle décrit sur A′A″ comme diamètre coupe orthogonalement en A le cercle circonscrit du triangle ABC; OA est donc tangente en A au cercle décrit sur A′A″ comme diamètre.

Par suite, la puissance du point O par rapport à ce cercle est R^2, et elle est la même par rapport au cercle symétrique décrit sur $\alpha'\alpha''$ comme diamètre et par rapport aux autres cercles décrits sur B′B″, $\beta'\beta''$, C′C″, $\gamma'\gamma''$. L'axe radical des trois circonférences décrites sur A′A″, B′B″, C′C″ comme diamètre et celui des trois circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ sont donc respectivement : la perpendiculaire abaissée de O sur la droite MNP et la perpendiculaire abaissée de O sur la droite $\mu\nu\pi$.

1°, 2° et 5° sont ainsi démontrés.

Cela posé on a $$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{c^2}{b^2},$$

puisque A_1 est le pied de la symédiane ; donc, M étant le con-

jugué harmonique de A_1 par rapport à B et à C.

$$\frac{MB}{MC} = \frac{c^2}{b^2} \quad \text{d'où} \quad MB = \mu C = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}.$$

Si R_a, R_b, R_c sont les rayons des circonférences décrites respectivement sur $A'A''$ ou $\alpha'\alpha''$, $B'B''$ ou $\beta'\beta''$, $C'C''$ ou $\gamma'\gamma''$ comme diamètre, on a

$$R_a = \frac{abc}{b^2 - c^2}, \quad R_b = \frac{abc}{a^2 - c^2}, \quad R_c = \frac{abc}{a^2 - b^2},$$

on a facilement aussi

$$\overline{\mu\nu}^2 - (R_a + R_b)^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2 + c^2)(c^2 - a^2 - b^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$

quantité négative, d'où l'on conclut

$$\mu\nu < R_a + R_b;$$

on a enfin

$$\overline{\mu\nu}^2 - (R_a - R_b)^2 = \frac{c^2(c^2 + b^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)}.$$

Or, puisque nous avons fait l'hypothèse $a > b > c$, le second membre est positif, nul ou négatif suivant que $c^2 + b^2 - a^2$ est positif, nul ou négatif ; c'est-à-dire que ABC est acutangle, rectangle ou obtusangle : on a donc

$$\mu\nu < R_a + R_b \quad \text{et} \quad \mu\nu > R_a - R_b;$$
$$\mu\nu < R_a + R_b \quad \text{et} \quad \mu\nu = R_a - R_b;$$
$$\mu\nu < R_a + R_b \quad \text{et} \quad \mu\nu < R_a - R_b;$$

c'est-à-dire que les circonférences se coupent, sont tangentes ou ne se coupent pas. Si A'_1 est le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit, on voit que lorsque le triangle CAB est rectangle en A, ce point A'_1 appartient aux trois circonférences, c'est-à-dire qu'il est leur point de contact ; il suffit pour cela d'établir que les trois angles $\alpha'A_1'\alpha''$, $\beta'A_1'\beta''$, $\gamma'A_1'\gamma''$ sont droits, ce qui est très facile.

3° est donc démontré.

La circonférence décrite sur $\alpha'\alpha''$ comme diamètre est évidemment le lieu du point M_1 tel que l'on ait

$$\frac{M_1B}{M_1C} = \frac{b}{c}, \text{ etc.}$$

On a donc, si M_1 est un des deux points communs aux trois circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ comme diamètre,

$$\frac{M_1A}{a} = \frac{M_1B}{b} = \frac{M_1C}{c}$$

et 4° est démontré.

REMARQUES (*). — *a*) Les circonférences décrites sur A′A″, B′B″, C′C″ comme diamètre se coupent toujours, et si M_2 est un de leurs points d'intersection on a $\dfrac{M_2A}{\frac{1}{a}} = \dfrac{M_2B}{\frac{1}{b}} = \dfrac{M_2C}{\frac{1}{c}}$.

Elles se coupent toujours, car

$$\overline{MN}^2 - (R_a + R_b)^2 = -\frac{3a^2b^2c^2}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}.$$

Ce qui prouve que $MN < R_a + R_b$ et

$$\overline{MN}^2 - (R_a - R_b)^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)},$$

ce qui prouve que $MN > R_a - R_b$.

b) La droite MNP axe d'homologie du triangle ABC et du triangle $A_1B_1C_1$ formé par les pieds des symédianes, est parallèle à la droite qui joint les points de Brocard du triangle ABC et, par suite, l'axe radical des circonférences décrites sur A′A″, B′B″, C′C″ comme diamètre passe aussi par le point de Lemoine; c'est la ligne qui joint le point de Lemoine au centre du cercle circonscrit; la puissance du point de Lemoine par rapport à l'une de ces trois circonférences est $\dfrac{-3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$.

c) L'axe radical des circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ comme diamètre passe aussi au point de concours des hauteurs, c'est donc la droite qui joint ce point au centre du cercle circonscrit; la puissance du point de concours des hauteurs par rapport à l'une de ces circonférences est $4R^2$.

d) Les lecteurs qui connaissent l'emploi des coordonnées homogènes pourront vérifier que ces axes radicaux ont respectivement pour équations :

$$\alpha \cdot \frac{b^2 - c^2}{a} + \beta \cdot \frac{c^2 - a^2}{b} + \gamma \cdot \frac{a^2 - b^2}{c} = 0,$$

(*) Ces remarques diverses nous ont été adressées par M. Em. Lemoine.

et

$$\alpha . (b^2 - c^2) \cos A + \beta . (c^2 - a^2) \cos B + \gamma . (a^2 - b^2) \cos C = 0.$$

e) Voici une autre démonstration de 1° et de 2°.

Supposons d'une façon générale que A'_1 et A''_1 soient deux points conjugués harmoniques quelconques par rapport à C et à B; soit M_1 le milieu de $A'_1B''_1$, J le milieu de CB. La puissance de O, centre du cercle circonscrit par rapport au cercle décrit sur $A'_1A''_1$ comme diamètre, est $\overline{OM}_1^2 - \overline{M_1A'}^2$ ou $\overline{OJ}^2 + \overline{JM}_1^2 - \overline{M_1A'}^2$ ou $OJ^2 + (JM_1 - M_1A')(JM_1 + M_1A'')$ ou $OJ^2 + JA' \,.\, JA''$ ou (puisque A', A'' étant conjugués harmoniques on a $JA' \,.\, JA'' = \overline{BJ}^2$) $OJ^2 + \overline{JB}^2 = R^2$. Cette puissance est donc constante, et nous pouvons dire d'après cela que les trois circonférences décrites sur $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ ont en O un point qui a même puissance par rapport à chacune d'elles, et par suite qu'elles ont même axe radical passant par ce point.

Même démonstration pour les trois circonférences décrites sur $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ comme diamètre.

Si l'on considère le quadrilatère qui a pour côtés successifs $B'A''$, $A''B''$, $B''A'$, $A'B'$, les trois diagonales sont $B'B''$, $A'A''$, $C'C''$ et forment le triangle ABC, et l'on sait que dans tout quadrilatère complet les circonférences décrites sur les trois diagonales comme diamètre ont même axe radical ; on voit donc qu'une partie du théorème proposé revient à celui-là, mais ce qui précède permet d'ajouter la proposition suivante : *L'axe radical commun des trois circonférences décrites sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres passe par le centre du cercle circonscrit au triangle formé par ces trois diagonales.*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12166 6.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Ed. Guillet,** professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, voir p. 121).

Disposition remarquable des foyers et des sommets. — Menons les droites parallèles B′Q′, B″Q″... faisant avec la verticale l'angle 2α, comme BC.

Nous savons que la droite AF est perpendiculaire sur BC. Or, dans le cercle de centre B′ et de rayon B′F, l'angle Q′B′F est égal à QB′K′ + 2K′B′T, c'est-à-dire à

$$2\alpha + 2(\alpha' - \alpha) = 2\alpha';$$

donc

$$Q'B'F = 2\alpha';$$

de même

$$Q'B'F' = 2K'B'C' - K'B'Q,$$

c'est-à-dire

$$Q'B'F' = 2\alpha'.$$

Les deux arcs Q′F et Q′F′ sont donc égaux et, par suite, la corde FF′ est perpendiculaire sur B′Q′.

On ferait voir de la même façon que la corde F′F″ du cercle de centre B″ et du rayon B″F′ est perpendiculaire à la droite B″Q″, et ainsi de suite pour les autres paraboles.

Les cordes AF, FF′, F′F″... étant à la suite les unes des autres et perpendiculaires à des droites parallèles BC, B′Q′, B″Q″... forment une seule et même ligne droite.

Ainsi *les foyers de toutes les paraboles sont sur une droite, faisant avec l'horizon l'angle 2α, double de celui du plan incliné, et passant par le point de départ de la sphère.*

Les droites DS, D′S′, D″S″... étant toutes divisées en leurs milieux par les sommets S, S′ S″... il en résulte que *les sommets sont eux-mêmes sur une ligne droite partant du point* A.

D'ailleurs le point A peut être considéré lui-même comme foyer, sommet et pied de la directrice de la parabole AB qui

se réduit à une droite double. Pour avoir cette droite double, il suffirait de supposer que la sphère a été d'abord lancée verticalement du point B et de bas en haut avec la vitesse initiale

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Isochronisme des bonds. — Désignons par t_0 le temps employé par la sphère lancée du point B verticalement de bas en haut, avec la vitesse initiale v_0 définie par la formule (1), pour revenir au point de départ ; désignons de même par t_1 la durée du premier bond, par t_2 celle du second, par t_3 celle du troisième et ainsi de suite.

On sait que le temps t employé pour atteindre le point le plus élevé A est déterminé par la formule

$$v = v_0 - gt$$

dans laquelle on fait $v = 0$, ce qui donne :

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

D'ailleurs le temps de la chute est égal à celui de l'ascension ; on aura donc

$$t_0 = \frac{2v_0}{g}.$$

Nous avons trouvé aussi

$$t_1 = t_2 = \frac{2v_0}{g}.$$

On passe de t_2 à t_3 en remplaçant dans la formule

$$t_2 = \frac{2v_1}{g} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}$$

v_1 par v_2 et α' par α'', et on aurait t_n par la formule

$$t_n = \frac{2v_{n-1}}{g} \cdot \frac{\cos\alpha_{n-1}}{\cos\alpha}.$$

Or

$$\begin{cases} v_{n-1} = v_0\sqrt{1 + 4(n-1)n\sin^2\alpha} \\ \cos\alpha_{n-1} = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + 4(n-1)n\sin^2\alpha}} \end{cases}$$

Donc

$$t_n = \frac{2v_0}{g}.$$

On a donc, en résumé :

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = \dots = t_n \dots$$

En particulier, si l'on fait

$$\frac{2v_0}{g} = 1,$$

d'où

$$v_0 = 4^m,9044$$

et

$$h = 1^m,2261,$$

c'est-à-dire que si on lance verticalement la sphère de bas en haut avec une vitesse initiale de $4^m,9044$ ou si on la laisse tomber d'une hauteur de $1^m,2261$ au-dessus du plan incliné, cette sphère reviendra toucher le plan après chaque seconde, et cela quelle que soit l'inclinaison α du plan.

Loi de progression de la projection horizontale de la vitesse. — On a vu que pendant chaque bond, la projection horizontale de la vitesse est constante. Les durées t_1, t_2, t_3 ... t_n étant égales et les amplitudes ... A_1A_2... A_n comme la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3 ... n, il en résultera qu'en désignant par v_{x0}, v_{x1}, v_{x2}, v_{x3} ... les projections horizontales de la vitesse pour la 1e, la 2e, la 3e ... parabole, on aura :

$$v_{x1} = 2v_{x0},$$
$$v_{x2} = 3v_{x0} \dots \text{etc.}$$

Les vitesses horizontales suivent donc la loi de progression des nombres entiers, comme les amplitudes.

On peut encore le vérifier sur les expressions que nous avons trouvées pour v_{x0}, v_{x1} v_{x2} ...

$$\left\{\begin{array}{l} v_{x0} = v_0 \ \sin 2\alpha \\ v_{x1} = v_1 \ \sin(\alpha + \alpha') \\ v_{x2} = v_2 \ \sin(\alpha + \alpha'') \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_{xn-1} = v_{n-1} \sin(\alpha + \alpha_{n-1}). \end{array}\right.$$

On a d'ailleurs :

$$v_{n-1} = v_0\sqrt{1 + 4(n-1)n \sin^2\alpha}$$
$$\sin(\alpha + \alpha_{n-1}) = \sin\alpha \cos\alpha_{n-} + \cos\alpha \sin\alpha_{n-1}.$$

D'autre part, nous avons déjà trouvé

$$\left\{\begin{aligned} \sin\alpha_{n-1} &= \frac{(2n-1)\sin\alpha}{\sqrt{1+4(n-1)n\sin^2\alpha}} \\ \cos\alpha_{n-1} &= \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+4(n-1)n\sin^2\alpha}}, \end{aligned}\right.$$

on a donc :

$$\sin(\alpha+\alpha_{n-1}) = \frac{2n\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+4(n-1)n\sin^2\alpha}}$$

et comme

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

il vient enfin

$$v_{xn-1} = nv_{x0}.$$

(A suivre.)

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey** (*).

(*Suite*, voir p. 124.)

NOTES DIVERSES

28. Note I (voir § 16 et fig. 9). — Soit un volume V limité par des fuseaux cylindriques circonscrits à l'hémisphère de rayon r et par le plan servant de base à l'hémisphère.

Sa hauteur est r et sa base est le polygone d'aire B circonscrit au grand cercle qui sert de base à l'hémisphère.

Après réductions, l'omniformule donne

$$V = \frac{2}{3} r \times B, \qquad (1)$$

d'une part.

De l'autre, si on appelle S la somme des aires des fuseaux, on voit facilement que le volume a pour mesure cette surface S multipliée par le tiers du rayon, d'où

$$V = \frac{S \times r}{3}. \qquad (2)$$

En éliminant V entre (1) et (2), on obtient l'expression remarquable

$$S = 2B,$$

fort utile pour l'évaluation des voûtes en arc de cloître en plein cintre.

Pour B carré, $S = 8r^2$.

D'une façon générale, si un volume V peut être évalué à la fois par l'omniformule et par une fonction simple de la surface latérale S, en égalant les deux valeurs de V, on obtient une expression simple de la surface latérale.

On retrouverait ainsi l'expression de la surface de la sphère, etc.

29. Note II (voir § 21, fig. 12). — *Si on coupe un hyperboloïde et son cône asymptote par des plans parallèles donnant lieu à des couronnes elliptiques, ces couronnes ont la même aire.*

Considérons les deux couronnes FF'DD'; GG'EE'.

Nous aurons

$$\frac{\text{aire ellipse } FF'}{\text{aire ellipse } DD'} = \frac{CF^2}{CD^2}$$

car ces deux ellipses sont semblables; donc

$$\frac{\text{aire couronne } FF'DD'}{\text{aire ellipse } FF'} = \frac{CF^2 - CD^2}{CF^2}$$

ou $\text{aire couronne } FF'DD' = \dfrac{\text{aire ellipse } FF'}{CF^2} \times (CF^2 - CD)^2.$

De même

$$\text{aire couronne } GG'EE' = \frac{\text{aire ellipse } GG'}{C'G^2} \times (C'G^2 - C'E^2).$$

Les seconds membres de ces égalités sont égaux parce que

$$\frac{\text{aire ellipse } FF'}{CF^2} = \frac{\text{aire ellipse } GG'}{C'G^2}$$

les deux ellipses étant semblables.

D'ailleurs

$$CE^2 - CD^2 = F'D \times DF$$

et

$$C'G^2 - C'E^2 = G'E \times EG$$

sont des quantités égales d'après le théorème de Newton

relatif au produit des segments des cordes parallèles compris entre les asymptotes et les branches de l'hyperbole.

On en conclut

$$\text{aire couronne FF'DD'} = \text{aire couronne GG'EE'}.$$

30. Note III. Formule de Simpson pour les aires (voir § 24). — Cette formule de quadrature se déduit facilement de l'*omniformule* dans laquelle on remplace B, *b*, B' par (y_0, y_2, y_1), puis par (y_2, y_4, y_3), etc.

Soit

$$y = A_0 z^2 + A_1 z + A_2.$$

La primitive de y par rapport à z est

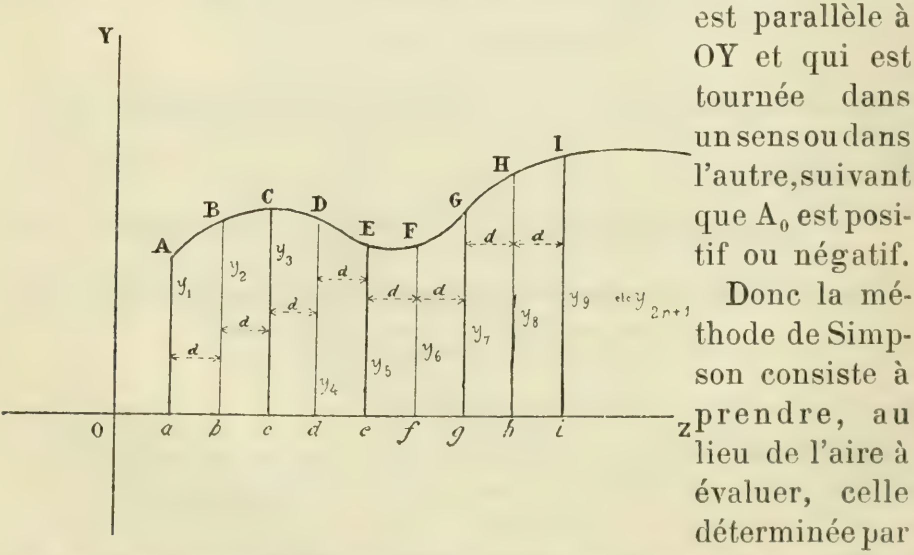
$$\frac{A_0 z^3}{3} + \frac{A_1 z^2}{2} + A_2 z$$

et un raisonnement identique à celui du § 24 (en y remplaçant s par y) donne

$$\text{aire ACca} = \frac{ac}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3) = \frac{d}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

$$\text{aire CEec} = \frac{ce}{6}(y_3 + 4y_4 + y_5) = \frac{d}{3}(y_3 + 4y_4 + y_5) \text{ etc.}$$

$y = A_0 z^2 + A_1 z + A_2$ représente une parabole dont l'axe est parallèle à OY et qui est tournée dans un sens ou dans l'autre, suivant que A_0 est positif ou négatif. Donc la méthode de Simpson consiste à prendre, au lieu de l'aire à évaluer, celle déterminée par des arcs successifs de paraboles dont les axes sont parallèles à OY.



Chaque arc de parabole, l'arc ABC par exemple, a ses trois ordonnées Aa, Bb, Cc équidistantes, et les coordonnées des trois points A, B, C déterminent les valeurs A_0, A_1, A_2 des trois paramètres de la parabole à laquelle ils appartiennent.

(A suivre.)

THÉORÈMES

SUR LES INTERSECTIONS D'UN CERCLE ET D'UN TRIANGLE D'APRÈS M. H. M. TAYLOR, M. A.

Par M. **Émile Vigarié,** élève de l'École des Mines.

(*Suite*, voir p. 106.)

---

5. — Les autres questions exigeant une démonstration qui ne peut être donnée dans la partie élémentaire de ce journal, nous nous contenterons d'indiquer les résultats :

Le lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$ *est une ligne droite* dont l'équation en *coordonnées barycentriques* est

$$\frac{x}{a}\sin(\alpha-\alpha')+\frac{y}{b}\sin(\beta-\beta')+\frac{z}{c}\sin(\gamma-\gamma')=0 \quad (5)$$

Les distances du centre (α, β, γ) aux côtés de ABC sont :

$$\left.\begin{aligned}\delta_a &= r\cos(\beta-\theta)\\ \delta_b &= r\cos(\gamma-\alpha+C-\theta)\\ \delta_c &= r\cos(\alpha+\gamma-B-\theta)\end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Dans le triangle ABC on peut inscrire un triangle minimum semblable à $\alpha\beta\gamma$, les distances du centre du cercle circonscrit à ce triangle aux côtés de ABC sont :

$$\left.\begin{aligned}\delta'_a &= \frac{R}{L^2\sin A}\left(\frac{\sin\beta\sin\beta'}{\sin B}+\frac{\sin\gamma\sin\gamma'}{\sin C}\right)\\ \delta'_b &= \frac{R}{L^2\sin B}\left(\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin A}+\frac{\sin\gamma\sin\gamma'}{\sin C}\right)\\ \delta'_c &= \frac{R}{L^2\sin C}\left(\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin A}+\frac{\sin\beta\sin\beta'}{\sin B}\right)\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

6. — *L'enveloppe de chaque côté du triangle* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma$ *est une parabole qui touche deux côtés du triangle* ABC.

Ainsi l'enveloppe de $\beta\gamma$ est une parabole tangente à AB et à AC.

7. — *L'enveloppe du cercle* $\alpha\beta\gamma$ *est une conique.*

Le centre de cette conique est le centre du cercle circonscrit au triangle minimum; les distances du centre de la conique aux côtés du triangle ABC sont donc données par les formules (7). Les axes de la conique sont :

$$r_1 \quad \text{et} \quad r_1\sqrt{1 - \frac{\sin(\beta - \theta_1)}{\sin^2\varphi}}$$

r_1 est le rayon du cercle circonscrit au triangle minimum, θ_1 la valeur de θ qui rend le rayon minimum et φ l'angle que fait la droite (5), lieu du centre du cercle $\alpha\beta\gamma$, avec BC.

Ces quelques propositions étant établies, nous pourrons en tirer des propriétés des principaux cercles remarquables du plan d'un triangle.

8. Tous les théorèmes précédents peuvent être démontrés plus simplement, sans calculs, grâce à une note de M. Neuberg (*) qui a pour objet de préciser et de compléter les relations données par M. H. Taylor en les rattachant à la théorie des figures semblablement variables et à celle des podaires obliques d'un foyer d'une conique.

Nous allons en terminant cette note indiquer les nouveaux résultats donnés par M. Neuberg.

Si un triangle $\alpha\beta\gamma$, variable sous les conditions de rester constant de forme, est inscrit dans un triangle donné ABC, les cercles circonscrits aux triangles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, se coupent en un même point F fixe par rapport à ABC et par rapport au triangle mobile $\alpha\beta\gamma$; donc :

Lorsqu'un triangle $\alpha\beta\gamma$ *reste semblable à lui-même et inscrit dans un triangle fixe* ABC, *il existe un point du triangle mobile qui est fixe: ce point est celui d'où l'on voit les côtés de* $\alpha\beta\gamma$ *sous*

(*) Cette note est insérée dans les « *Proceedings of the London Math. Society*, vol. XVI, n° 224 (12 février 1885). Elle a pour titre : « *Sur les figures semblablement variable*

des angles supplémentaires de ceux de ABC, *et les côtés de* ABC *sous des angles respectivement égaux aux sommes des angles correspondants des deux triangles* (*).

Le point F est un *centre permanent de similitude* du triangle $\alpha\beta\gamma$.

Si on mène FM, FN, FP perpendiculaires à BC, CA, AB, le triangle MNP est une position particulière du triangle $\alpha\beta\gamma$: c'est le minimum de $\alpha\beta\gamma$.

Les côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ *du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *enveloppent trois paraboles touchant deux côtés du triangle* ABC *et ayant pour foyer commun le point* F; *les sommets de ces courbes sont les projections de* F *sur* NP, PM, MN.

Le cercle MNP rencontre les côtés de ABC en trois nouveaux points M', N', P' qui sont les projections d'un point F' symétrique de F par rapport au centre D de MNP. Les deux points F, F' sont deux *points inverses;* ce sont donc les foyers d'une ellipse U inscrite à ABC; le cercle MNP est la podaire de F et F' par rapport à U, le diamètre EF'E' du cercle est un axe de U, le second axe est dirigé suivant la droite D*d* qui joint les centres des cercles MNP, $\alpha\beta\gamma$.

Soient α', β', γ' les intersections de BC, AC, AB avec le cercle $\alpha\beta\gamma$. Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ reste toujours semblable à lui-même lorsque le triangle $\alpha\beta\gamma$ est constant de forme. Donc :

Si les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *tournent respectivement autour de* F, F' *avec des vitesses angulaires égales, mais en sens contraire, leurs sommets sont toujours sur une même circonférence.*

Le cercle $\alpha\beta\gamma$ $\alpha'\beta'\gamma'$ a pour diamètre les droites II', KK' qui passent par les foyers FF' de l'ellipse U et sont limitées aux tangentes menées par les sommets E, E' de U. Donc

La conique U *est l'enveloppe du cercle* $\alpha\beta\gamma$ $\alpha'\beta'\gamma'$.

Enfin nous dirons en terminant que M. Artzt vient de publier (mars 1886) un mémoire important concernant les triangles semblables circonscrits à ABC, dans lequel il considère *douze* groupes de triangles circonscrits semblables à un même triangle.

(*) Voir : *Nouvelles Annales de Math.* t. XVIII, p. 48. *Nouvelle Corresp. Math.* t. VI, pp. 65, 72, 219, 321. *Mathesis*, t. I, p. 106.

GÉNÉRALITES SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 127.)

DÉVELOPPEMENTS SUR LES POINTS ASSOCIÉS A L'INFINI

14. Le point M_∞ qui est associé à l'infini avec un point donné M donne lieu à une remarque importante que nous allons développer.

Ordinairement, lorsque deux points M, M′ sont associés l'un à l'autre, leurs coordonnées vérifiant les relations

$$\frac{\alpha}{f_1(\alpha',\beta',\gamma')} = \frac{\beta}{f_2(\alpha',\beta',\gamma')} = \frac{\gamma}{f_3(\alpha',\beta',\gamma')}$$

on peut déterminer α, β, γ connaissant α', β', γ'; et, réciproquement, la connaissance du point M′ entraîne celle d'un ou de plusieurs points M. Mais cette règle générale est soumise à certaines exceptions qui tiennent à ce que des équations données peuvent être, dans certains cas particuliers, incompatibles ou indéterminées.

C'est ce qui se produit pour le point M_∞ et nous allons, à ce propos, préciser le rôle que ces points, que nous introduisons ici pour compléter les opérations élémentaires (*) que l'on peut effectuer avec les coordonnées d'un point, sont appelés à jouer dans la géométrie du triangle. Nous allons montrer que la connaissance du point M_∞ n'entraîne pas celle du point M, mais qu'elle détermine seulement une droite à laquelle appartient ce point. Si l'on peut trouver un second lieu géométrique de M, celui-ci se trouvera donc déterminé.

Soient α_0, β_0, γ_0 les coordonnées d'un point M; α_1, β_1, γ_1 celles de son associé à l'infini. Nous avons donc, d'après la

(*) On pourra consulter pour mieux comprendre le terme *opérations élémentaires* que nous employons ici, le tableau qui termine ce travail.

définition de ces points

$$\frac{\alpha_1}{\beta_0 - \gamma_0} = \frac{\beta_1}{\gamma_0 - \alpha_0} = \frac{\gamma_1}{\alpha_0 - \beta_0}. \qquad (1)$$

Ces relations déterminent nettement α_1, β_1, γ_1 quand on donne α_0, β_0 et γ_0; mais la réciproque n'est pas exacte et elle constitue l'observation délicate que nous avons visée tout à l'heure et qui nécessite les explications présentes.

Si nous supposons connues α_1, β_1, γ_1 et si nous cherchons, au moyen des égalités (1), à calculer α_0, β_0, γ_0, nous devons d'abord observer que le système est incompatible si nous n'avons pas

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0. \qquad (2)$$

Mais supposons que cette condition soit vérifiée; supposons, en d'autres termes, que le point α_1, β_1, γ_1, considéré, soit à l'infini, dans une direction correspondant aux nombres α_1, β_1, γ_1; nous allons montrer qu'il y a une infinité de points, situés sur une droite déterminée, admettant ce point comme associé à l'infini.

En effet, les *deux* égalités (1), si l'on tient compte de (2), se réduisent à la *seule* relation

$$\alpha_1(\gamma_0 - \alpha_0) - \beta_1(\beta_0 - \gamma_0) = 0,$$

que l'on peut encore écrire, vu l'équation (2),

$$\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 + \gamma_1\gamma_0 = 0.$$

Les inconnues α_0, β_0, γ_0 vérifiant une seule équation, le point correspondant M n'est pas déterminé; mais, si l'on considère α_0, β_0, γ_0 comme coordonnées courantes, on voit que ce point mobile M appartient à une droite μ correspondant à l'équation

$$\alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma = 0,$$

et nous pouvons rechercher la position de cette droite dans le plan du triangle de référence.

A cet effet, considérons la transversale réciproque μ_0,

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0;$$

cette droite est donc harmoniquement associée au point donné M_∞. Concluons donc : *étant donné un point à l'infini* M_∞, *si l'on prend la droite* μ, *harmoniquement associée à ce point, puis la transversale réciproque* μ_0; *tout point, pris sur* μ, *admet le point* M_∞ *pour associé à l'infini.*

On observera que les droites telles que μ passent toujours par le centre de gravité du triangle de référence, et il résulte de cette remarque une construction rapide pour la transversale μ.

Supposons que M_∞ soit à l'infini dans la direction AD; prenons D' conjugué harmonique de D, puis D'' isotomique de D'; en joignant D'' au centre de gravité E nous avons la droite μ demandée (*).

En résumé, la connaissance du point M_∞ ne donne pas celle de M; on peut seulement déduire de cette connaissance celle d'une droite sur laquelle est situé M et la détermination complète de celui-ci exige que l'on sache encore trouver un autre lieu auquel il appartienne.

Dans la pratique, on peut opérer de deux façons.

L'égalité
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0$$
permet de poser
$$\alpha_1 = b_1 - c_1, \qquad \beta_1 = c_1 - a_1, \qquad \gamma_1 = a_1 - b_1,$$
a_1, b_1, c_1 étant ainsi déterminées, mais d'une infinité de façons différentes. En considérant a_1, b_1, c_1 comme les coordonnées d'un point M_1, on voit que M_1 appartient à la droite μ qui vient de nous occuper; cette droite n'est donc autre chose que M_1E, E désignant le centre de gravité du triangle.

On peut aussi déterminer μ de la façon suivante. En fait, on connaît tout aussi bien les coordonnées de M et celles de M_∞, mais la question qui se pose est celle qui a pour but la détermination du point M connaissant ses coordonnées, par le secours de lieux géométriques remarquables; la détermination de ceux-ci donne alors certaines propriétés de la géométrie du triangle. D'après cela, on pourra chercher l'équation de la droite ME; puis, cette équation étant formée, on examinera si elle ne comporte pas quelque solution simple. L'étude du point M_∞ n'a précisément d'autre but que de mettre cette solution en évidence.

Mais un exemple fera mieux comprendre le but précis et l'utilité des considérations précédentes.

(*) Cette construction est l'inverse de celle que nous avons indiquée plus haut (§ 14) pour déduire d'un point donné le point associé à l'∞. Le lecteur est prié de se reporter à la figure de la p. 132.

15. Application. — On rencontre fréquemment dans la géométrie du triangle les binômes :

$$a^2 - bc, \quad b^2 - ac, \quad c^2 - ab;$$

proposons nous de fixer la position du point M (α, β, γ),

$$\frac{\alpha}{a^2 - bc} = \frac{\beta}{b^2 - ac} = \frac{\gamma}{c^2 - ab}.$$

L'associé à l'infini a pour coordonnées

$$b^2 - c^2 + a(b - c), \ \ldots$$

ou

$$(b - c)(a + b + c), \ \ldots$$

ou, plus simplement,

$$b - c, \quad c - a, \quad a - b.$$

Or ce point est aussi l'associé à l'infini du point dont les coordonnées sont

$$a, \quad b, \quad c,$$

c'est-à-dire du centre I du cercle inscrit. Concluons donc que *le point* M *appartient à la droite qui joint le centre de gravité* E *au centre* I *du cercle inscrit.*

Le point M n'est pas déterminé par cette remarque; nous en avons tout à l'heure donné la raison. Pour rendre tout à fait explicite la position de M, il faut trouver une seconde droite sur laquelle se trouve ce point et, pour cela, appliquer l'idée que nous avons donnée à la fin du paragraphe précédent. Cette idée, généralisée, consiste à joindre M à un point remarquable du triangle et à chercher ensuite une solution simple de l'équation ainsi obtenue.

Les points les plus simples, dans le plan du triangle de reférence, quand on considère leurs coordonnées, sont, après le centre de gravité que nous venons d'utiliser et qui, par conséquent, ne peut plus nous servir, le centre du cercle inscrit et le point de Lemoine.

Dans le cas présent, mais le fait est tout exceptionnel, nous ne pouvons pas prendre le centre du cercle inscrit; nous aurons donc recours au point de Lemoine; soit K ce point.

L'équation de KM est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 - bc & b^2 - ac & c^2 - ab \end{vmatrix} = 0,$$

ou
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 0.$$

ou enfin
$$\sum a\alpha(b^3 - c^3) = 0.$$

Parmi les solutions remarquables de cette équation on aperçoit celle-ci :
$$a\alpha = b\beta = c\gamma.$$

Le point correspondant est le réciproque du centre du cercle inscrit; ainsi : *le point* M *appartient aussi à la droite qui joint le point de Lemoine au réciproque du centre du cercle inscrit.*

Le point M se trouve donc bien déterminé et c'est ainsi que l'on peut, dans un grand nombre de cas, ou fixer la situation d'un point donné dans le plan du triangle; ou, quand cette position est connue, trouver des droites remarquables auxquelles appartient le point considéré. Nous reviendrons d'ailleurs, à propos des points isobariques, sur la construction du point associé à l'infini. *(A suivre.)*

SUR LE POINT DE NAGEL

Par M. **E. Vigarié.**

Étant donné un triangle ABC, si on joint ses sommets aux points de contact du cercle inscrit avec les côtés opposés, on a trois droites qui concourent en un point ω appelé *point de Gergonne*. Si l'on joint les sommets aux points de contact des cercles ex-inscrits avec les côtés, on a encore trois droites qui concourent en un second point I'_1. Les deux points ω, I'_1 sont réciproques (dans le sens défini par M. de Longchamps) (*).

Ce point I'_1 que l'on rencontre dans les questions 94 (G. de Longchamps, 1885, p. 92), 178, 186, 195 (G. Boubals), proposées aux lecteurs de ce journal, a été employé par beaucoup de géomètres, notamment par M. Brocard (*J. de spéciales*,

(*) Il est sous-entendu que le sommet A du triangle ABC considéré, doit être joint au point de contact du cercle ex-inscrit qui touche le *segment* BC.

1884, p. 207), par M. Lemoine (*J. de spéciales*, 1883, pp. 3-6, 24-33, 49-51 ; *Divers exercices de Mathématiques Élémentaires* 1884-1885).

Ce point paraissait avoir été étudié pour la première fois par M. Ad. Hochheim, dans un mémoire intitulé « *Ueber den fünften merkwürdigen Punkt* (*Archives de Grunert-Hoppe*, t. LII, pp. 26-40, 1871), et quelques géomètres lui avaient donné le nom de *point de Hochheim*. Le mémoire de M. Hochheim contient les coordonnées cartésiennes du point I'_1, ses distances aux principaux points remarquables (centre de gravité G, centre du cercle inscrit I, centre du cercle circonscrit O, orthocentre H), d'où il tire la relation

$$2GI = GI'_1; \qquad (1)$$

enfin il étudie divers lieux géométriques (au nombre de sept) obtenus en faisant varier un élément du triangle.

C'est, croyons-nous, à M. Nagel, recteur de l'École industrielle (Real-Schule) à Ulm, que revient l'honneur de la découverte du point I'_1. Cette intéressante indication bibliographique, qui nous a été communiquée d'abord par M. H. Brocard et quelques jours après par M. J. Neuberg, est facile à contrôler. On trouve, en effet, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1860, cinq théorèmes énoncés par M. Nagel (voir pp. 354-355) : de ces cinq théorèmes, trois se rapportent au point I'_1. Plus particulièrement le théorème I, en tenan tcompte d'une note rectificative de Terquem (*loco. cit.* p. 440), donne la construction du point I'_1 telle que nous l'avons indiquée ci-dessus et la relation (1). Le théorème V donne la construction des *points associés* de I'_1 (dans le sens défini par M. Lemoine : *J. Spéciales,* 1885).

D'après des renseignements que nous devons encore à l'obligeance de M. Brocard, ces théorèmes ont été énoncés par M. Nagel en 1836, dans un travail intitulé : « *Untersuchungen über die Kreise am Dreikck* » (Leipzig).

Le droit de priorité appartenant, jusqu'ici, à M. Nagel, et M. Brocard ayant vérifié que dans les volumes des *Nouvelles Annales de Mathématiques* antérieurs à 1860 il n'est pas fait mention de ce point remarquable, nous croyons, et c'est l'opinion de M. Brocard, que l'on doit changer le terme de

point de Hochheim pour celui de POINT DE NAGEL. Nous devons ajouter, enfin, qu'une réclamation analogue a été faite, en faveur de M. Nagel, par M. Reuschle (1853 et 1854).

VARIÉTÉS

M. Ed. LUCAS nous adresse le tableau suivant pour la décomposition en facteurs premiers des nombres de la forme $10^n \pm 1$. La plupart de ces résultats ont été donnés par W. Looff, conseiller à Gotha, et publiés par REUSCHLE dans les *Neue zahlentheoretische Tabellen* (1856). Depuis, M. Lelasseur a donné la décomposition, assurément difficile, de $10^{17} - 1$ pour laquelle Looff avait affirmé qu'il n'y a pas de diviseurs inférieurs à 400000. Il y aurait lieu de combler les lacunes indiquées dans ce tableau par des traits noirs.

n	$10^n - 1$	n	$10^n + 1$
3.	$3^3.37.$	2.	$101.$
5.	$3^2.41.271.$	3.	$7.11.13.$
7.	$3^2.239.4649.$	4.	$73.137.$
9.	$3^4.37.333667.$	5.	$11.9091.$
11.	$3^2.21649.513239.$	6.	$101.9901.$
13.	$3^2.53.79.265371653.$	7.	$11.909091.$
15.	$3^3.31.37.41.271.2906161.$	8.	$17.5882353.$
17.	$3^2.2071723.5363222357.$	9.	$7.11.13.19.52579.$
19.	3^2 ? ———	10.	$101.3541.27961.$
21.	$3^3.37.43.239.1933.4649.10838689.$	11.	$11^2.23.4093.8779.$
23.	3^2 ? ———	12.	$73.137.99990001.$
25.	$3^2.41.271.21401$? ———	13.	$11.859.1058313049.$
27.	$3^5.37.757.333667$? ———	14.	$29.101.281.121499449.$
29.	$3^2.3191.16763.43037$? ———	15.	$7.11.13.211.241.2161.9091.$
31.	$3^2.2791$? ———	16.	$353.449.641.1409.69857.$
33.	$3^3.67.21649.513239$? ———	17.	$11.103.4013.21993833369.$
35.	$3^2.41.71.239.271.4649$? ———	18.	$101.9901.999999000001.$
37.	3^2 ? ———	19.	11 ? ———
39.	$3^3.37.53.79.265371653$? ———	20.	73.317 ? ———
41.	$3^2.83.1231$? ———	21.	$7^2.11.13.127.2689.459691.909091.$

Les barres indiquent les lacunes; mais par une méthode très simple extraite des manuscrits de Fermat on démontre assez rapidement que tous les facteurs de ce tableau sont tous des nombres premiers.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Ed. Lucas.

... La construction relative à π (p. 137) est la même que celle qui est indiquée dans la note 3 (p. 235) du tome II des *Récréations mathématiques*; elle a été donnée dans le *Journal de Crelle* (t. III), il y a plus d'un demi-siècle (*).

... L'erreur signalée par M. Chapron (p. 139) ne se trouve pas dans le *Canon Pellianus* de Degen (Copenhague, 1817). Ce Canon donne toutes les réduites de la racine carrée d'un nombre, jusqu'à 1000. D'ailleurs, les résultats concernant les applications à l'équation de Pell ($x^2 - Ay^2 = \pm 1$) ont été reproduits exactement dans les éditions postérieures de la *Théorie des nombres* de Legendre.

REMARQUE SUR LA QUESTION 139

Par M. **Lucien Lévy.**

Dans le numéro de juillet 1885, M. Delpiron donne une solution de la question suivante que j'avais posée autrefois : « *Mener par un point* A *une droite dont les distances à deux points donnés* B, C, *aient une somme donnée* 2l. *Discuter en faisant varier la position du point* A *dans le plan.* »

La solution que donne le jeune auteur est très incomplète et je voudrais indiquer aux lecteurs ce que je demandais.

(*) La formule que nous avons trouvée dans les archives de Grunert, sans indication bibliographique, et la construction que nous en avons tirée, sont dues à M. Specht. On les retrouve aussi dans l'ouvrage *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, par M. Catalan, 1879, p. 283. Je dirai ici, à ce propos, que les auteurs pourraient rendre un réel service à leurs lecteurs en fournissant, en même temps que leurs démonstrations, les indications bibliographiques correspondantes. Il n'est même pas nécessaire que celles-ci soient complètes, parce que celles qu'on donne suffisent, en général, à mettre sur la trace des autres. G. L.

1° La droite cherchée laisse les deux points B et C d'un même côté.

Solution. — Du milieu O de la droite BC comme centre décrivez une circonférence ayant l pour rayon : il ne reste plus qu'à mener à cette circonférence une tangente par le point A.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse mener du point A une tangente à la circonférence, et que cette tangente laisse les deux points B et C d'un même côté.

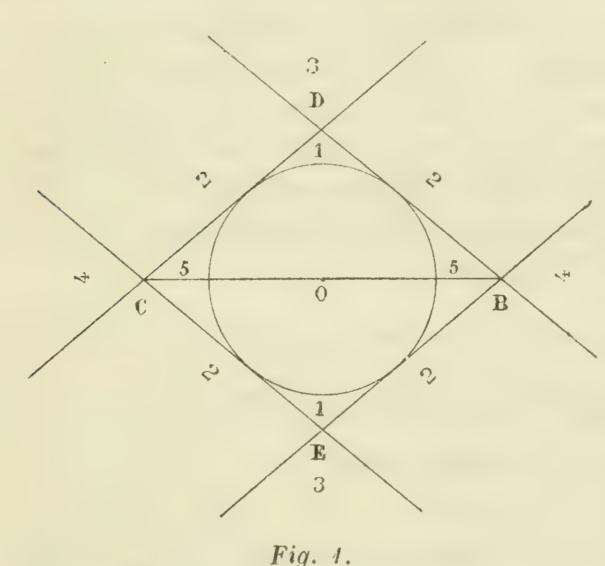


Fig. 1.

Si donc la circonférence enferme les deux points B et C, il suffira que le point A lui soit extérieur. Lorsque, au contraire, les points B et C sont extérieurs à la circonférence, le problème n'aura aucune solution si le point A est intérieur à la circonférence ou dans une des régions marquées 3 et 5 sur la *fig. 1*. Il aura une solution si le point A est dans une des régions 2. Il en aura deux si le point A est dans une des régions 1 ou 4. Le lecteur verra aisément ce qui arrive si le point A est sur une des lignes qui séparent deux régions voisines.

2° La droite cherchée passe entre les deux points.

Solution. — Du point B comme centre avec $2l$ comme rayon décrivons une circonférence; menons une tangente à cette circonférence par le point C; la droite cherchée sera la parallèle à cette tangente menée par le point A.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que le point C soit extérieur à la circonférence. Ensuite le problème

aura deux solutions, si le point A est intérieur au losange BDCE (*fig.* 2); une solution, s'il est dans une des régions marquées 1; zéro solution, s'il est dans une région marquée 0. Le lecteur verra aisément ce qui arrive si le point A est sur une des droites qui séparent deux régions.

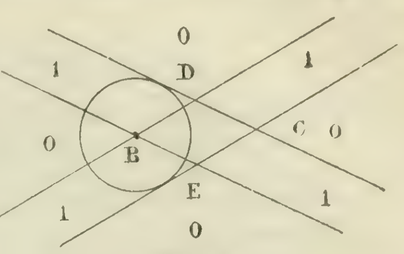


Fig. 2.

Remarque. — Il est facile de voir que les solutions qui disparaissent conviennent aux problèmes où l'on donnerait la différence $2l$ au lieu de la somme $2l$ des distances des points B et C à la droite cherchée.

QUESTION 165 (*)

Solution par M. Edmond Bordage, professeur à Nantua.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

ABCP, DEFQ, *sont deux circonférence concentriques;* ABC, DEF, *deux triangles quelconques inscrits dans ces deux circonférences:* P *et* Q, *des points pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a*

$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2.$$

Soient R et r les rayons des circonférences données et concentriques O.

Abaissons de A, B, C les perpendiculaires AA', BB', CC' sur OQ. Nous aurons

$$\overline{QA}^2 = R^2 + r^2 + 2R.OA'$$
$$\overline{QB}^2 = R^2 + r^2 - 2R.OB$$
$$\overline{QC}^2 = R^2 + r^2 - 2R.OC'.$$

Additionnons, il nous viendra

$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2$$
$$= 3R^2 + 3r^2 + 2R(OA' - OB' - OC').$$

(*) Voyez une autre solution de cette question (J. 1885; p. 284).

Mais ABC étant équilatéral, la somme algébrique

$$OA' - OB' - OC' = o\,;$$

donc

$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 = 3R^2 + 3r^2.$$

Nous aurions de même

$$\overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 = 3R^2 + 3r^2.$$

La relation se trouve donc ainsi démontrée.

Remarque. — Nous pourrions remplacer les triangles équilatéraux par deux polygones réguliers d'un même nombre n de côtés. Les sommes considérées plus haut seraient alors égales à $n(R^2 + r^2)$.

QUESTION 169

Solution par M. Henri Martin, élève au Lycée Condorcet.

Résoudre et discuter l'équation :

$$\sin\left(45^\circ + 3\,\frac{x}{2}\right) = h \sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right).$$

(G. L.)

On a, en développant,

$$\sin 45^\circ \cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\cos 45^\circ = h\left(\sin 45^\circ \cos\frac{x}{2} - \cos 45^\circ \sin\frac{x}{2}\right).$$

En remarquant que

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$$

et en développant $\cos\frac{3x}{2}$ et $\sin\frac{3x}{2}$, il vient

$$\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1 - h\right) = o.$$

On a donc les équations

$$\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = o, \quad (1) \qquad\qquad \sin x = \frac{h-1}{2}. \quad (2)$$

Les valeurs de x qui satisfont à (1) sont données par les formules

$$x = K\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Pour que (2) donne des valeurs acceptables, il faut que

$$(h - 1)^2 < 4,$$

ou

$$(h - 3)(h + 1) < 0.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Fitz-Patrick, élève de mathématiques élémentaires au lycée de Poitiers; René de Vaulchier, élève à l'institution Sainte-Marie, à Besançon; Benezech, au collège de Cette; J. Chapron, à Bragelogne; Anatole Chapellier, élève au lycée de Nancy; Ed. Bordage, professeur au collège de Nantua; Bécla, au collège de Beauvais; Gaston Lamy, élève à l'institution Sainte-Marie.

CONCOURS GÉNÉRAL (1886)

Mathématiques élémentaires.

On donne à l'intérieur d'un cercle de rayon R un point P dont la distance au centre O est égale à a. On mène par P deux cordes rectangulaires AC et BD et l'on considère les tangentes au cercle aux extrémités de ces cordes. Déterminer l'angle APO, de façon que l'aire du quadrilatère convexe EFGH formé par ces tangentes soit égale à une aire donnée K^2.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1886)

Epure (2 heures 1/2).

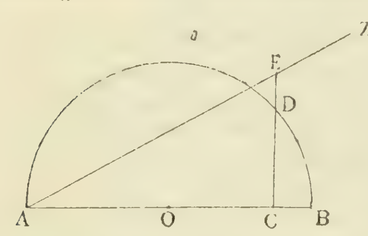
On donne un point A sur la ligne de terre, un point S distant du plan horizontal de 78^{mm}, du plan vertical de 51^{mm}, et du point A de 124^{mm}. Construire le tétraèdre SABC dont la base ABC est sur le plan horizontal de projection, sachant que le plan BSC est perpendiculaire à l'arête SA, et que les angles dièdres AB et AC valent chacun 68°. — On aura soin de placer le point A le plus à gauche possible.

Construire l'intersection de cette pyramide avec le cylindre de révolution qui a SA pour axe et pour rayon 55^{mm}.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est seul et que le solide commun au cylindre et à la pyramide est enlevé.

Mathématiques (3 heures).

I. Les trois côtés d'un triangle forment une progression arithmétique dont on donne la raison ; on connaît le rapport m de la surface de ce triangle à celle du rectangle construit sur les deux plus petits côtés. Calculer les côtés de ce triangle — Discuter. Dans le cas particulier $m = \frac{1}{2}$, calculer le rayon du cercle inscrit dans le triangle.



II. On a un demi-cercle AOB, une droite AZ faisant avec AB un angle aigu donné α ; trouver sur AB un point C tel qu'en élevant par ce point une perpendiculaire à AB on ait $CD + CE = l$.

III. Déterminer les valeurs de x comprises entre 0° et 180° qui satisfont à l'équation $b \operatorname{tg} 3x = a + \sqrt{a^2 + b^2}$.

On fera $a = 42587{,}8$ $b = 36723{,}7$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (*)

FACULTÉ DE LYON

22 juillet 1885 *(Première série)*. — Les bases d'un trapèze sont respectivement 5^m et 9^m, et les diagonales ont pour valeur 13^m et 15^m. On propose de calculer l'angle des diagonales et la hauteur du trapèze.

23 juillet. — Trouver un nombre de 2 chiffres tel que divisé par le produit de ces 2 chiffres, il donne 16/3 pour quotient et que si l'on en retranche 9, on obtienne le nombre renversé.

24 juillet. — Les trois côtés de la base d'un pyramide triangulaire sont égaux à $3^m{,}90$, $4^m{,}20$, $4^m{,}50$. Le volume de cette pyramide est égal à $12^{mc}{,}096$. On demande la surface d'une section faite parallèlement à la base à une distance du sommet égale à $1^m{,}6$.

25 juillet. — I. Un ouvrier dépose, au commencement de chaque semaine une somme a à la caisse d'épargne, pendant n années consécutives. Quel est, après ce temps, le montant M de son livret? Le taux est de r pour un franc et les intérêts se capitalisent à la fin de chaque année.

Application : On fera le calcul de M en admettant que $a = 2$ francs, $n = 10$, $r = 0$ fr. 035.

II. — On lance une pierre verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de 20^m par seconde; 2 secondes après, du même point

(*) Nous devons la connaissance de ces énoncés et celle de plusieurs autres qui seront publiés dans le prochain numéro à l'obligeance de M. Bordage.

on lance une pierre verticalement de bas en haut avec une vitesse de 25^{m}. On demande à quelle distance du point de départ les 2 pierres se rencontreront, si ce sera en montant ou en descendant et après combien de secondes après l'instant auquel on a lancé la première pierre.

27 juillet. — On fait tourner le triangle rectangle BCA autour de l'axe MN qui est parallèle à l'un des côtés de l'angle droit. On demande quelle doit être la distance AM pour que le volume engendré par le triangle rectangle soit égal à $20^{mc},88$. — On donne $AB = 2^{m},6$ et $AC = 2^{m},54$.

29 juillet. — Deux villes A et B sont éloignées de 200 kilom. Un chemin de fer rectiligne AX, partant de A, passe à 87^{km} de B. On propose de construire une route ordinaire allant de B au chemin de fer, de telle sorte que le trajet des marchandises allant de B en A ou de A en B soit le moins coûteux possible en supposant que le port soit deux fois moindre sur le chemin de fer que sur la route. A quelle distance de A devra être placée la station qui reliera B à ce chemin de fer AX?

30 juillet. — Inscrire dans une sphère donnée un cône circulaire droit, de manière que la surface latérale de ce cône soit équivalente à celle de la calotte sphérique de même base que le cône. — Calculer l'angle au sommet de ce cône.

26 octobre. — Une personne verse, dans une banque, une somme S, au commencement de chaque année, pendant n années consécutives. On demande quelle somme A elle doit recevoir au commencement de chaque année pendant les 24 années suivantes pour être entièrement remboursée de ses avances. — Le taux est r pour un franc. — Quel doit être n pour que A soit précisément égal à S?

4 novembre. — I. Un triangle ABC est inscrit dans une sphère dont le rayon est de $4^{m},75$. Les 3 côtés du triangle sont $a = 2,^{m}50$, $b = 3,^{m}25$ $c = 1^{m},35$. — On demande de calculer à $\frac{1}{100}$ près la perpendiculaire abaissée du pôle de ce triangle sur son plan.

II. Résoudre l'équation $3 \cos x + 4 \sin x = 5$.

6 novembre. — Le rayon de la base d'un cône droit est de 3^{m}, et celui de la sphère inscrite dans ce cône $= 2^{m}$. On propose, d'après ces données, de calculer la surface et le volume de ce cône, ainsi que l'angle que font les génératrices avec l'axe.

9 novembre. — Sur une droite XX', on marque n points distants de la même longueur a, A, B, ... N et on les numérote 1, 2, ... n. Trouver la distance au premier point A d'un point y de la droite tel que la somme des carrés de ses distances Ay, By, ... Ny aux autres points donnés, multipliés par les numéros 0, 2, ... n correspondants : $1 \times \overline{Ay}^2 + 2 \times \overline{By}^2 + \ldots\ldots + n \times \overline{Ny}^2$ soit un maximum.

11 novembre. — La surface d'un triangle est de 15^{mq} et les longueurs de deux des côtés sont de 0^{m} et de 5^{m}. On propose de déterminer la longueur du troisième côté et les angles de ce triangle.

QUESTIONS PROPOSÉES

215. — On considère un triangle équilatéral ABC et le cercle Δ, inscrit à ce triangle. Du point O, centre de Δ, avec une longueur égale au quart du rayon de Δ, comme rayon, on décrit un cercle Δ'. Parallèlement aux côtés BC, CA, AB on mène à Δ', *dans le même sens*, des semi-tangentes qui rencontrent Δ respectivement aux points α, β, γ. Le triangle $\alpha\beta\gamma$, ainsi formé, est équilatéral, pour des raisons évidentes ; démontrer : 1° que les côtés de ce triangle $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ passent respectivement par les sommets A, B, C du triangle proposé ; 2° qu'ils sont égaux à la moitié de ceux de ce triangle.

(G. L.)

N.-B. — En prenant les semi-tangentes opposées à celles qui sont considérées dans l'énoncé précédent, on détermine un second triangle équilatéral $\alpha'\beta'\gamma'$ qui jouit, bien entendu, des mêmes propriétés que celles que nous proposons de reconnaître au triangle $\alpha\beta\gamma$.

216. — Un triangle ABC étant inscrit à un cercle, soient EDF le diamètre perpendiculaire au côté AB, et G la projection de C sur EF : la demi-somme des côtés AC, BC est moyenne proportionnelle entre les segments DF, GE ; leur demi-différence est moyenne proportionnelle entre les segments DE, FG.

(Catalan.)

Nota. — Dans l'énoncé de la question 203, question dont nous avons déjà reçu plusieurs bonnes solutions, nous avons omis de dire que A désignait le point de contact de Δ et de Δ'.

G.L.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13834-6.

L'OMNIFORMULE DE CUBATURE

Par M. **Casimir Rey**

(*Fin*, voir p. 148.)

31. Note IV. — En 1848 (*Nouvelles Annales*, t. VII), Finck publia un mémoire que nous avons utilisé dans une partie de notre travail et la formule de cubature dont nous nous occupons ici, fut nommée formule de Finck par les élèves de l'éminent professeur de Strasbourg.

Cependant il terminait ainsi son mémoire :

« Tout cela est renfermé dans un théorème de Sarrus dont voici l'énoncé :

» *Si dans un corps, toute section parallèle à un plan donné a son aire exprimée par* $A + Bz + Cz^2$ *où* z *est la distance de la section au plan ;* A, B, C *sont des constantes ; un segment quelconque, renfermé entre deux plans parallèles au même plan, se mesure par*

$$\frac{h}{6}(b + 4b' + b'')$$

» Un peu d'intégral suffit pour la démonstration (*b*, *b'* sont les sections extrêmes, *b''* est la section équidistante des premières). »

Cette déclaration a conduit sans doute M. Dupuis. l'auteur des Recherches sur le Nombre de Platon, à nommer du nom de Sarrus, la formule dont il donne seulement l'énoncé dans la dernière édition de ses *Tables de logarithmes*.

Mais voici ce que nous écrit le capitaine Brocard qui a bien voulu nous aider de ses excellents conseils pendant la rédaction de notre travail et dont tous les lecteurs des journaux de mathématiques connaissent les belles découvertes géométriques, la grande érudition :

« Il serait extrêmement intéressant de trouver trace de ce théorème dans un écrit de Sarrus, pour mon compte je n'en ai pas remarqué... Consulter sur le même sujet (*Journal de Crelle*, t. XLV, 1853) une note d'August de Berlin relative à une formule de cubature qu'il avait fait connaître dès 1849

dans un programme scolaire (volumes de révolution du second degré). L'auteur remarque l'application de sa formule aux obélisques, comme Finck l'avait observé dans sa Géométrie (3me édition, p. 458). Il cite comme ayant employé ou signalé cette formule Chapman, Prony, Eytevelein, Poncelet, Brix, Steiner.

» Steiner en a même donné une démonstration géométrique (*Journal de Crelle,* t. XXIII, p. 275). »

Le *Bulletin de la Société de statistique de l'Isère* (1882) contient sur la question un intéressant travail de notre collègue M. Latars.

Le théorème fondamental du § 5, accompagné de quelques applications, est actuellement enseigné par beaucoup de professeurs ; il se trouve dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse § 656, dans celui de M. Vacquant § 659, dans l'*Appendice aux Exercices de Géométrie*, par F.I.C et probablement dans beaucoup d'autres ouvrages.

M. Bertrand (*Traité de Calcul intégral*, chap. II, p. 409), donne la formule pour les volumes engendrés par une surface plane $s = A_0z^2 + A_1z + A_2$ se mouvant parallèlement à elle même dans le sens des z et M. de Longchamps nous signale la thèse de M. Pujet (*Des Quadratures,* juillet 1868) dans lequel le vœu émis § 1 est déjà exprimé.

Dans une note ajoutée au mémoire de Finck, Terquem revendiquait le Théorème en faveur de Koppe qui en 1838 avait publié (*Journal de Crelle*, t. XVIII) le théorème suivant :

« *Un corps, ayant pour bases deux polygones parallèles et pour face des trapèzes, est équivalent à un prisme ayant pour base l'aire de la section parallèle faite à égale distance des deux bases, et augmenté du douzième de l'aire du polygone qui a les mêmes angles que les polygones et qui a pour côtés les différences des côtés homologues.* »

Enfin quelques-uns attribuent le théorème à Maclaurin, d'après un article de M. Maleix publié dans les *Nouvelles Annales* (t. XIX, 1880, sur l'évaluation de certains volumes) où l'auteur dit :

« On retrouve pour expression V, dans ces hypothèses,

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3),$$

formule due à Maclaurin (Fluxions n° 848; 1742). » Or dans son *Traité des fluxions* Maclaurin ne s'occupe pas de cubatures et la formule du n° 848 n'a que la forme de l'omniformule, comme on va le voir.

Le n° 848 du *Traité des fluxions* fait partie du chapitre IV (livre II) intitulé :

« De l'aire des figures quand leur ordonnée est exprimée par une fluente. » (Une fluente est une fonction dont on considère les dérivées ou fluentes successives.)

Dans le n° 848, Maclaurin considère l'aire AF*fa* comprise entre les ordonnées FA, *fa*.

Il appelle A la somme des ordonnées FA et *fa*; B l'ordonnée BE équidistante de FA et *fa*; R la ligne A*a* et il démontre que :

« L'aire $AFfa = \frac{A + 4B}{6} R - \frac{R^4 \delta}{9 \times 720} + \frac{R^6 \zeta}{81 \times 3240}$, etc. »

δ, ζ etc. sont ce que nous appelons actuellement les différences 3me, 5me, etc. de y par rapport à l'abscisse, pour $y_1 = fa$, $y_0 = FA$. Les abscisses sont comptées à partir du point O.

Maclaurin observe que si l'on néglige δ, ζ etc. l'aire devient

$$\frac{A + 4B}{6} R.$$

mais il n'indique pas, ou plutôt il ne rappelle pas, quand ces différences sont négligeables et il ne traite pas l'application aux cubatures.

Si un nom d'auteur devait être donné à la formule, celui de Simpson pourrait être mis en avant, avec des titres à la revendication, plus justifiés que ceux des savants déjà cités.

Il est de fait impossible d'attacher un nom d'auteur à toutes les formules. Beaucoup d'entre elles ont un grand nombre d'ascendants et la recherche de la paternité ne conduit alors, le plus souvent, qu'à des discussions stériles. Dans ce cas, le mieux n'est-il pas de choisir un nom de qualité au lieu d'un nom propre?

C'est ce qui nous conduit ici à proposer le nom d'*omniformule de cubature*; il se justifie de lui-même et nous serons heureux de le voir adopter.

PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Par M. **Ed. Guillet**, professeur au Lycée d'Avignon.

(*Fin*, voir p. 121).

Valeur absolue de la vitesse de la sphère en un point quelconque de sa trajectoire. — Prenons pour origine le point de départ de la branche parabolique sur laquelle se trouve le point considéré et pour axes de coordonnées, une horizontale et une verticale passant à l'origine.

Désignons par V_0 la vitesse de départ sur cette branche parabolique; par H la distance de l'origine à la directrice commune; par V_x et V_y les projections horizontale et verticale de la vitesse V à l'époque t; par β l'angle de la vitesse de départ avec la normale au plan incliné; enfin par x et y les coordonnées du point considéré.

Nous avons

$$\begin{cases} V_0^2 = 2gH \\ V_x = V_0 \sin(\alpha + \beta) \\ V_y = V_0 \cos(\alpha + \beta) - gt \\ x = V_0 t \sin(\alpha + \beta) \\ y = V_0 t \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$

Puisque $V^2 = V_x^2 + V_y^2$, on aura

$$V^2 = V_0^2 - 2gtV_0 \cos(\alpha + \beta) + g^2t^2$$

Or, si on laissait simplement tomber la sphère du point de la directrice commune situé verticalement au-dessus du point considéré, la vitesse V_1 acquise dans cette chute libre de hauteur H — y, serait donnée par la formule

$$V_1^2 = 2g(H - y),$$

En remplaçant H par $\frac{V_0^2}{2g}$ et y par $V_0 t \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} gt^2$, on aura :

$$V_1^2 = {}_0^2 - 2gtV_0 \cos(\alpha + \beta) + g^2t^2,$$

On voit ainsi que, quel que soit t, on a toujours

$$V = V_1.$$

c'est-à-dire, *qu'en un point quelconque de sa trajectoire, la vitesse absolue de la sphère est la même que si cette sphère tombait directement en ce point à partir du point de la directrice commune qui lui est verticalement superposé.*

On a vu, qu'en particulier, les vitesses B′, B″... peuvent être obtenues par les chutes libres K′B′, K″B″...

Cas particuliers. — Les solutions et considérations qui précèdent s'appliquent à une valeur quelconque de l'angle α du plan incliné avec le plan horizontal.

1° Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand le plan donné est horizontal, les résultats généraux deviennent

$$A = A' = A'' = \ldots = 0$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha'' = \ldots = 0$$
$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots = 0$$

Mouvement sur le plan horizontal. — Après un certain nombre de bonds, dépendant de la longueur du plan incliné, la sphère viendra rencontrer le plan horizontal en un certain point B.

Supposons, comme le représente notre figure, que la troisième branche parabolique ait une de ses extrémités B″ au-dessus du plan horizontal et l'autre extrémité B‴ au-dessous du même plan ; cette branche se termine sur le plan horizontal OXX′ en un point B_1 que nous nous proposons de déterminer.

Pour cela nous rappellerons qu'en un point quelconque d'une parabole, la sous-normale est constamment égale à la distance F″D″ du foyer à la directrice et la sous-tangente est double de la distance du sommet au pied de la perpendiculaire abaissée du point considéré sur l'axe.

Nous prendrons donc GR = F″D″ et S″V = S″G pour décrire ensuite sur VR comme diamètre une demi-circonférence qui coupe la trace OXX′ du plan horizontal précisément au point B_1 cherché.

La tangente à la branche $B''S''B_1$ en B_1 est la droite B_1V et, en prenant l'angle $K_1B_1C_1$ égal à l'angle K_1B_1V on aura suivant B_1C_1 la direction de la vitesse initiale du premier bond tout entier sur le plan horizontal.

Nous savons d'ailleurs que la vitesse suivant B_1C_1 est égale

à celle que produirait la chute directe de la sphère suivant K_1B_1 ; nous déterminerons donc les éléments de cette quatrième branche comme nous l'avons fait pour les précédentes. Le deuxième point d'intersection X′ avec le plan horizontal sera symétrique de B_1 par rapport à l'axe $D_1F_1E_1$ de cette branche; de plus la vitesse en X′ sera égale à la vitesse en B_1 et également inclinée sur le plan horizontal.

On aura ainsi sur le plan horizontal une série indéfinie de bonds identiques ayant leurs sommets et leurs foyers sur deux droites parallèles à la directrice commune AD_1.
c'est-à-dire que les amplitudes et les angles de réflexion sont toujours nuls. On a donc un mouvement vertical alternatif indéfini, dans lequel la durée constante de chaque oscilation complète est $\frac{2v_0}{g}$ ou $2\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

C'est un résultat connu.

2° Dans le cas particulier où $\alpha = 45°$, la droite des foyers sera verticale et, par suite, aussi celle des sommets. Nous aurons une série de branches paraboliques ayant toutes leurs sommets et leurs foyers sur la verticale du point de départ A et pour directrice commune l'horizontale ADD′... Ces paraboles seront faciles à construire car les amplitudes sont

$$A = 8h,$$
$$A' = 16h,$$
$$A'' = 24h, \ldots \text{ etc.}$$

et la connaissance d'un point B′ entraîne celle des foyers F et F′ et des sommets S et S′ puisque la directrice ADD′ est déterminée.

PRODUIT DES TERMES D'UNE PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

Par M. **Charles Guieysse**, élève à l'École Monge.

Soit une progression arithmétique

$$a + r, \quad a + 2r, \ldots a + mr,$$

et soit le produit

$$P = (a + r)(a + 2r) \ldots (a + mr),$$

on a :

$$P = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} r + A_2 a^{m-2} r^2 + \dots + A_m r^m.$$

Pour former le terme $A_0 a^m$ nous avons pris a dans les m binômes ; donc

$$A_0 = 1.$$

Pour former l'ensemble $A_1 a^{m-1} r$, nous avons pris tous les termes comprenant $m - 1$ fois a et 1 fois r ; donc A_1 constitue la somme des produits 1 à 1 des m premiers nombres, somme que nous désignerons par le symbole S_1.

$$A_1 = S_1.$$

De même, nous avons :

$$A_2 = S_2,$$
$$A_3 = S_3,$$
$$\dots \quad \dots$$
$$A_m = S_m.$$

D'où (en posant pour généraliser $S_0 = 1$)

$$P = S_0 a^m + S_1 a^{m-1} r + S_2 a^{m-2} r^2 + \dots + S_m r^m.$$

Si nous faisons $a = r = 1$ nous avons le développement d'un factoriel en une somme de termes :

$$(m + 1)\,! = S_0 + S_1 + S_2 \dots + S_m.$$

Les termes S_0 S_1 ... S_p ... S_m ont une loi de formation bien déterminée, traduisons cette loi par une équation algébrique.

Première formule. — Calculons S_p en fonction des termes précédents S_{p-1} ... et en fonction de S', S' ... S'_p. Nous désignons ainsi la somme des puissances 1me, 2me ... p^{me} des m premiers nombres.

Nous avons $S_0 = 1$,

et $S_1 = S_1'$.

Calculons S_2 ; S_2 résulte de la sommation :

$$\Sigma\alpha\beta,$$

α et β étant deux nombres quelconques de la suite 1 ... m.

Considérons l'un des facteurs, α par exemple, comme fixe et faisons varier β ; β prendra toutes les valeurs dont la somme constitue S_1, sauf cependant α, donc :

$$\Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha(S_1 - \alpha).$$

Maintenant faisons varier α :

$$\Sigma\alpha\beta = 1(S_1 - 1) + 2(S_1 - 2) \dots + m(S_1 - m).$$

Effectuons les différentes multiplications et groupons :

$$\Sigma\alpha\beta = S_1S'_1 - S'_2.$$

Mais α, en variant, a pris les valeurs β, donc le même terme s'est formé deux fois, et comme S_2 n'admet que des termes différents, on a :

$$2S_2 = S_1S'_1 - S'_2,$$

ou

$$2S_2 - S_1S'_1 + S'_2 = 0.$$

Remarquons que $2 = 2\,! = P_2$ (nous appelons, suivant l'usage, P_n le nombre des permutations de n objets).

Calculons S_3 ; S_3 résulte de la sommation

$$\Sigma\alpha\beta\gamma.$$

Considérons α comme fixe et $\beta\gamma$ comme variable.

$\beta\gamma$ prendra toutes les valeurs dont la somme constitue $2S_2$ sauf celles contenant α c'est-à-dire $\alpha(S_1 - \alpha)$. Donc

$$\Sigma\alpha\beta\gamma = \Sigma\alpha[2S_2 - \alpha(S_1 - \alpha)]$$

ou

$$\Sigma\alpha\beta\gamma = 1[2S_2 - 1(S_1 - 1)] + 2(2S_2 - 2(S_1 - 2)] + \ldots + m[2S_2 - m(S_1 - m)].$$

Effectuant et groupant :

$$\Sigma\alpha\beta\gamma = 2S_2S'_1 - S_1S'_2 + S'_3.$$

Dans $\Sigma\alpha\beta\gamma$ il y a répétition de termes, chacun des termes se trouve répété autant de fois qu'il y a de permutations de trois lettres.

Donc on a :

$$3\,!\,S_3 - 2\,!\,S_2S'_1 + S_1S'_2 - S_3 = 0.$$

Le raisonnement sera le même pour le terme général. On aura :

$$p!\,S_pS'_0 - (p-1)!\,S_{p-1}S'_1 + (p-2)!\,S_{p-2}S'_2 + \ldots + (-1)^k(p-k)!\,S_{p-k}S'_k + \ldots + (-1)^p o!\,S_0S'_p = 0;$$

pour donner plus de symétrie à cette formule nous posons

$$S'_0 = S_0 = o! = 1.$$

Cette formule présente une sorte d'homogénéité indiquée par les indices de S et S'; il suffit de considérer la valeur des symboles pour voir que dans chaque terme il y a le produit de p termes égaux ou différents.

Deuxième formule. — Aux indices inférieurs, déjà expliqués, joignons des indices supérieurs indiquant le nombre de termes de la progression arithmétique.

S_p^m désignera la somme des produits p à p des m premiers nombres.

Si l'on considère les termes entrant dans S_p^m et dans S_p^{m-} , on a évidemment

$$S_p^m - S_p^{1-m} = mS_{p-1}^{m-1};$$

d'où, en remarquant qu'il faut supposer $m \geqslant p$,

$$S_p^m - S_p^{m-1} = mS_{p-1}^{m-1}$$
$$S_p^{m-1} - S_p^{m-2} = (m-1)\,S_{p-1}^{m-2}$$
$$S_p^{m-2} - S_p^{m-3} = (m-2)\,S_{p-1}^{m-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_p^{p+1} - \quad S_p^p = (p+1)\,S_{p-1}^p$$

Additionnons et réduisons :

$$S_p^m - S_p^p = mS_{p-1}^{m-1} + (m-1)S_{p-1}^{m-2} + (m-2)S_{p-1}^{m-3} + \ldots + (p+1)S_{p-1}^p.$$

Observant que $S_p^p = p\,! = p \times (p-1)\,! = pS_{p-1}^{p-1}$ il vient finalement :

$$S_p^m = mS_{p-1}^{m-1} + (m-1)S_{p-1}^{m-2} + (m-2)S_{p-1}^{m-3} + \ldots + (p+1)S_{p-1}^p + pS_{p-1}^{p-1}.$$

Dans la première formule les indices inférieurs changeaient; dans cette seconde, ce sont les indices supérieurs, après l'abaissement d'une unité de l'indice inférieur.

On peut à l'aide d'une des deux formules précédentes calculer, par voie récurrente, tous les termes du développement du produit des termes d'une progression arithmétique.

GÉNÉRALITES SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 154.)

---

14. Correspondances diverses. — Mais on rencontre encore dans la géométrie du triangle des points qui sont associés les uns aux autres par des lois géométriques plus complexes que les précédentes, bien que relativement très simples.

Imaginons deux points M, M′ dont les coordonnées vérifient les égalités

$$(M)\quad \frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C},\qquad (M')\quad \frac{\alpha'}{A'}=\frac{\beta'}{B'}=\frac{\gamma'}{C'};$$

considérons maintenant un point M″ (α'', β'', γ'') associé aux précédents au moyen des formules

$$\frac{\alpha''}{\left(\frac{A}{A'}\right)}=\frac{\beta''}{\left(\frac{B}{B'}\right)}=\frac{\gamma''}{\left(\frac{C}{C'}\right)},$$

et proposons nous de trouver le point M″.

Nous avons :

$$\frac{B\mu}{C\mu}=\frac{C}{B},\qquad \frac{B\mu'}{C\mu'}=\frac{C'}{B'}$$

et

$$\frac{B\mu''}{C\mu''}=\frac{\left(\frac{C}{C'}\right)}{\left(\frac{B}{B'}\right)}=\frac{\left(\frac{C}{B}\right)}{\left(\frac{C'}{B'}\right)}=\frac{\left(\frac{B\mu}{C\mu}\right)}{\left(\frac{B\mu'}{C\mu'}\right)}.$$

Cette dernière fraction représente le rapport anharmonique des points (B, C, μ, μ'). Menons par C une parallèle à $A\mu'$, nous avons

$$\frac{\frac{B\mu}{C\mu}}{\frac{B\mu'}{C\mu'}}=\frac{HK}{HC},$$

et, par conséquent,

$$\frac{B\mu''}{C\mu''}=\frac{HK}{HC}.$$

Ainsi la droite $\mu''H$ est parallèle à AB. On peut donc, par cette construction assez simple et n'exigeant d'ailleurs que l'emploi de la règle et de l'équerre, tracer la droite $A\mu''$ qui passe par le point cherché M″. On déterminera complètement ce point en répétant le tracé indiqué pour l'un des deux autres côtés.

Une autre association qui, au premier abord, paraît plus difficile à réaliser géométriquement est celle qui correspond

aux formules (M) et (M′) et à la suivante :

$$\frac{\alpha''}{AA'} = \frac{\beta''}{BB'} = \frac{\gamma''}{CC'}. \qquad (M'')$$

Mais si l'on considère le point M_0, réciproque du point M, on a

$$\alpha\alpha_0 = \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0,$$

et, par suite,

$$A\alpha_0 = B\beta_0 = C\gamma_0.$$

Les formules (M″) s'écrivent alors

$$\frac{\alpha''}{\left(\frac{A'}{\alpha_0}\right)} = \frac{\beta''}{\left(\frac{B'}{\beta_0}\right)} = \frac{\gamma''}{\left(\frac{C'}{\gamma_0}\right)}$$

et l'on retombe dans le cas que nous avons résolu à l'instant.

15. Potentiels d'ordre p. — Généralisons maintenant cette idée d'association entre un point donné et un point correspondant, et convenons de dire qu'un point $M'(\alpha', \beta', \gamma')$ est le p^{me} potentiel (*) d'un point donné $M(\alpha, \beta, \gamma)$, lorsque les égalités

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}, \qquad (M)$$

et

$$\frac{\alpha'}{A^p} = \frac{\beta'}{B^p} = \frac{\gamma'}{C^p}, \qquad (M')$$

sont vérifiées.

En appliquant, de proche en proche, la construction que nous venons d'indiquer à la fin du paragraphe précédent, on obtiendra, successivement, les potentiels d'ordre 2, 3, etc.

Mais cette construction offre quelques longueurs que l'on peut éviter et nous nous proposons d'établir certaines constructions rapides pour les potentiels les plus simples, ceux de l'ordre 2, 3 ou 4.

(A suivre.)

(*) Cette expression commode est de M. Neuberg.

NOTES SUR LES QUESTIONS 5, 130 ET 140

Par **Émile Vigarié.**

Sur la question n° 5. — Cette question proposée en 1882 par M. J. Neuberg et résolue en 1884 par M. Madiot est ainsi énoncée :

A tout triangle ABC on peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de ABC. Ces triangles sont inscriptibles dans une circonférence ayant pour centre le point de Lemoine de ABC.

Cette même proposition avait été énoncée par M. Neuberg, dans son « *étude sur le centre des médianes antiparallèles* » (*Mathésis* t. I, 1881, p. 185-186). Elle peut encore se déduire des propositions suivantes : (E. Lemoine, *Association française*, Lille 1874. § 2).

1° Si on considère tous les rectangles inscrits à un triangle ABC et dont l'un des côtés repose sur l'un des côtés BC du triangle, le lieu du centre de ces rectangles sera la droite qui joint le milieu de BC au milieu de la hauteur correspondante.

2° Le point de Lemoine est le centre de trois rectangles, inscrits dans un triangle, et ayant deux côtés perpendiculaires à ceux du triangle donné.

3° Le point de Lemoine est tel que les antiparallèles aux côtés du triangle menées par ce point sont égales (E. Lemoine, Lyon 1873, § 8), ce qui peut s'énoncer en disant que :

Le point de Lemoine est le centre d'un cercle qui coupe les côtés du triangle en des points diamétralement opposés. (A. Morel, « *Étude sur le cercle de Brocard* ». (J. M. E.; 1883, p. 197.)

Si en effet par le point K de Lemoine on mène les antiparallèles A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b à BC, AC, AB, on a trois rectangles $C_bB_cC_aB$, $A_cC_aA_bC_b$, $B_aA_bB_cA_c$; les deux triangles $C_aA_bB_c$, $B_aC_bA_c$ satisfont à l'énoncé de la question n° 5 ; le rapport de similitude de ces triangles à ABC est égal à tg α (α étant l'*angle de Brocard*) ; la longueur commune des anti-

parallèles aux côtés du triangle est égale à :

$$\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Enfin les six points C_b, B_c, A_c, C_a, B_a, A_b sont deux à deux diamétralement opposés sur une même circonférence ayant le point de Lemoine pour centre et pour diamètre les antiparallèles précitées. Cette circonférence est appelée *deuxième cercle de Lemoine.*

Sur la question n° 130. — Énoncée par M. Perrin (1884) nous en avons donné une solution (1885, p. 211) et le théorème que nous avons donné à la fin est dû, comme nous le pensions à M. G. Dostor (*Mathésis*, 1881, t. I, p. 156). Cette question 130, se trouve résolue dans les « *Questions de géométrie élémentaire* » de M. Desboves (p. 238, 3e édition, 1880).

Elle a encore été proposée sans nom d'auteur dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1859, question 485, p. 357) et a été résolue par M. E. Françoise en 1860 (p. 13-14).

A ces propositions se rattachent les suivantes qui ont une grande analogie (*N. A. M.*, questions 483, 484, proposées en 1859, p. 357, résolues en 1860, p. 11-12 et 13) :

D'un point B extérieur à une circonférence O on mène deux tangentes BA, BC, on projette C en D sur le rayon OA ; si on fait exécuter une résolution complète autour de OA :

1° Le segment sphérique engendré par CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

2° Le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BDA.

C'est en s'appuyant sur cette seconde partie que M. Charodon a donné une seconde solution de la question 130 (*N. A. M.*, 1860, p. 188-189).

Sur la question n° 140. — Cette question proposée par M. L. Lévy, et résolue dans ce journal (1885, p. 22) est ainsi énoncée :

Si d'un point O *pris sur une circonférence de diamètre* AB, *on*

décrit une circonférence tangente à AB, *les tangentes* AA′, BB′ *à cette circonférence, issues de* A *et* B, *sont parallèles.*

Si l'on observe que A′B′ est un diamètre de la circonférence O tangent en O à la circonférence AB et que AO, BO sont deux droites rectangulaires, il est évident que la question aurait pu être énoncée ainsi :

Si par le centre O *d'une circonférence donnée, on mène deux droites rectangulaires* AO, BO *et que par un point quelconque* P *de la circonférence, on mène une tangente ; elle coupera les droites* AO, BO *en des points* A, B *tels que les tangentes issues de ces points sont parallèles.*

Sous cette forme, il est facile de voir que c'est un cas particulier de la proposition plus générale suivante, dont M. Kœhler a donné deux démonstrations, l'une analytique, l'autre géométrique. (Voir *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, 1886, p. 90-91, première partie):

Par un point O, *on mène deux droites conjuguées par rapport à une conique ; une tangente quelconque les coupe en deux points* A, B *tels que les deux autres tangentes menées par les points* A, B *se coupent sur la polaire de* O.

BIBLIOGRAPHIE

Nous avons reçu de M. N. Philippof, de Saint-Pétersbourg, une très curieuse et très intéressante brochure ayant pour titre *Simplification du calcul algébrique*. Cette note est écrite dans la langue russe et il nous eût été impossible de découvrir même le principe de ce travail, si l'auteur, en nous l'adressant, n'avait eu l'obligeance de l'accompagner d'une lettre française, explicative et très détaillée. Cette lettre nous a permis de comprendre la pensée qu'a eue M. Philippof et qui nous paraît de nature à intéresser nos lecteurs.

Voici quelle est la base de la simplification que propose M. Philippof.

Prenons le nombre 356 dans le système décimal; en réalité, ce nombre devrait s'écrire

$$3.10^2 + 5.10 + 6;$$

et, plus généralement, dans un système de base x,

$$3x^2 + 5x + 6.$$

Partant de là, et à l'imitation de l'écriture symbolique de l'arithmétique, on peut convenir d'écrire la forme algébrique

$$ax^2 + bx + c,$$

de la manière suivante :

$$a \quad b \quad c,$$

ou

$$c \quad b \quad a,$$

suivant que la fonction entière sera ordonnée suivant les puissances décroissantes ou croissantes de la lettre ordonnatrice. M. Philippof adopte la deuxième convention et supprime purement et simplement la lettre ordonnatrice qu'il considère comme un encombrement et une superfluité de l'écriture algébrique. Celle-ci, déjà symbolique, devient donc, dans l'écriture proposée, plus symbolique encore; en un mot, c'est un symbole au-dessus du symbole ordinaire.

Lorsqu'on veut expliciter les signes des coefficients, on place le signe — au-dessus du coefficient négatif considéré et l'on écrit, par exemple,

$$3 - 5x + 4x^2 = 3 \quad \bar{5} \quad 4,$$
$$5 + 3x^2 = 5 \quad 0 \quad 3,$$

etc. Sans doute, l'écriture est moins explicite; mais elle gagne en rapidité ce qu'elle a perdu, pour les yeux, en clarté. Il ne faut pas d'ailleurs, au moins *à priori*, se révolter contre ces notations abrégées (*). Il convient seulement, croyons-nous, de les soumettre à la pratique pour voir si, oui ou

(*) L'expression (citation déjà faite à titre de curiosité; C. M. S, t. I; p. 119.)

$$\frac{2b^3 - d^3}{zb - 3d^2},$$

s'écrivait autrefois

$$\frac{b \text{ cub. bis} - d \text{ cub}}{z \text{ in } b - d \text{ q ter}};$$

(V. *Journal Sp.*, 1883, p. 17, *lettre de Fermat à Mersenne.*)

On peut supposer, croyons-nous, que la notation des exposants, proposée par Descartes, malgré tous ses avantages, a dû gêner, au début,

non, on effectue, avec elles, plus vite, et plus sûrement, les calculs algébriques.

Voici quelques exemples, choisis parmi les plus simples, pour qu'ils soient saisis plus vite, des calculs effectués par la méthode de M. Philippof.

1° On propose de multiplier :

$$1 + 5x^2 \quad \text{et} \quad 2 + x.$$

On écrit les symboles correspondants et on effectue la multiplication suivante

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 0 & 5 \\ & & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & \underline{0} \\ \hline 2 & 1 & 10 & 5 \end{array} \qquad \text{(A)}$$

Le résultat s'écrit, symboliquement,

$$2 \quad 1 \quad 10 \quad 5\,;$$

ou, si l'on veut revenir à la forme explicite,

$$2 + x + 10x^2 + 5x^3.$$

Mais ce calcul même, ou plutôt sa représentation figurative, se trouve encore modifié et simplifié par la convention suivante.

Au lieu d'écrire les multiplications partielles comme on le fait en arithmétique et comme le rappelle le tableau (A), observant que le zéro qui est souligné est un signe inutile ;

---

ceux qui étaient familiarisés avec l'ancienne notation; elle n'en a pas moins fait son chemin.

Pour citer un autre exemple moins ancien et qui sera mieux adapté à notre pensée, qui ne sait tous les services que les notations abrégées rendent aujourd'hui à la géométrie analytique. Elles étaient pourtant, si nous nous rappelons bien, fort peu employées, il y a de cela quelques années; les élèves qui ont un penchant très marqué pour les notations explicites, se sont pourtant peu à peu habitués à cette nouvelle écriture qui est aujourd'hui, et avec raison, fort appréciée. La notation de M. Philippof, je crois pouvoir le lui prédire en toute certitude, ne triomphera pas, de longtemps, des habitudes prises; mais si elle porte vraiment avec elle une simplification notable des calculs algébriques, qu'il se rassure, elle percera; lentement peut-être mais sûrement.

A propos de la notation cartésienne des exposants, citée plus haut, le mérite de son invention paraît remonter au géomètre Estienne de la Roche qui vivait au XVI[e] siècle. On pourra consulter, sur ce point historique intéressant, une note publiée dans les *Nouvelles Annales*, 1847, p. 35.

qu'à ce titre il doit être rejeté de l'écriture. si l'on veut rendre celle-ci aussi rapide que possible, M. Philippof propose de substituer à l'écriture habituelle des multiplications, écriture qui conduit à la *forme parallélogramme*, une disposition de *forme rectangulaire* et il représente la multiplication précédente de la manière suivante

$$\begin{array}{cccc|c} & 1 & 0 & 5 & \\ & & 2 & 1 & \\ \hline & 2 & 0 & 10 & A \\ & 1 & 0 & 5 & B \\ \hline 2 & 1 & 10 & 5 & C \end{array}$$

mais il effectue les additions en prenant la somme des nombres écrits dans les colonnes obliques et, ajoutant A à B, il obtient le nombre C écrit sous le nombre B comme l'indique le tableau ci-dessus; il faut seulement commencer la multiplication par le premier chiffre à gauche du multiplicateur.

2° Pour mieux faire comprendre ces conventions, prenons un deuxième exemple. Soit proposé d'effectuer la multiplication :

$$(1 + 2x - x^2)(1 + 3x - x^3)$$

et prenons la notation symbolique de M. Philippof.

Nous formons alors le tableau suivant

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & \bar{1} \\ & 1 & 2 & \bar{1} \\ \hline 1 & 3 & 0 & \bar{1} \\ 2 & 6 & 0 & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{3} & 0 & 1 \end{array}$$

on effectue ensuite l'addition par colonnes obliques et l'on a les coefficients cherchés :

$$1, \quad 3 + 2, \quad 0 + 6 - 1, \quad -1 + 0 - 3, \quad -2 + 0, \quad 1 ;$$

finalement, le résultat s'écrit symboliquement

$$(1 \;\; 3 \;\; 0 \;\; \bar{1})(1 \;\; 2 \;\; \bar{1}) = (1 \;\; 5 \;\; 5 \;\; \bar{4} \;\; \bar{2} \;\; 1).$$

On peut ensuite revenir, le résultat une fois trouvé, à la notation explicite.

3° Proposons-nous encore le calcul du carré de

$$a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Nous écrivons

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ \hline a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{array} \qquad (B)$$

Nous effectuons ensuite l'addition par colonnes obliques et nous avons, sous forme explicite, le résultat suivant

$$a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + (2bc + 2ad)x^3 + (c^2 + 2bd)x^4 + 2cdx^5 + d^2x^6,$$

On peut d'ailleurs, pour les élévations au carré, simplifier notablement l'écriture ci-dessus, en observant, comme le fait M. Philippof, que le tableau (B) étant nécessairement symétrique par rapport à la diagonale principale (a^2, b^2, c^2, d^2), il suffit de doubler les éléments qui sont placés au-dessous de cette diagonale; on dispose alors le calcul, sous forme triangulaire, suivant l'expression de M. Philippof, de la manière suivante :

$$\begin{array}{llllll} (a \quad b \quad c \quad d)^2 = & a^2 & & & \\ & 2ab & b^2 & & \\ & 2ac & 2bc & c^2 & \\ & 2ad & 2bd & 2cd & d^2 \end{array}$$

et l'on effectue encore l'addition par colonnes obliques.

La brochure de M. Philippof traite ensuite, naturellement, des autres opérations élémentaires de l'algèbre : la division, l'extraction des racines carrées, la puissance des polynômes. L'espace me manque ici pour suivre l'auteur dans ces chapitres divers; il faudrait presque reproduire la brochure elle-même. J'ai préféré, pour faire connaître l'idée de M. Philippof, m'attacher à l'application que l'auteur en a faite à la multiplication. Je ne sais si cette idée est neuve et si quelque autre mathématicien ne l'a pas déjà proposée; mais elle est certainement curieuse et je la crois utile. Je puis affirmer dans tous les cas que, bornée à la multiplication, elle conduit au résultat plus rapidement et plus sûrement que la méthode ordinaire; on peut essayer, comme j'ai tenu à le faire sur des exemples un peu compliqués, l'emploi

successif des deux méthodes, l'avantage appartient, incontestablement, à celle de M. Philippof.

G. L.

Traité élémentaire des déterminants contenant 299 exercices, par L. Leboulleux, licencié ès sciences, professeur de mathématiques à l'Université de Genève (*Librairie Delagrave* 1884; Prix : 3 francs). Le traité de M. Leboulleux est conçu dans le même esprit que celui de M. Mansion, sur le même sujet, ouvrage dont nous avons rendu compte autrefois (*). Comme celui-ci, il n'aborde pas immédiatement la théorie générale des déterminants telle qu'on l'expose ordinairement dans les cours de mathématiques spéciales, en attaquant de prime abord le tableau de n^2 éléments. Le lecteur se familiarise peu à peu avec l'idée du déterminant et avec les principes du calcul algébrique correspondant par de nombreux exercices sur les déterminants à 4 ou 9 éléments.

Le livre de M. Leboulleux renferme un très grand nombre d'exercices accompagnés, dans la plupart des cas, d'une solution développée ou, tout au moins, indiquée. Nous recommandons particulièrement cet ouvrage à ceux qui, placés loin d'un enseignement technique, éprouveraient quelque difficulté à s'assimiler l'esprit de ce puissant algorithme, qui constitue aujourd'hui la base de notre enseignement classique.

G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

(Session d'Ajaccio.)

24 juin 1885. — I. Dans un triangle rectangle ABC dont on connaît les trois côtés a, b, c on mène la perpendiculaire AD du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse BC, ensuite on mène du point D la perpendiculaire DE sur AC, puis de E la perpendiculaire EF sur l'hypo-

(*) *Journal de Math. Spéc.* (1884, p. 22). La méthode d'exposition adoptée par MM. Mansion et L. Leboulleux est aussi celle que l'on trouve dans un article intitulé : *Principes élémentaires sur les déterminants* (*Journal de Math. Elém.*, 1877; t. I, p. 5) et dans l'*Algèbre élémentaire* de M. J. Bourget (*Librairie Delagrave*, 1880; p. 133).

thénuse et ainsi de suite indéfiniment. On demande de calculer les longueurs des lignes AD, DE, EF, etc. On demande aussi de calculer la somme AD + DE + EF + ... On appliquera les formules obtenues au cas où $AB = 3^m$ et $AC = 5^m$.

II. On donne deux droites AB et CD par leurs projections $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$; on donne aussi un point (oo') situé sur la ligne de terre xy. Trouver l'intersection du plan qui passe par la droite AB et le point O avec le plan qui passe par la droite CD et qui est parallèle à xy.

(Session de Bastia.)

1er juillet 1885. — I. Démontrer l'identité

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2.\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}.$$

II. Dans un cercle O de rayon R on inscrit trois cercles égaux A, B, C. Ces trois cercles sont tangents deux à deux et sont tous trois tangents intérieurement au cercle O. Trouver le rayon de ces trois cercles et l'aire de la surface curviligne EFG comprise entre les trois cercles et limitée par les arcs EG, GF, FE compris sur chaque cercle entre les points de contact de ce cercle avec les deux autres.

(Session de Nice.)

I. Dans un cercle de rayon R, on inscrit des triangles tels que ABC dans lesquels le côté CA est double de BC. Si l'on désigne par S la surface de l'un de ces triangles et par a la longueur de BC on demande de trouver entre quelles limites est compris le rapport $\frac{S}{a^3}$, lorsque R reste constant et que a varie.

II. Un parallélogramme pesant et homogène, dont le poids est P, est supporté par quatre forces verticales appliquées aux quatre sommets A, B, C, D. La force appliquée en A est égale à $\frac{P}{6}$. Trouver les forces appliquées aux autres sommets.

ÉCOLE NATIONALE FORESTIÈRE (1886)

Mathématiques.

I. Si, d'un point A, extérieur à une droite, on mène à cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE dont les longueurs croissent successivement d'une même quantité, les distances BC, CD, DE vont en diminuant.

II. Prouver que le volume d'une tranche sphérique limitée par deux plans parallèles situés du même côté du centre est équivalent à la différence entre le cylindre de même hauteur que la tranche dont la base serait un grand cercle de la sphère, et le tronc de cône de même hauteur dont les bases auraient respectivement pour rayons les distances du centre de la sphère aux deux plans qui limitent la tranche.

III. Une personne contracte un emprunt remboursable au moyen de deux annuités de 1,061 fr. 80 c.; on a calculé qu'il serait aussi avantageux pour elle de payer quatre annuités de 561 fr. 80 c. On demande à combien on évalue le taux de l'intérêt. Le premier paiement s'effectue un an après le jour de l'emprunt.

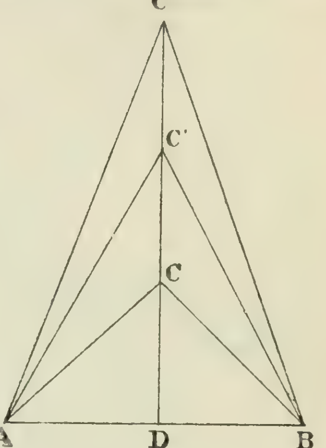
(Durée de la composition : 3 heures.)

Trigonométrie et calcul logarithmique.

I. Sur une droite AB comme base, on décrit trois triangles isocèle ABC, ABC′, ABC″ dont les hauteurs sont respectivement

$$CD = \frac{1}{2} AB, \quad C'D = AB, \quad C''D = \frac{3}{2} AB$$

Démontrer que la somme des angles aux sommets $\widehat{ACB} + \widehat{AC'B} + \widehat{AC''B}$ vaut deux angles droits.



II. Dans le trapèze ABCD, on a

$$\left.\begin{array}{l} AB = 2801^m\,87 \\ CD = 1925\ \ 34 \end{array}\right\}\ (bases).$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = 1024\ 448 \\ BD = 1227\ 142 \end{array}\right\}\ (côtés).$$

On demande de calculer les angles et la surface.

(Durée de la composition : 3 heures.)

AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(SECTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES)

Concours de 1886. — Épreuves préparatoires

Algèbre et Trigonométrie (2 juillet).

Soit, dans un plan, le pentagone non convexe ABCDE, où les angles BAE et BCD sont supposés égaux. On donne leur grandeur commune θ, ainsi que les longueurs des côtés, savoir :

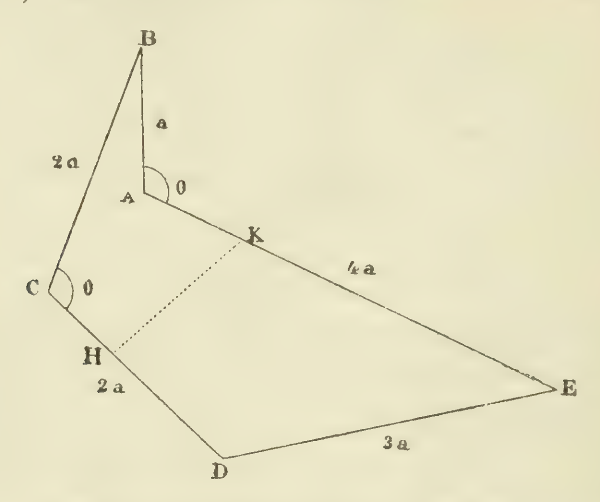
$$AB = a, \quad BC = CD = 2a, \quad DE = 3a, \quad EA = 4a.$$

Sur EA, à partir du sommet E, on porte une longueur EK égale à DE, et sur CD, à partir du sommet D, une longueur DH égale à la moitié de DE.

1° Calculer la différence $\overline{BE}^2 - \overline{BD}^2$ des carrés des distances du sommet B aux sommets E et D.

2° Résoudre le quadrilatère DHKE.

3° Les bissectrices des quatre angles de ce quadrilatère ont un point commun O : calculer le rayon de la circonférence qui, passant par les points D et O, a son centre sur le côté DE.



Application. — Effectuer numériquement la résolution du quadrilatère en supposant

$$a = 1, \qquad \theta = 109° \, 46' \, 38''.$$

Géométrie descriptive (3 juillet).

On donne deux droites OA, OB, se coupant en un point O, et telles que l'angle AOB soit aigu. On considère la surface conique engendrée par une droite OM qui tourne autour du point O en formant avec OA et OB des angles MOA et MOB complémentaires.

Représenter le solide limité par cette surface et par deux plans menés perpendiculairement aux deux droites à la même distance du sommet O.

On prendra l'un de ces plans pour plan horizontal de projection, et le plan des deux droites pour plan vertical. On supposera le solide éclairé par des rayons parallèles à la ligne de terre, et les ombres seront indiquées par des hachures.

Mécanique (5 juillet).

Une planche rectangulaire homogène AB de longueur l et de poids P peut tourner autour d'un de ses petits côtés fixé horizontalement contre un mur vertical AC. En un point B du côté opposé est attaché un fil BCAQ, de poids négligeable, qui, passant sur une très petite poulie C placée sur le mur à une distance h de la charnière, retombe verticalement en supportant un poids Q. Sur la planche repose un corps cubique d'arête a, qui s'appuie contre le mur par une arête. Ce cube n'est pas homogène, mais le poids spécifique varie proportionnellement au carré de la distance à la face de contact; il est K à l'unité de distance. Les points B, C et les centres de gravité de la planche et du cube sont d'ailleurs dans un même plan vertical normal au mur.

On demande de calculer le poids Q qui produit l'équilibre. Calculer aussi les réactions.

Outre $AB = l$, P, $AC = h$, a et K, on connaît l'angle $BAC = \alpha$ que fait la planche avec le mur.

On fera abstraction des frottements, et on regardera le fil comme parfaitement flexible (*).

QUESTIONS PROPOSÉES

217. — Démontrer que si l'on a

$$a + b + c = 0,$$

les deux quantités :

$$a^3b + b^3c + c^3a,$$
$$a^3c + b^3a + c^3b,$$

sont égales et que chacune d'elles, changée de signe, représente un carré parfait. *(G. L.)*

218. — B et B′ désignant les aires des bases parallèles d'un tronc de pyramide quelconque, la section B″, parallèle et équidistante de ces bases, est la moyenne arithmétique de leurs moyennes arithmétique et géométrique.

(Glorget.)

219. — Soient H l'orthocentre et H_0 le point réciproque dans le triangle ABC ; si l'on pose

$$HAH_0 = \alpha, \qquad HBH_0 = \beta, \qquad HCH_0 = \gamma,$$

démontrer que l'on a

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = 0.$$

(Boutin.)

220. — Dans un triangle, on a:

1° $$\Sigma \frac{\cos B - \cos C}{p - a} = 0,$$

2° $$\Sigma (p - a)(b - c)\cos A = 0,$$

3° $$(p - c)(b + c)\cos A + p(a - c)\cos B = (p - a)(a + b)\cos C.$$

(G. L.)

(*) Énoncés communiqués par M. Monsallut, professeur au collège de Saint-Jean-d'Angély.

221. — Dans le triangle ABC, les côtés AB et AC sont égaux; I est le milieu de la base BC. Si l'on porte sur le côté BA la longueur $AA' = m.BA$ et sur le côté BC la longueur $CC' = p.BC$; si, de plus, les perpendiculaires respectivement élevées à AC et à A'C' aux points C et C' coupent la droite AI aux points D et D' on a

$$\frac{ID'}{ID} = \frac{(1 + 2p)(1 + 2p - m)}{1 + m}.$$

Corollaire. — Soit I' le pied de la perpendiculaire abaissée de A' sur BC. Si l'on prend $CC' = II'$, la perpendiculaire élevée en C' à A'C' passe par le point D. *(D'Ocagne.)*

222. — Trouver la condition que doit vérifier le paramètre α pour que les deux polynômes U et V,

$$U = x^4 \sec^2 \alpha - 2x \operatorname{tg} \alpha + 1,$$
$$V = x^4 - 2x^3 \operatorname{tg} \alpha + \sec^2 \alpha$$

admettent un diviseur commun du second degré.

(B. Hanumenta Rau),
(Directeur de l'École Normale de Madras.)

223. — ABCP, DEFQ sont deux circonférences concentriques; ABC, DEF deux triangles équilatéraux quelconques, inscrits dans ces deux circonférences; P et Q des points pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a

$$\overline{QA}^4 + \overline{QB}^4 + \overline{QC}^4 = \overline{PD}^4 + \overline{PE}^4 + \overline{PF}^4.$$

(G. Russo, à Catanzaro.)

224. — a, b, c étant trois entiers satisfaisant à la condition

$$ab + bc + ca = 1$$

prouver que

$$\Sigma(ab - 1)(a + 1)(b + 1)(c - 1) = M(a + b + c + 1).$$

(Catalan.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13038-6.

NOTES A PROPOS DU CERCLE
DES NEUF POINTS

Par M. **E. Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit un triangle ABC, soient d', d'_a, d'_b, d'_c les points de contact du cercle des neuf points respectivement avec le cercle inscrit et avec les cercles ex-inscrits au triangle ABC.

On sait (voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1886, pages 122 et suivantes), que les coordonnées normales de ces points sont :

pour d' : $\frac{r_a}{a}(r_b - r_c)^2, \quad \frac{r_b}{b}(r_c - r_a)^2, \quad \frac{r_c}{c}(r_a - r_b)^2$

ou $\sin^2\left(\frac{B - C}{2}\right), \quad \sin^2\left(\frac{C - A}{2}\right), \quad \sin^2\left(\frac{A - B}{2}\right).$

Pour d'_a : $-\frac{r}{a}(r_b - r_c)^2, \quad \frac{r_c}{b}(r + r_b)^2, \quad \frac{r_b}{c}(r + r_c)^2$

ou

$$-\sin^2\left(\frac{B - C}{2}\right), \quad \cos^2\left(\frac{C - A}{2}\right), \quad \cos^2\left(\frac{A - B}{2}\right), \text{ etc.,}$$

r, r_a, r_b, r_c étant les rayons du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.

L'équation de la tangente en d', commune au cercle inscrit et au cercle des neufs points, est :

$$\frac{a}{b - c}\xi + \frac{b}{c - a}\eta + \frac{c}{a - b}\zeta = 0$$

et un point quelconque de cette tangente peut être représenté par les coordonnées :

$$\frac{(\delta - a)(b - c)^2}{a}, \quad \frac{(\delta - b)(c - a)^2}{b}, \quad \frac{(\delta - c)(a - b)^2}{c}$$

où δ a une valeur variable.

L'équation de la tangente commune en d'_a au cercle des neuf points et au cercle ex-inscrit de rayon r_a est :

$$\frac{a}{c - b}\xi - \frac{b}{a + c}\eta + \frac{c}{a + b}\zeta = 0$$

et un point quelconque de cette tangente peut être représenté par les coordonnées :

$$\frac{(\delta - a)(b - c)^2}{a}, \quad \frac{(\delta + b)(a + c)^2}{b}, \quad \frac{(\delta + c)(a + b)^2}{c}, \text{ etc.}$$

On sait que les tangentes au cercle des neuf points en d', d'_a, d'_b, d'_c touchent aussi l'ellipse maxima inscrite dans le triangle, ellipse dont l'équation est :

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - 2bc\beta\gamma - 2ac\alpha\gamma - 2ab\alpha\beta = 0.$$

Soient respectivement μ, μ_a, μ_b, μ_c les points de contact de ces tangentes avec cette ellipse, les coordonnées de ces points correspondent à la valeur de $\delta = \infty$ et sont :

pour μ : $$\frac{(b - c)^2}{a}, \quad \frac{(c - a)^2}{b}, \quad \frac{(a - b)^2}{c}$$

pour μ_a : $$\frac{(b - c)^2}{a}, \quad \frac{(a + c)^2}{b}, \quad \frac{(a + b)^2}{c}, \text{ etc.}$$

Les droites $A\mu_a$, $B\mu_b$, $C\mu_c$ se coupent au point ρ :

$$\frac{(b + c)^2}{a}, \quad \frac{(a + c)^2}{b}, \quad \frac{(a + b)^2}{c},$$

c'est-à-dire que les triangles ABC et $\mu_a\mu_b\mu_c$ sont homologiques et ont ρ pour centre d'homologie.

L'équation de $\mu_b\,\mu_c$ est :

$$a(a^2 + cb)\alpha - b^2(b + c)\beta - c^2(b + c)\gamma = 0.$$

L'axe d'homologie de ABC et de $\mu_a\,\mu_b\,\mu_c$ est donc la droite :

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

qui est la droite *réciproque* (suivant la dénomination adoptée par M. G. de Longchamps) de la droite :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

qui joint les pieds des bissectrices extérieures.

Si A′, B′, C′ sont, sur chaque côté, les symétriques par rapport au milieu de ce côté des pieds des bissectrices intérieures :

ABC, A′B′C′ sont homologiques.

Le centre d'homologie est : $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$,

et l'axe d'homologie précisément la droite :

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0.$$

L'équation de $\mu\,\mu_a$ est :

$$a(bc - a^2)\alpha - (c - b)b^2\beta + (c - b)c^2\gamma = 0.$$

Remarquons que si $a^2 = bc$, cette droite passe par le sommet A.

Les deux triangles ABC, $\mu\, \mu_c\, \mu_b$ sont homologiques et les trois droites $A\mu$, $B\mu_c$ $C\mu_b$ se coupent en ρ_a :

$$\frac{(b+c)^2}{a},\ \frac{(c-a)^2}{b},\ \frac{(a-b)^2}{c}$$

leur centre d'homologie.

L'axe d'homologie est :

$$-\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0,$$

droite réciproque de

$$-\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

laquelle droite joint les pieds sur AC et sur AB des bissectrices intérieures des angles opposés et passe aussi par le pied sur BC de la bissectrice extérieure partant par A.

On aurait de même ρ_b, ρ_c :

Cela posé, on voit facilement :

Que ABC, $\rho_a\, \rho_b\, \rho_c$ ont pour centre d'homologie le point μ déjà rencontré ;

Que ABC, $\rho\, \rho_c\, \rho_b$ ont pour centre d'homologie le point μ_a déjà rencontré, etc.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CERCLES DE TÜCKER

Par M. **Émile Vigarié**, élève à l'École des Mines.

1. Définition. — Soit ABC un triangle donné, H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs et K le point de Lemoine.

Il y a une infinité de triangles A″B″C″ homologiques avec ABC, ayant K pour centre d'homologie et qui sont homothétiques avec $H\, H_bH_c$. Les côtés des triangles A″B″C″ coupent les côtés de ABC ou ses prolongements en six points qui sont sur un même cercle. On obtient ainsi un réseau de cercles que M. Neuberg a proposé (*Reprint of the Educational Times*, vol. XLIII, p. 81-85) d'appeler *Cercles de Tücker*.

Les cercles de Tücker ont été rencontrés par plusieurs auteurs, c'est ainsi que leur existence a été signalée par MM :

E. Lemoine, Associat. franç. Congrès de Lyon (1873). — *Mathésis*, 1884, p. 201-204.

J. Neuberg, *Mathésis*, 1881, p. 15, 59, 187.

H. Taylor, *Relations of the intersections of a cercle with a triangle.* (Proceedings of the London Math. Soc., vol. XV, 1884).

Enfin M. Tücker les a retrouvés sans connaître les travaux antérieurs (A group of circles, *Quarterly Journal*, vol. XX, n° 77, 1883) ; c'est pourquoi ils portent son nom.

Nous allons faire connaître les principales propriétés des cercles de Tücker, en adoptant pour les démonstrations, un ordre commode, bien qu'étant peut-être peu logique.

2. — Supposons que

$B''C''$ coupe BC en X, CA en A_c, AB en A_b ;
$C''A''$ — CA — Y, AB — B_a, BC — B_c ;
$A''B''$ — AB — Z, BC — C_b, CA — C_a.

Les droites A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b étant parallèles aux côtés du triangle $H_aH_bH_c$, sont aussi parallèles aux côtés du triangle $A'B'C'$ formé en menant par les sommets de ABC des tangentes au cercle circonscrit ; elles sont donc antiparallèles à BC, AC, AB.

3. — *Les droites* C_aB_a, C_bA_b, A_cB_c *sont respectivement parallèles à* BC, AC, AB.

En effet, on a :

$$\frac{AA_c}{AB} = \frac{AA_b}{AC}, \qquad \frac{AB}{BB_c} = \frac{BC}{BB_a},$$

ou

$$\frac{AA_c}{BB_c} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AA_b}{BB_a}. \qquad (1)$$

Soit α, β, γ les pieds des médianes antiparallèles ou symedianes de ABC ; les triangles $C''\gamma A_b$, $C'\gamma A$; $C''\gamma B$, $C''\gamma B_a$ sont semblables et donnent :

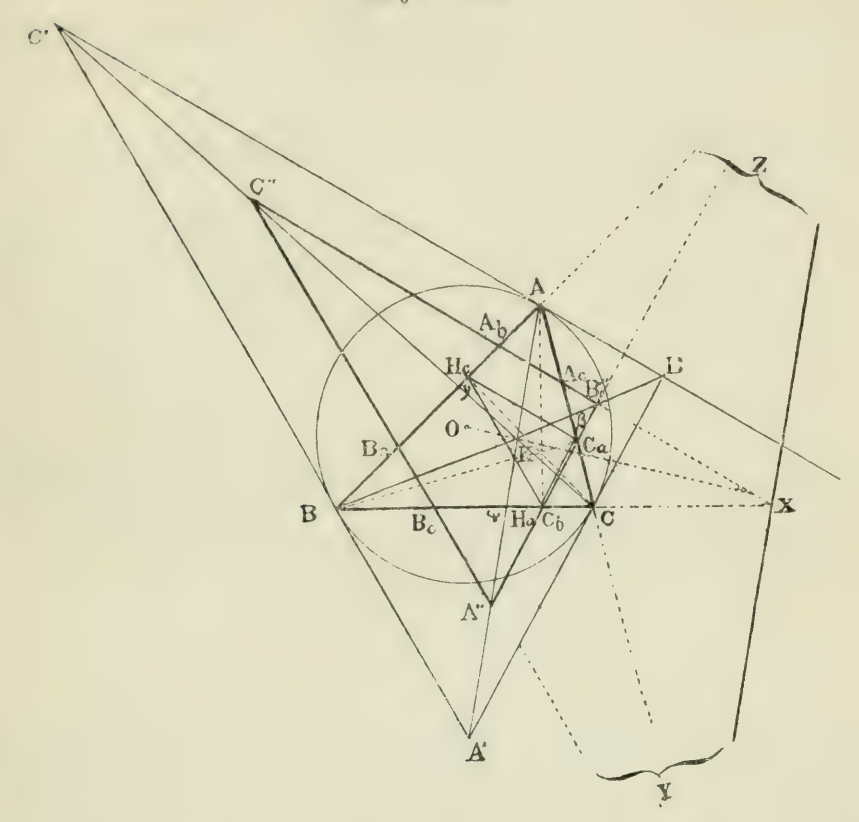
$$\frac{AA_b}{A\gamma} = \frac{C'C''}{C'\gamma} = \frac{BB_a}{B\gamma};$$

d'où

$$\frac{AA_b}{BB_a} = \frac{A\gamma}{B\gamma} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}.$$

Par suite (1) devient :

$$\frac{AA_c}{BB_c} = \frac{AC}{AB},$$



ce qui montre que B_cA_c est parallèle à AB. On prouverait de la même manière que B_aC_a, A_bC_b sont parallèles respectivement à BC, AC.

4. — *Les droites* A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b *sont égales.*

Car elles sont deux à deux les côtés non parallèles des trapèzes isocèles $A_cA_bB_aB_c$, $B_aB_cC_bC_a$, $C_bC_aA_aA_b$.

5. — *Les six points* A_b, A_c, C_a, C_b, B_c, B_a, *sont six points d'un même cercle* T *dont le centre* ω' *est sur la droite qui joint le point* K *au centre* O *de la circonférence* ABC.

En effet, les droites A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b étant antiparallèles aux côtés du triangle ABC, sont divisées en deux parties égales par les symédianes aux points α'', β'', γ'' ; les triangles

ABC, $A''B''C''$ étant homothétiques par rapport à K, les points α'', β'', γ'' homologues de A, B, C sont les points de contact du cercle inscrit à $A''B''C''$ et le centre est situé sur la droite KO. Les droites A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b étant égales sont par suite les cordes d'une même circonférence ayant son centre sur KO.

Ces cercles que nous désignerons par la lettre T sont les *Cercles de Tücker*, on peut donc dire que :

Le lieu des centres des cercles de Tücker est la droite qui joint le point de Lemoine K *du triangle* ABC *au centre de la circonférence circonscrite.* Autrement dit : *Le lieu des centres des cercles de Tücker est le diamètre de Brocard.* *(A suivre.)*

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 177.)

---

16. Constructions diverses pour le deuxième potentiel. — Le deuxième potentiel est celui qui se présente tout d'abord, dans cette érie; c'est, dans la loi présente, l'associé de l'ordre le plus simple et, pour ce motif même, le plus intéressant.

Nous devons nous arrêter un instant sur ce point et montrer comment on peut, par des constructions diverses, déduire, d'un point donné, son deuxième potentiel.

Première construction. — Prenons d'abord la construction que nous avons exposée tout à l'heure pour un cas plus général.

Soit M le point donné, M′ le point inconnu, associé du deuxième ordre du point M. La détermination de M′ revient à celle d'un point μ', situé sur BC, et tel que l'on ait

$$\frac{B\mu'}{C\mu'} = \frac{\overline{B\mu}^2}{\overline{C\mu}^2}.$$

Soit m le point isotomique de μ; l'égalité précédente peut s'écrire

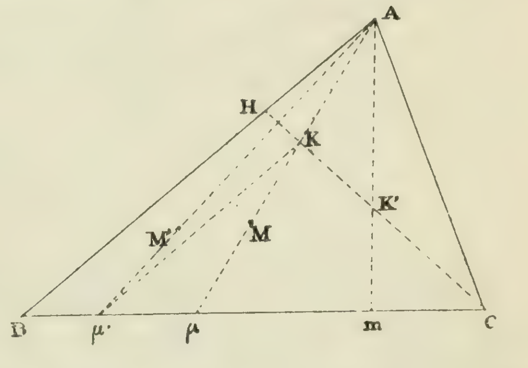
$$\frac{B\mu'}{C\mu'} = \frac{\left(\frac{B\mu}{C\mu}\right)}{\left(\frac{Bm}{Cm}\right)}.$$

Le second membre représente le rapport anharmonique des points (B, C, μ, m); ayant mené CH de telle façon que

$$CK' = K'H,$$

on a

$$\frac{B\mu'}{C\mu'} = \frac{HK}{KC}.$$



La droite $K\mu'$ est donc parallèle à AB; le point μ' étant ainsi déterminé, $A\mu'$ et les deux autres droites analogues concourent au point inconnu M'.

Deuxième construction. — La construction précédente ne demande que l'emploi de la règle et de l'équerre; celle que nous allons faire connaître maintenant exige que le cercle γ, circonscrit au triangle, soit tracé; mais, abstraction faite de ce petit inconvénient, elle nécessite un nombre moindre de lignes.

Comme on vient de l'observer, la question revient au fond à celle-ci : *étant donné sur* BC *un point* μ, *trouver un point* μ' *tel que l'on ait*

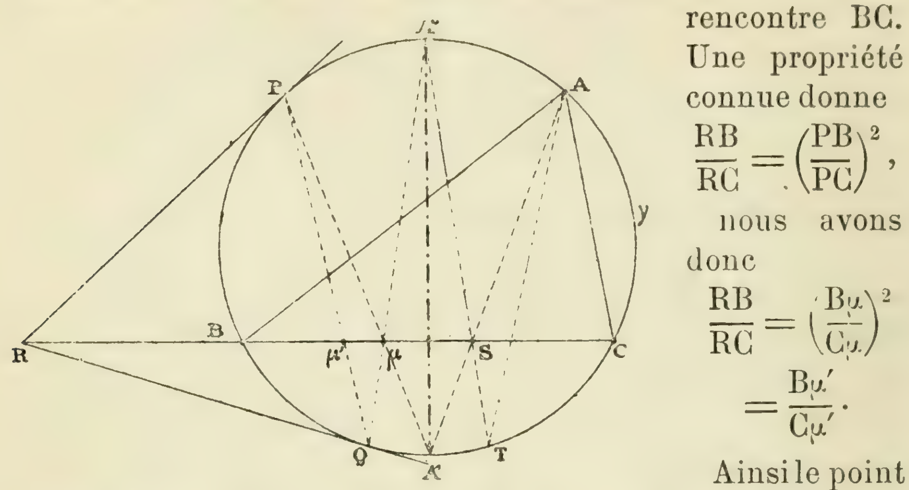
$$\frac{B\mu'}{C\mu'} = \left(\frac{B\mu}{C\mu}\right)^2.$$

Soit A'A'' le diamètre de γ qui est perpendiculaire sur BC; on joint le point μ aux extrémités A', A'' de ce diamètre; ces droites rencontrent γ en P et Q; la droite PQ coupe BC au point cherché μ'.

En effet, la droite PA' étant bissectrice de $\widehat{BPC}$, on a

$$\frac{BP}{CP} = \frac{B\mu}{C\mu}.$$

Menons à γ la tangente en P et soit R le point où elle rencontre BC. Une propriété connue donne



$$\frac{RB}{RC} = \left(\frac{PB}{PC}\right)^2,$$

nous avons donc

$$\frac{RB}{RC} = \left(\frac{B\mu}{C\mu}\right)^2 = \frac{B\mu'}{C\mu'}.$$

Ainsi le point μ' est le conjugué harmonique de R, par rapport à BC.

En appliquant le même raisonnement au triangle BQC dans lequel $Q\mu A''$ est une bissectrice, on verrait encore que la tangente en Q coupe BC au point conjugué harmonique du point inconnu μ', c'est-à-dire au point R.

D'après cela, PQ est donc la polaire de R et, pour conclure, on peut donc dire que PQ coupe BC précisément au point cherché.

Par exemple, si l'on considère le point de Lemoine

$$\frac{\alpha'}{a^2} = \frac{\beta'}{b^2} = \frac{\gamma'}{c^2},$$

et le centre du cercle inscrit

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c},$$

en appliquant la construction précédente, S étant le pied de la bissectrice de l'angle BAC, le point T étant déterminé comme l'indique la figure, la droite AT passe par le point de Lemoine. Cette remarque incidente donne donc lieu à l'énoncé suivant :

Soient un triangle ABC *et son cercle circonscrit* γ; *la droite qui joint le point milieu de l'arc* BAC, *au pied* S *de la bissectrice de l'angle* BAC *coupe de nouveau* γ *en un certain point* T; *la droite* AT *et les deux autres droites analogues concourent au point de Lemoine.*

Troisième construction. — Enfin voici une troisième construction qui nous paraît encore assez simple pour être indiquée ici.

Prenons le point m *conjugué harmonique de* μ, *puis* ω *milieu de* $m\mu$, *enfin* μ' *conjugué harmonique de* ω, *par rapport à* BC; μ' *est le point cherché et l'on a*

$$\text{(A)} \qquad \frac{\mu' B}{\mu' C} = \left(\frac{\mu B}{\mu C}\right)^2$$

En effet, posons

$$\frac{\mu B}{\mu C} = K,$$

nous en tirons

$$\frac{\mu B}{BC} = \frac{K}{K+1}. \qquad (1)$$

Nous avons aussi

$$\frac{mB}{mC} = K,$$

les longueurs mB, mC étant prises en valeur absolue par suite

$$\frac{mB}{BC} = \frac{K}{1-K}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$\frac{m\mu}{BC} = \frac{2K}{1-K^2}$$

ou

$$\frac{\omega\mu}{BC} = \frac{K}{1-K^2}. \qquad (3)$$

Enfin (1) et (3) prouvent que

$$\frac{\omega B}{BC} = \frac{K}{1+K}\left(\frac{1}{1-K} - 1\right) = \frac{K^2}{1-K^2}$$

égalité qui donne

$$\frac{\omega B}{\omega C} = K^2 = \left(\frac{\mu B}{\mu C}\right)^2.$$

Puisque μ' est le conjugué harmonique de ω, μ' est donc bien le point qui partage le segment BC de telle sorte que l'égalité (A) soit vérifiée.

17. Potentiels proprement dits. — Mais nous allons, dans ce qui suit, particulariser les points potentiels en supposant

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c},$$

ce cas particulier étant celui qui présente un intérêt spécial dans la géométrie du triangle.

Le premier potentiel est alors le centre du cercle inscrit, le deuxième potentiel est le point de Lemoine.

Problème. — *Connaissant le potentiel d'ordre* p, *construire le otentiel d'ordre* p + 1 (*).

Soit M un point ayant pour coordonnées

$$a^p, \qquad b^p, \qquad c^p;$$

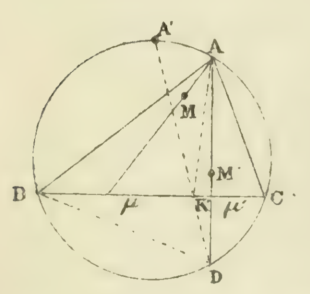
Si nous prenons le réciproque M′ de ce point, les coordonnées de M′ sont

$$\frac{1}{a^p}, \qquad \frac{1}{b^p}, \qquad \frac{1}{c^p}$$

et les distances de M′ aux trois côtés sont proportionnelles à

$$\frac{1}{a^{p+1}}, \qquad \frac{1}{b^{p+1}}, \qquad \frac{1}{c^{p+1}}:$$

La droite AM′ rencontre le cercle circonscrit en un certain point D que l'on joint, comme l'indique la figure, au point A′ milieu de l'arc BAC ; DA′ rencontre BC en K′ et l'on a



$$\frac{BK'}{CK'} = \frac{BD}{DC} = \frac{\frac{1}{c^{p+1}}}{\frac{1}{b^{p+1}}} = \frac{b^p}{c^{p+1}}.$$

D'après cela, les droites telles que AK′ concourent en un point dont le réciproque est le potentiel de l'ordre $p + 1$.

(*) Nous ne pensons pas que le langage dont nous nous servons ici puisse prêter à confusion et l'on comprend bien quelle différence il convient de faire entre le potentiel d'ordre p dont nous parlons maintenant et le potentiel d'ordre p, *associé d'un point donné*, que nous avons

D'après cette remarque générale on pourra donc de proche en proche construire tous les potentiels (*).

18. Rapprochement entre les potentiels et les réciproques de l'ordre p. — Il existe entre les potentiels d'ordre p dont nous nous occupons en ce moment et les réciproques d'ordre p dont nous avons placé plus haut un rapprochement évident. En observant que les coordonnées α_0, β_0, γ_0 du centre de gravité sont égales, les égalités

$$\frac{\alpha}{a^p} = \frac{\beta}{b^p} = \frac{\gamma}{c^p},$$

peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha\alpha_0}{a^p} = \frac{\beta\beta_0}{b^p} = \frac{\gamma\gamma_0}{c^p}.$$

D'après cela nous pouvons dire que le potentiel d'ordre p d'un triangle ABC est, en même temps, le réciproque d'ordre p du centre de gravité. Les tracés généraux que nous avons indiqués pour la construction des réciproques d'ordre p pourraient donc s'appliquer à celle des potentiels d'ordre p, mais il n'est pas sans intérêt, vu l importance des premiers potentiels, d'établir pour chacun d'eux des tracés particuliers permettant de fixer aussi rapidement que possible leur situation dans le plan du triangle de référence.

Nous avons examiné déjà le premier et le deuxième potentiel ; mais pour le motif que nous avons fait valoir,

---

considéré plus haut. Mais, pour éviter toute ambiguïté, nous répétons que *le potentiel d'ordre* p, *associé d'un point donné* (A, B, C) est celui dont les coordonnées sont (A^p, B^p, C^p); le mot plus simple *potentiel d'ordre* p (sans autre qualificatif) désigne le *potentiel proprement dit* point qui a pour coordonnées (a^p, b^p, c^p); a, b, c représentant les longueurs des côtés du triangle de référence.

(*) Voyez à ce propos la note bibliographique placée plus haut (*Journal*, p. 129) et qui serait peut-être, ici, mieux à sa place. Nous citerons encore, pour la compléter, une note de M. Poudra (*Problème sur les côtés d'un triangle élevés à des puissances données*; *N. A.*, 1856, p. 217), qui nous a été signalée par M. d'Ocagne (*Journal* 1885, p. 204); et une note, plus ancienne, *Construction géométrique du rapport* $\frac{a^p}{b^p}$ (*N. A.* 1844, p. 371).

nous voulons encore examiner particulièrement le troisième et le quatrième potentiel.

19. Le troisième potentiel. — Proposons-nous d'abord de déterminer la position du troisième potentiel. Nous avons

$$\frac{\alpha}{a^3}=\frac{\beta}{b^3}=\frac{\gamma}{c^3}, \qquad (1)$$

α, β, γ désignant les coordonnées du point cherché M. Soit M′ le point inverse, de telle sorte que

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2}=\frac{\beta\beta'}{b^2}=\frac{\gamma\gamma'}{c^2}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$a\alpha'=b\beta'=c\gamma'.$$

Ainsi le point M′ est le réciproque du centre du cercle inscrit et l'on peut dire que *le troisième potentiel s'obtient en prenant 1° le réciproque du centre du cercle inscrit, 2° l'inverse de ce réciproque.*

20 La quatrième potentiel. — Les premiers calculs que l'on entreprend sur les nombres a, b, c font apparaître, très rapidement, leurs quatrièmes puissances. Nous ne voulons pas, pour ce motif, quitter cette question des potentiels sans compléter les constructions que nous venons d'exposer par l'indication de celles qui sont relatives à la détermination du quatrième potentiel. La considération de ce point rentre dans celles qui nous paraissent constituer la base de la géométrie du triangle, et l'on peut d'ailleurs fixer sans avoir recours aux constructions générales sa position par un tracé particulier que nous allons faire connaître.

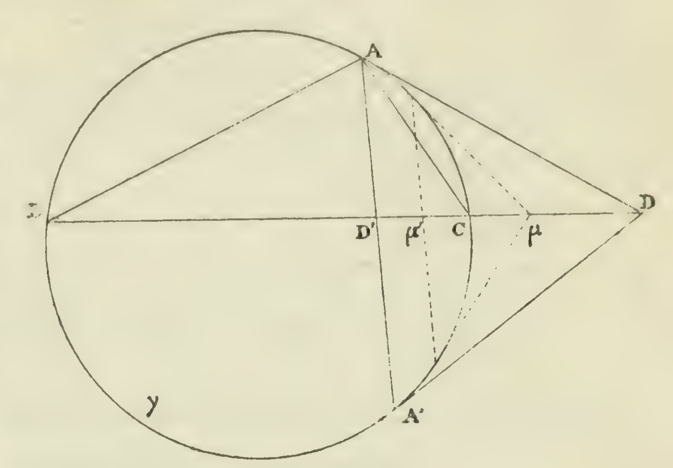
Considérons le triangle ABC, le cercle circonscrit γ et la tangente en A à γ; cette droite rencontre BC en D et nous avons

$$\frac{\text{DC}}{\text{DB}}=\frac{\overline{\text{AC}}^2}{\overline{\text{AB}}^2}.$$

Soit D′ le conjugué harmonique de D; si nous prenons le milieu μ de DD′ nous savons (§ 16) que

$$\frac{\mu\text{C}}{\mu\text{D}}=\frac{\overline{\text{DC}}^2}{\overline{\text{DB}}^2}=\frac{\overline{\text{AC}}^4}{\overline{\text{AB}}^4}.$$

D'après cela, en prenant μ' conjugué harmonique de μ par rapport à BC, nous voyons donc que la droite $A\mu'$ et les deux autres droites analogues concourent au quatrième potentiel.



On peut aussi déterminer la position de ce point ne prenant : 1° le réciproque du point de Lemoine ; 2° l'inverse de ce point réciproque.

En effet, les formules

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}, \quad \alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma', \quad \frac{\alpha'\alpha''}{a^2} = \frac{\beta'\beta''}{b^2} = \frac{\gamma'\gamma''}{c^2},$$

donnent

$$\frac{\alpha''}{a^4} = \frac{\beta''}{b^4} = \frac{\gamma''}{c^4}.$$

21. Remarque. — En prenant deux points M, M' dont les coordonnées sont

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}, \qquad \frac{\alpha'}{A'} = \frac{\beta'}{B'} = \frac{\gamma'}{C'};$$

on peut imaginer un point M'' associé à ces deux points par les formules

$$\frac{\alpha''}{A^pA'^q} = \frac{\beta''}{B^pB'^q} = \frac{\gamma''}{C^pC'^q}.$$

La construction du point M'' peut se faire en cherchant d'abord les points associés d'ordre p et q des points M et M', on a ainsi deux points

$$\frac{\alpha_1}{A^p} = \frac{\beta_1}{B^p} = \frac{\gamma_1}{C^p} \qquad \frac{\alpha_2}{A'^q} = \frac{\beta_2}{B'^q} = \frac{\gamma_2}{C'^q},$$

égalités d'où l'on tire

$$\frac{\alpha''}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{\beta''}{\beta_1\beta_2} = \frac{\gamma''}{\gamma_1\gamma_2}.$$

On détermine alors M″ par la construction indiquée plus haut (§ 14); mais, naturellement, le tracé devient de plus en plus compliqué.

(A suivre.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1886)

Épure du Concours d'admission (2 h. 1/2).

Solution par M. Ernest Lebon.

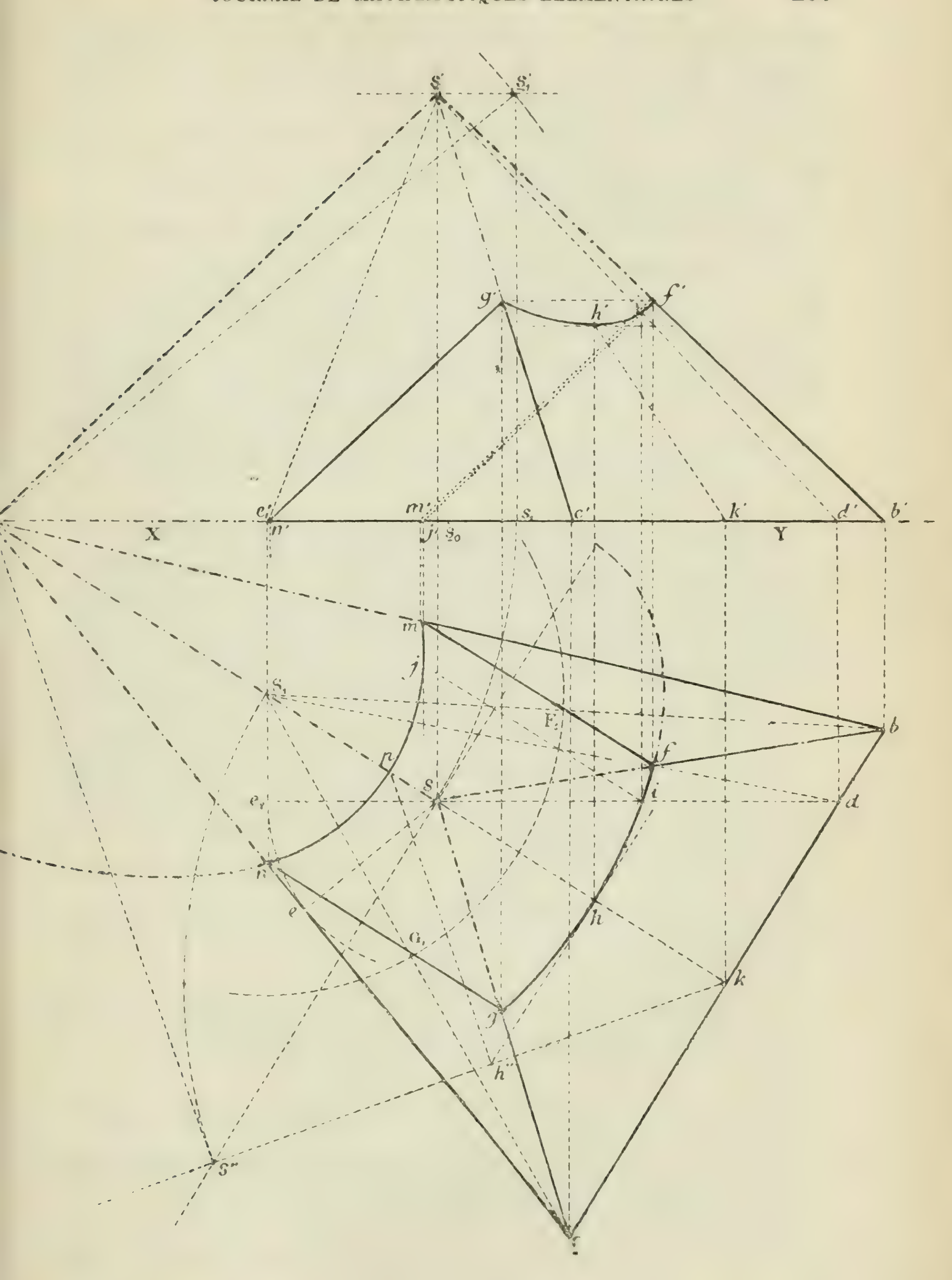
On donne un point A *sur la ligne de terre, un point* S *distant du plan horizontal de* 78^{mm}, *du plan vertical de* 51^{mm}, *et du point* A *de* 124^{mm}. *Construire le tétraèdre* SABC *dont la base* ABC *est sur le plan horizontal de projection, sachant que le plan* BSC *est perpendiculaire à l'arête* SA, *et que les angles dièdres* AB *et* AC *valent chacun* 68°. — *On aura soin de placer le point* A *le plus à gauche possible.*

Construire l'intersection de cette pyramide avec le cylindre de révolution qui a SA *pour axe et pour rayon* 55^{mm}.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est seul et que le solide commun au cylindre et à la pyramide est enlevé.

Nous avons fait l'épure à l'échelle $\frac{2}{3}$.

Supposant que la droite *as*, *a′s′* est connue, rabattant cette droite en $a's'_1$ sur le plan vertical, on voit que pour obtenir les projections de S, il faut mener à XY, au-dessus et au-dessous de cette ligne, des parallèles aux distances 78^{mm} et 51^{mm}; couper la première en s'_1 par l'arc de centre *a′*, de


S'
S'₁
g'
h'
f'
e'₁
n'
m'
j'
s₁
c'
k'
d'
b'
X
Y
m
j
S₁
F₁
b
f
p
S
i
d
e₁
n
e
h
G₁
k
g
h''
S''
c

rayon égal à 124^{mm}; mener la ligne de rappel $s'_1 s_1$; couper la seconde en s par l'arc de centre a, de rayon $a's_1$; mener la ligne de rappel ss'.

La trace bc de la face BSC s'obtient en construisant la trace horizontale d'un plan perpendiculaire à as, $a's'$, au moyen de sa droite de front $s'd'$, sd.

Supposant que la trace ac de la face ASC est connue, on mène la perpendiculaire se à ac, on rabat le triangle rectangle Sse en $s's_0e'_1$ sur le plan vertical autour de la verticale Ss, et on obtient l'angle $s'e'_1s_0$, qui, par hypothèse, égale 68°; donc, après avoir mené la droite $s'e'_1$ faisant avec XY un angle de 68°, on a e'_1 sur XY; la trace cherchée est la tangente ae au cercle de centre s, de rayon égal à $s_0e'_1$. Cette tangente coupe bc en c. La trace ab de la face ASB est symétrique de ac par rapport à as.

On achève facilement la représentation du tétraèdre.

La face BSC coupe le cylindre donné selon une circonférence de centre S, de rayon égal à 55^{mm}; on sait construire les ellipses projections de cette circonférence, après avoir rabattu son plan BSC autour de sa trace horizontale bc; on prend ss'' égale à s_0s'; kS$_1$ égale à ks''. Les rabattements S$_1b$ et S$_1c$ des arêtes coupent en F$_1$ et en G$_1$ la circonférence de centre S$_1$, de rayon égal à 55^{mm}; d'où l'on a les extrémités f, f' et g, g' des arcs utiles des ellipses projections de la circonférence. L'extrémité utile du petit axe de l'ellipse projection horizontale est h; $s''h''$ égale 55^{mm}. L'extrémité utile du grand axe de l'ellipse projection verticale est i' sur $s'd'$.

Les faces ASB et ASC coupent le cylindre selon des parallèles fm, $f'm'$; gn, $g'n'$ à sa, $s'a'$.

La face ABC coupe le cylindre selon une ellipse dont le demi-grand axe ap est déterminé en menant la parallèle $h''p$ à $a's''$.

Le contour apparent vertical utile du cylindre est la parallèle $i'j'$ à $s'a'$.

On distingue aisément les parties vues et les parties cachées du corps qu'il faut représenter.

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES (1885)

Concours pour l'obtention des bourses de l'État.

I. Trouver la fraction ordinaire équivalente à la somme des fractions

$$\frac{1}{20 \times 21} + \frac{1}{21 \times 22} + \dots + \frac{1}{98 \times 99} + \frac{1}{99 \times 100}.$$

II. Une personne possède 110,000 francs placés, partie à un taux, partie à un autre taux. Si la première somme était placée au taux de la deuxième et la deuxième au taux de la première, elles rapporteraient des intérêts respectivement égaux à 3,600 francs et 2,500 francs. Trouver les deux sommes et les deux taux.

III. Résoudre les systèmes $x + y + \sqrt{xy} = a, \qquad x^2 + y^2 + xy = b.$

(15 octobre, durée 1 h. 1/2.)

Concours pour l'obtention des bourses de la Ville de Paris.

I. Trois ouvriers A, B, C ont à faire un ouvrage; A et B travaillant ensemble pendant 4 jours feraient les 2/3 de l'ouvrage, B et C travaillant ensemble pendant 8 jours en feraient les 14/15, A et C travaillant ensemble pendant 5 jours en feraient les 3/4. On occupe A seul pendant 2 jours, B seul pendant 6 jours. Combien de jours C travaillant seul mettra-t-il à terminer l'ouvrage?

II. Résoudre le système $-3x + 8y^2 + 6z^3 = 0, \qquad -x - 2y^2 + 12z^3 = -4, \qquad -2x + 6y^2 - 3z^3 = -5.$

III. Un négociant a acheté un certain nombre de mètres d'étoffe pour 600 francs. Si, pour la même somme, il avait obtenu 3^m de plus, le mètre couterait 10 francs de moins. Combien avait-il acheté de mètres?

(28 octobre, duree 1 h. 1/2.)

QUESTION 170

Solution par M. Paul Cornud, à Thiers.

Démontrer la proposition suivante :

Dans un triangle rectangle :

1° Les droites antiparallèles qui joignent les projections des pieds de la médiane antiparallèle et de la médiane, sur les côtés adjacents, sont respectivement égales à ces droites ;

2° La droite qui joint les projections du pied de la médiane antiparallèle sur les côtés adjacents est antiparallèle à l'hypoténuse ;

3° La médiane et la médiane antiparallèle d'un triangle rectangle sont la médiane antiparallèle et la médiane du triangle de même sommet déterminé par la droite qui joint les projections sur les côtés adjacents du pied de la médiane antiparallèle du premier triangle;

4° La droite qui joint les projections du pied de la médiane antiparallèle sur les côtés adjacents est égale à la somme des perpendiculaires abaissées de ses extrémités sur l'hypoténuse.

Déduire de là, la solution de la question suivante (Journal de mathématiques élémentaires, question 154): Etant donné un triangle rectangle ABC, *mener une droite antiparallèle à l'hypoténuse* BC, *de manière que la partie* DE, *comprise entre les côtés de l'angle droit, soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points* D *et* E *sur l'hypoténuse.*

N. B. — *Dans cet énoncé, la médiane et la médiane antiparallèle considérées sont issues du sommet de l'angle droit.*

Soit ABC le triangle rectangle, AM la médiane et AN la médiane anti-parallèle.

1° En menant les perpendiculaires MP, MQ pour obtenir les projections P et Q du pied M de la médiane, nous avons formé un rectangle MPAQ dans lequel les deux diagonales PQ, AM sont égales.

C. Q. F. D.

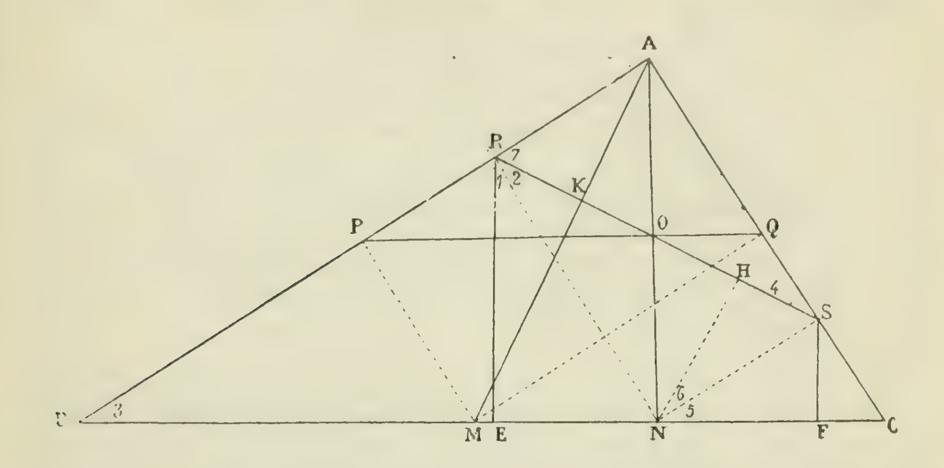
De même dans le rectangle NRAS, les deux diagonales RS, AN sont égales.

C. Q. F. D

2° Puisque la médiane antiparallèle est la droite qui joint le milieu de toutes les antiparallèles au côté d'un triangle, toute droite, qui, terminée aux deux autres côtés du triangle est partagée par la médiane antiparallèle en deux parties égales, sera antiparallèle au troisième côté. Donc RS qui est partagée en O en deux parties égales par AN est antiparallèle à l'hypoténuse BC.

C. Q. F. D.

3° Il faut démontrer que AO est la médiane et AK la médiane antiparallèle du triangle ARS. Nous venons de voir



que RO = OS. Donc AO est bien la médiane du triangle ARS.

C. Q. F. D.

AM partageant BC en deux parties égales, partagera aussi toutes les parallèles à BC en deux parties égales. Donc, si, dans le triangle ARS, on mène des parallèles à l'hypoténuse, ces droites seront partagées en deux parties égales par AK. Or l'hypoténuse étant antiparallèle à RS, ses parallèles menées dans le triangle RAS seront aussi antiparallèles à RS. Donc AK est la médiane antiparallèle du triangle RAS.

4° Il faut démontrer que RS = RE + SF. Pour le démontrer, menons du point N une perpendiculaire à RS. Les deux triangles rectangles REN, NRH, ont : l'hypoténuse commune, l'angle 1 = angle 3 comme ayant les côtés perpendiculaires, et les angles 2 et 4 sont égaux comme alternes internes. Or angle 4 = l'angle 3, donc angle 2 = 4. Les angles 1 et 2 sont donc égaux, de même que les triangles RNE, RNH et et l'on a RE = RH.

De même, les deux triangles rectangles NHS, NSF ont : l'hypoténuse commune, l'angle 5 = l'angle 3 comme correspondants, l'angle 6 = l'angle 4 comme ayant les côtés perpendiculaires. Or angle 4 = angle 3, donc angle 5

= angle 6, les triangles NHS, NSF sont aussi égaux et HS = SF.

Donc

$$RE + SF = RH + HS = RS.$$

C. Q. F. D.

Ainsi, pour mener une droite antiparallèle à l'hypoténuse d'un triangle rectangle, de manière que la partie RS comprise entre les deux côtés de l'angle droit soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées de ses extrémités R, S, sur l'hypoténuse BC, il suffira de projeter le pied de la hauteur sur les côtés de l'angle droit.

Nota. — Solutions analogues par MM. Anatole Chapelier, élève au lycée de Nancy; Bourdier, au lycée de Grenoble; Perreau, au lycée Henri IV; Guyenet, au lycée de Brest; Chapron, à Bragelogne; Georges Nesty, à La Guadeloupe; Henri Martin, au lycée Condorcet; L. Philippon, au collège de Thiers; G. Potier, élève au lycée Henri IV (classe de M. Colas); Maurice Froger des Chesnes, école de Pontlevoy (classe de M. Pellé); Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers.

QUESTION 172

Solution et généralisation par M. A. Fitz-Patrick, élève de mathématiques élémentaires au Lycée de Poitiers.

On considère un cercle Δ *et un diamètre* AB *de ce cercle. Soit* M *un point pris sur* Δ, *de* M *on abaisse une perpendiculaire* MR *sur* AB.

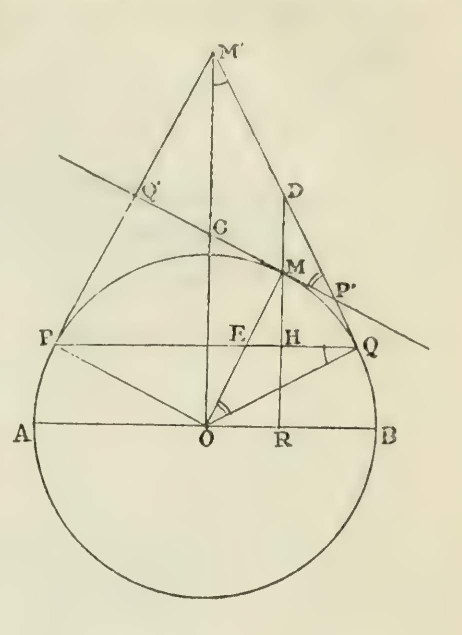
Cela posé, soit H *un point de* MR *tel que* $\frac{RH}{RM} = \frac{1}{n}$; *par* H *on mène une parallèle à* AB *qui rencontre* Δ *aux points* P *et* Q. *Les tangentes à* Δ *aux points* M, P, Q *déterminent un triangle* M'P'Q' *(*M' *désignant le sommet qui correspond à la tangente en* M, *et ainsi des autres).*

Démontrer que l'on a

$$M'P' + M'Q' = n.P'Q'.$$

Menons les droites OQ, OM, OM' et remarquons que les

deux triangles M'P'C et OQE sont semblables comme équiangles; car $\widehat{OQE} = \widehat{PM'C'}$ comme ayant les côtés perpendiculaires et étant tous les deux aigus, de plus $\widehat{CMP''} = \widehat{MOQ}$ comme supplémentaires du même angle MP'Q.



On a donc

$$\frac{P'C}{P'M'} = \frac{OE}{OQ} = \frac{OE}{OM} = \frac{RH}{RM} = \frac{1}{n}.$$

Mais

$$\frac{P'C}{P'M'} = \frac{Q'C}{Q'M'} = \frac{P'Q'}{P'M' + Q'M'},$$

par suite

$$\frac{P'Q'}{P'M' + Q'M'} = \frac{1}{n},$$

d'où

$$P'M' + Q'M' = n.P'Q'.$$

En supposant $n = 2$, on a le cas particulier proposé.

Nota. — Nous avons aussi reçu de bonnes solutions de MM. Chapron; Bourdier, au lycée de Grenoble; Rogier; Couade (Gaston), élève de mathématiques spéciales au collège Chaptal; Prince, élève au lycée de Grenoble; Henri Martin, lycée Condorcet.

QUESTION 173

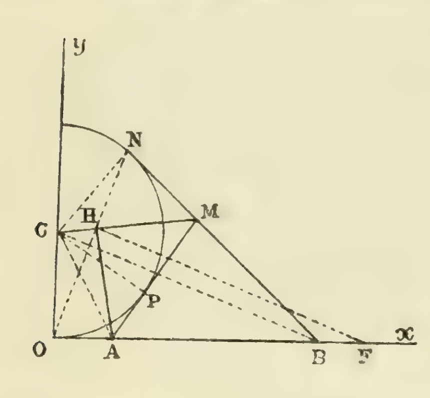
Solution par M. L. Prince, élève au Lycée de Grenoble.

On considère deux droites rectangulaires Ox *et* Oy *et sur* Ox *deux points fixes* A *et* B. *D'un point* C *mobile sur* Oy, *avec* CO *pour rayon, on décrit un cercle* Δ *et l'on mène à ce cercle, par les points* A *et* B, *deux tangentes qui se coupent en* M. *Démontrer que si l'on projette le point* A *sur* CM, *le lieu décrit par cette projection est un cercle passant par* O, *le centre de ce cercle est d'ailleurs situé au milieu de* AB. (G. L.)

Soient P et N les points de contact des tangentes AP, BN; menons CM, CN, CP, CA, CB et enfin ON qui coupe CM et H. On a

$$\widehat{ACM} = \frac{\widehat{OCP}}{2} + \frac{\widehat{PCN}}{2} = \frac{\widehat{OCN}}{2} = \widehat{OCB} = \widehat{BON}.$$

Le quadrilatère AOCH est donc inscriptible et AHC est droit, ainsi H est la projection de A sur CM. Élevons en H une perpendiculaire à ON, elle coupe Ox en F. Les triangles rectangles HOF, HCA sont semblales, car $\widehat{HCA} = \widehat{HOA}$, alors



$$OF = \frac{AC.OH}{HC}.$$

Mais HCA, OCB sont aussi semblables, on en tire

$$OB = \frac{AH.OC}{HC}.$$

Enfin dans le quadrilatère AOCH

$$AC \times OH = OC \times AH + OA \times HC$$

ou

$$\frac{AC \times OH}{HC} = \frac{OC \times AH}{HC} \quad \text{ou} \quad OF = OA + OB;$$

ce qui prouve que F est fixe. Comme OHF est droit, le lieu de H est le cercle décrit sur OF comme diamètre; son centre est au milieu de AB.

Nota. — Ont résolu cette question MM. G. Bourdier, au lycée de Grenoble; Chapron; Rogier; Couade; Réné de Vaulchier, élève à l'institution Sainte-Marie, à Besançon; Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers.

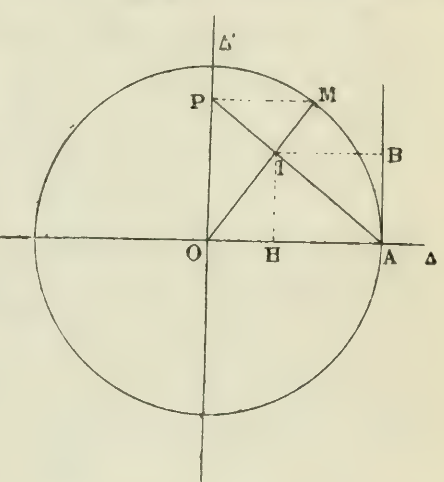
Quelques-unes de ces solutions empruntent la propriété fondamentale des tangentes aux coniques; une démonstration plus élémentaire était évidemment préférable.

QUESTION 175

Solution par M. A. Chapellier, élève au Lycée de Nancy.

On considère un cercle Γ *de centre* O *et deux diamètres rectangulaires* Δ, Δ'; *soit* A *l'une des extrémités de* Δ. *Autour de* O *on fait tourner un rayon* OM *et l'on projette en* P, *sur* Δ, *l'extrémité* M *de ce rayon;* AP *rencontre* OM *en un point* I.

Démontrer que le lieu de I *est une parabole, ayant pour foyer le centre* O *et pour directrice la parallèle à* Δ' *menée par* A.



Il suffit de prouver que OI = IB.

Les triangles semblables AHI et AOP donnent

$$\frac{AH}{IH} = \frac{OA}{OP}.$$

De même, les triangles semblables OHI et OPM donnent

$$\frac{OI}{IH} = \frac{OM}{OP}.$$

On a donc

$$OI = AH = IB.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Bodez au lycée de Chaumont; Etienne Thevenet, à Thiers; J. Chapron: Rogier; Couade; Georges Caye, élève au lycée Charlemagne (classe de M. Richard); Pierre Chazeau, de Thiers; G. Bourdier, élève de mathématiques élémentaires au lycée de Grenoble; René de Vaulchier, élève à l'institution Sainte-Marie, à Besançon; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; L. Prince, élève au lycée de Grenoble; Giovanni Russo, à Catanzaro; A. Couvert, au lycée Condorcet.

M. Chapron a généralisé la question proposée, par une voie très naturelle, en considérant deux diamètres quelconques et en effectuant, parallèlement à ces droites, des projections obliques. Le lieu est alors une hyperbole.

QUESTIONS PROPOSÉES

225. — 1° L'orthocentre, le point de Lemoine d'un triangle ABC et le point de Lemoine du triangle orthocentrique sont trois points en ligne droite.

2° Le point de Lemoine K, le centre O′ du cercle d'Euler (cercle des neuf points) d'un triangle ABC et le centre Z′ du cercle de Brocard du triangle A′B′C′ formé en menant par les sommets de ABC, des parallèles aux côtés opposés sont trois points en ligne droite et l'on a :

$$KO' = O'Z'.$$

3° Le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC, le point de Lemoine K_1 du triangle $A_1B_1C_1$ obtenu en joignant les milieux des côtés de ABC et le centre Z′ du cercle de Brocard du triangle A′B′C′ formé en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés opposés sont trois points en ligne droite et tels que :

$$OK_1 = K_1Z'.$$ *(Vigarié.)*

226. — On donne une circonférence de diamètre AB; deux points C et D sur la circonférence, de part et d'autre de AB. Du milieu E de CD on mène EF perpendiculaire sur AC et EG perpendiculaire sur AD.

Démontrer que

$$BC \times EF + BD \times EG = 2\overline{CD}^2.$$ *(Griess.)*

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13618-6.

RÉSOLUTION DU SYSTÈME DE DEUX INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

Par M. **E. Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

---

1. Définition. — *Etant donnés deux polynômes entiers en* x, *du second degré; déterminer entre quelles limites on doit faire varier* x *pour que l'on ait constamment ces deux polynômes ou de même signe ou de signes contraires, constitue la résolution d'un système de deux inégalités du second degré à une inconnue.*

Il est évident que, ce problème résolu, on saura satisfaire à un nombre quelconque d'inégalités du premier et du deuxième degré.

2. — Dans cette étude, il n'y a lieu de considérer que le cas où les racines des deux équations obtenues, en substituant le signe $=$ aux signes d'inégalité, sont toutes réelles; car, si l'une de ces équations avait ses racines imaginaires : ou l'inégalité correspondante serait contradictoire, et il y aurait impossibilité de satisfaire, en même temps, aux deux inégalités; ou cette inégalité serait identique, et le système se réduirait à une seule inégalité,

Soient donc les deux inégalités :

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' \gtrless 0$$

α et β les valeurs de x annulant le premier trinôme; α' et β' celles annulant le second; nous supposerons dans tout ce qui suit

$$\alpha < \beta \quad \text{et} \quad \alpha' < \beta'.$$

Considérons d'abord le cas particulier où les coefficients des termes variables sont proportionnels, et supposons que nous ayons

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = p.$$

Posons :

$$\frac{c}{a} = q, \qquad \frac{c'}{a'} = q' ;$$

en divisant par a la première inégalité et par a' la seconde, on a :

$$x^2 + px + q \gtrless 0,$$
$$x^2 + px + q' \gtrless 0,$$

Des deux quantités q, q', l'une q est supérieure à l'autre ; posons donc

$$q = q' + K^2 \qquad (K \textit{ réel}).$$

Les trois systèmes à considérer sont les suivants :

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + px + q > 0 \\ x^2 + px + q' > 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x^2 + px + q > 0 \\ x^2 + px + q' < 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q < 0 \\ x^2 + px + q' < 0 ; \end{array}\right.$$

car les inégalités simultanées

$$x^2 + px + q' + K^2 < 0,$$
$$x^2 + px + q' \qquad > 0,$$

sont évidemment incompatibles.

3. Résolution du premier système :

$$x^2 + px + q' + K^2 > 0,$$
$$x^2 + px + q' \qquad > 0.$$

La seconde inégalité étant remplie, la première l'est *à fortiori ;* donc il est nécessaire et suffisant de satisfaire à la seconde et la solution est :

$$\text{ou} \qquad x < \alpha', \qquad \text{ou} \qquad x > \beta'.$$

4. Résolution du second système :

$$x^2 + px + q' + K^2 > 0,$$
$$x^2 + px + q' \qquad < 0.$$

Puisque $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = - p$ et que $\alpha\beta > \alpha'\beta'$, on a

$$\alpha' < \alpha < \beta < \beta'.$$

Nous appliquons ici, comme on le voit, le théorème sur le maximum du produit de deux facteurs dont la somme est constante ; or, le second trinôme est négatif, lorsque x est compris entre α' et β' ; d'ailleurs, d'après la première inégalité, x ne peut être compris entre α et β, donc x doit varier

$$\text{soit de } \alpha' \text{ à } \alpha, \quad \text{soit de } \beta \text{ à } \beta'.$$

5. Résolution du troisième système :

$$x^2 + px + q < 0,$$
$$x^2 + px + q - K^2 < 0.$$

De même que dans le premier cas, il est suffisant et nécessaire de satisfaire à la première inégalité, et pour cela x doit varier de α à β.

6. — Revenant au cas général, nous nous proposons d'abord de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. — *Reconnaître, sans résoudre les équations*

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 + p'x + q' = 0,$$

quel est l'ordre de grandeur de leurs racines supposées réelles.

Considérons l'équation

$$x^2 + px + q = x^2 + p'x + q',$$

dont la racine

$$x_1 = \frac{q' - q}{p - p'},$$

représente l'unique valeur finie que l'on puisse attribuer à x, pour que les deux trinômes :

$$x^2 + px + q, \qquad x^2 + p'x + q'$$

soient égaux. Substituons cette valeur x_1 dans l'un de ces trinômes et appelons $\frac{X}{(p - p')^2}$ le résultat de cette substitution, nous aurons :

$$X = (q' - q)^2 + p(q' - q)(p - p') + q(p - p')^2,$$

ou

$$X = (\alpha'\beta' - \alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)(\alpha'\beta' - \alpha\beta)(\alpha + \beta - \alpha' - \beta')$$
$$+ \alpha\beta(\alpha + \beta - \alpha' - \beta')^2;$$

or, cette expression s'annule pour :

$$\alpha = \alpha', \quad \alpha = \beta' \quad \text{et} \quad \beta = \alpha', \quad \beta = \beta';$$

car, si $\alpha = \alpha'$, cela signifie que α, substitué à x, annule en même temps les deux trinômes, donc leur différence étant nulle, leur racine commune α n'est autre que $\frac{q' - q}{p - p'}$; on a donc $X = 0$.

Le polynôme X est donc divisible par le produit

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta'),$$

et le quotient de X par ce produit étant indépendant de α, β, α', β', est égal à l'unité; il est d'ailleurs facile de le voir, en ordonnant X et le produit précédent par rapport à α' et en ne considérant que le coefficient de α'^2.

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations* $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{P}' = 0$ *aient une racine commune est*

$$(q' - q)^2 + p(q' - q)(p - p') + q(p - p')^2 = 0.$$

Supposons que α soit la plus petite des quatre racines α, β, α', β'; si le résultat de la substitution de x_1 dans l'un des trinômes est *positif*, on a donc

$$\mathrm{X} > 0 \quad \text{ou} \quad (\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta') < 0;$$

les deux premiers facteurs étant négatifs, l'ordre de grandeur des quatre racines est indiqué par l'un des deux tableaux suivants :

$$\alpha < \beta < \alpha' < \beta',$$
$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta;$$

ou l'un des deux suivants, si α' est la plus petite des quatre racines :

$$\alpha' < \beta' < \alpha < \beta,$$
$$\alpha' < \alpha < \beta < \beta'.$$

Cela posé, on peut, sans troubler la généralité de cette discussion, supposer $p > p'$; alors on distinguera trois cas, selon que l'on a

$$x_1 > -\frac{p'}{2},$$

ou

$$-\frac{p'}{2} > x_1 > -\frac{p}{2},$$

ou

$$-\frac{p}{2} > x_1.$$

Premier cas : $x_1 > -\frac{p'}{2}$. — Il en résulte que x_1 est supérieur aux quatre racines.

Faisons croître x de $-\infty$ à x_1, par conséquent dans cet intervalle, on a

$$x < \frac{q' - q}{p - p'},$$

ou

$$px + q < p'x + q',$$

donc

$$x^2 + px + q < x^2 + p'x + q'.$$

Ainsi x *croissant* de $-\infty$ à x_1, la valeur du premier trinôme est constamment supérieure à celle du second; or, x_1 est supérieur à la plus petite des quatre quantités α, β, α', β'. Donc, lorsque le premier trinôme, d'abord positif, s'annulera pour la première fois, le second n'aura pas encore changé de signe ; c'est-à-dire que α est la plus petite des quatre racines.

D'autre part, si on fait *décroître* x à partir de x_1, le premier trinôme, qui est d'abord positif, puisque l'on a supposé $X > 0$, ayant une valeur constamment inférieure à celle du second, s'annulera le premier; c'est-à-dire que x, en décroissant d'une manière continue, passe par la valeur β avant d'atteindre les autres; donc β est la plus grande des quatre racines, et leur ordre de grandeur est :

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta < x_1.$$

Deuxième cas : $-\frac{p'}{2} > x_1 > -\frac{p}{2}$. — Il en résulte que x_1 est supérieur à α et β, et au contraire inférieur à α' et β', puisque $X > 0$; donc l'ordre de grandeur est

$$\alpha < \beta < x_1 < \alpha < \beta'.$$

Troisième cas : $-\frac{p}{2} > x_1$. — Il en résulte que x_1 est inférieur aux quatre racines.

Faisons *décroître* x de $+\infty$ à x_1; par conséquent, dans cet intervalle, on a

$$x > \frac{q' - q}{p - p'},$$

d'où

$$x^2 + px + q > x^2 + p'x + q'.$$

Donc, la valeur du second trinôme, d'abord positive, est constamment inférieure à celle du premier; lorsque le second s'annulera pour la première fois, le premier sera encore

positif et n'aura pas changé de signe; ainsi β' est la plus grande des quatre racines.

D'autre part, si on fait *croître* x à partir de x_1, on voit de même que le second trinôme, d'abord positif, s'annulera le premier; donc α' est la plus petite des quatre racines et leur ordre de grandeur est :

$$x_1 < \alpha' < \alpha < \beta < \beta'.$$

Enfin, si, au contraire, le résultat de la substitution de x_1 dans l'un des trinômes est *négatif*, on a

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta') < 0,$$

et l'ordre de grandeur des quatre racines est

$$\alpha < \alpha' < \beta < \beta',$$

ou

$$\alpha' < \alpha < \beta' < \beta.$$

Or, puisque $\alpha + \beta < \alpha' + \beta'$, d'après l'inégalité : $p > p'$, la première série d'inégalités est seule admissible.

(A suivre.)

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES CERCLES DE TÜCKER

Par M. **Émile Vigarié**, élève à l'École des Mines.

(*Suite*, voir p. 195.)

---

6. — *Les deux triangles* $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$ *sont égaux entre eux et semblables à* ABC.

Ils ont les trois côtés égaux comme étant deux à deux les diagonales de trapèzes isocèles; donc :

$$B_aC_b = B_cC_a \qquad C_bA = C_aA_b \qquad A_cB_a = A_bB_c.$$

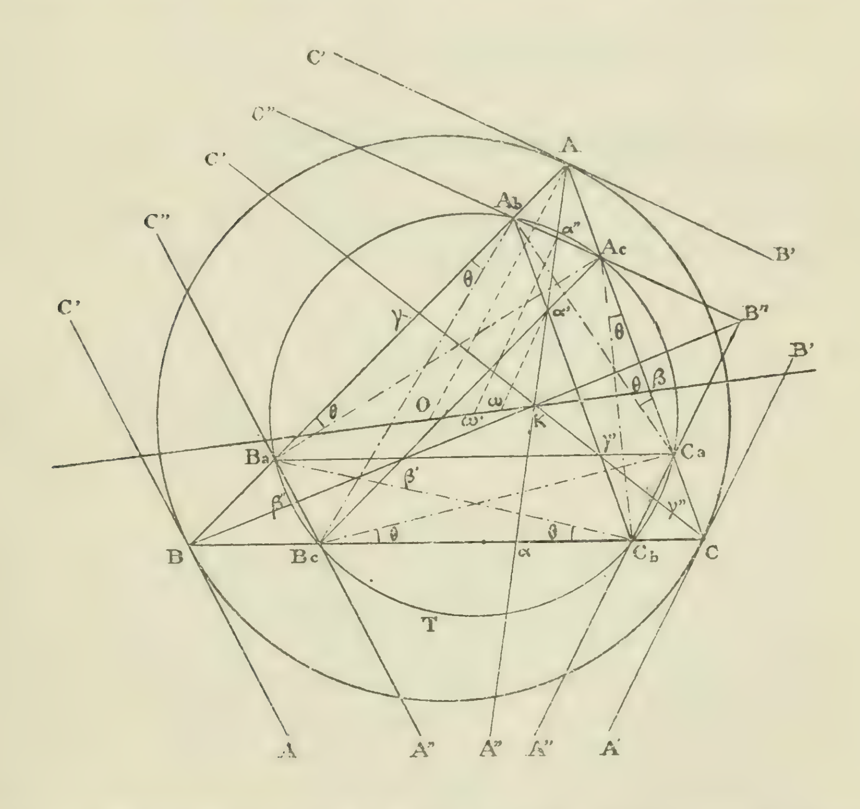
Ils sont semblables à ABC, car

$$\widehat{C_aA_bB_c} = \widehat{B_cA_cC_a} = A = \widehat{B_aA_cC_b}$$

$$\widehat{A_bB_cC_a} = \widehat{A_bB_aC_a} = B = \widehat{A_cB_aC_b}$$

$$\widehat{A_bC_aB_c} = \widehat{A_bC_bB_c} = C = \widehat{A_cC_bB_a}.$$

7. — Considérons maintenant un triangle ABC et un second triangle $A_cB_aC_b$ inscrit dans le premier, et qui lui soit semblable. La circonférence circonscrite au triangle $A_cB_aC_b$ coupera les côtés de ABC en trois autres points qui détermineront le triangle $A_bB_cC_a$; nous nous trouvons donc maintenant dans l'hypothèse formulée dans la note sur les *Théorèmes sur les intersections d'un cercle et d'un triangle*, que nous avons publiée dans ce journal (*Journal de Math. Élém. 1886*, pp. 106-109, 151-153) ; nous allons, par suite, pouvoir en tirer des conséquences résultant des formules générales que nous avons don-



nées. En nous reportant à cette étude, nous voyons immédiatement que :

1° Les angles de $A_cB_aB_b$ étant A, B, C, le triangle $A_cB_aC_b$ lui est semblable [§ 1 formule (1)] (*);

(*) Les renvois se rapportent à notre note précitée : *Théorèmes sur les intersections d'un cercle et d'un triangle d'après M. H. Taylor*

2° Les droites A_cB_c, B_aC_a, A_bC_b se coupent en trois points situés sur les symédianes du triangle ABC (§ 3);

3° L'équation du lieu du centre du triangle (§ 5, formule 5) devient ici :

$$\frac{x}{a}\sin(B-C)+\frac{y}{b}\sin(C-A)+\frac{z}{c}\sin(A-B)=0,$$

et l'on voit immédiatement que cette équation est vérifiée par les coordonnées du centre du cercle circonscrit ABC et par celles du point de Lemoine.

4° L'enveloppe des cercles de Tucker est une ellipse touchant les côtés de ABC aux pieds des symédianes. Les foyers de cette ellipse sont les points de Brocard.

8. — Nous avons vu (paragraphe 4) que les droites A_aB_b, B_aB_c, C_aC_b sont égales et que (paragraphe 5) les six points A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b sont sur un même cercle. Ces résultats ont été énoncés différemment par M. Neuberg (*Mathésis*, 1881); on peut dire :

Les extrémités de trois droites égales, menées entre les angles d'un triangle ABC, *parallèlement aux côtés du triangle orthocentrique, sont situées sur un même cercle de Tucker,*

ou bien encore :

Si les sommets d'un triangle se trouvent sur les symédianes d'un autre triangle ABC *et que ses côtés soient parallèles aux côtés du triangle orthocentrique de* ABC, *les côtés de ces triangles se coupent mutuellement en six points d'un même cercle de Tucker.*

9. — Soient α', β', γ' les points où se coupent les droites A_cB_c, A_bC_b, B_aC_a.

Le centre d'un cercle de Tucker est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit à ABC *et le centre du cercle circonscrit au triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$.

La perpendiculaire élevée en A à B'C' passe par O; le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ ayant ses côtés parallèles à ABC, la droite menée par α' parallèlement à AO passera par le centre ω du cercle cir-

conscrit à $\alpha'\beta'\gamma'$. Le centre du cercle de Tucker est sur la perpendiculaire $\alpha''\omega'$ qui est parallèle à AO. Les trois points O, ω', ω sont sur une même droite. Comme la figure $AA_b\alpha'A_c$ est un parallélogramme et que $A\alpha'$ passe par α'' milieu de A_bA_c, il en résulte que ω' est le milieu de $O\omega$.

10. — *Les trois points* X, Y, Z, *sont en ligne droite.*

En effet les deux triangles ABC, A″B″C″, étant homologiques, les points d'intersection des côtés homologues sont trois points en ligne droite.

11. — *Le cercle* T *et la circonférence circonscrite à* ABC *ont la droite* XYZ *pour axe radical.*

En effet, car dans les triangles semblables ZAC_a, ZC_bB on a

$$\frac{ZA}{ZC_b} = \frac{ZC_a}{ZB},$$

ou

$$ZA.ZB = ZC_a.ZC_b.$$

12. — *Les cercles* CBA_cA_b, BAC_aC_b, ACB_cB_a *ont pour centre radical le point de Lemoine.*

Le triangle $A_cB''C_a$ étant isoscèle, on a $B''A_c = B''C_a$; or comme $A_bA_c = C_aC_b$ on a :

$$B''A_c \times A_bA_c = B''C_a \times C_aC_b.$$

Le point B″ situé sur la médiane antiparallèle ou symédiane $B\beta$ est un point de l'axe radical des deux circonférences BA_bA_cC, AC_aC_bB; comme ces circonférences passent par le point B, la symédiane $B\beta$ est l'axe radical. On prouverait de même que les circonférences prises deux à deux ont pour axe radical une symédiane; elles ont donc pour centre radical le point de Lemoine.

De là résulte ce théorème :

Si deux cercles passant par A, B *et* A, C *se coupent en un point de la symédiane* AK, *les angles* ACB, ABC *interceptent des cordes égales.*

13. — Les côtés des deux triangles $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$ font avec les côtés homologues de ABC le même angle θ, car on a :

$$\widehat{C_aB_cC_b} = \widehat{A_bC_aA_c} = \widehat{B_cA_bB_a} = \theta,$$
$$\widehat{B_aC_bB_c} = \widehat{A_cB_aA_b} = \widehat{C_bA_cC_a} = \theta\,;$$

on peut donc dire que :

Si dans un triangle ABC *on inscrit deux triangles* $A_cB_aC_b$, $A_bB_cC_a$, *semblables à* ABC, *tels que les côtés font avec leurs homologues de* ABC *le même angle* θ, *les sommets des deux triangles inscrits appartiennent à un cercle de Tucker.*

14. — AB_aA_c, BB_aC_b, CC_bA_c se coupent en un point Ω tel que les angles $\widehat{B_a\Omega C_b} = \widehat{A\Omega B} = \pi - B$; $\widehat{C_b\Omega A_c} = B\Omega C = \pi - C$. Donc :

Les triangles ABC, $C_bA_cB_a$ *ont même premier point de Brocard* Ω.

De même :

Les deux triangles ABC, $A_bB_cC_a$ *ont même deuxième point de Brocard* Ω'.

15. — Si Ω, Ω' sont les points de Brocard du triangle ABC et si nous appelons, avec M. Neuberg, *faisceaux de Brocard* les groupes de droites (ΩA, ΩB, ΩC), ($\Omega' A$, $\Omega' B$, $\Omega' C$), on peut énoncer ainsi un autre mode de génération des cercles de Tucker :

Si l'on fait tourner les deux faisceaux de Brocard autour de leurs centres d'un même angle θ *et en sens contraire, les rayons rencontrent les côtés correspondants de* ABC *en six points d'un cercle de Tucker.*

Les points de Brocard sont donc les deux *centres permanents de similitude.*

Les propriétés générales des *cercles de Tucker* que nous venons de donner, et dont la plupart ont été énoncées par les auteurs dont nous avons cité les mémoires au commence-

ment de cette note, et particulièrement par M. E. Lemoine (*Mathésis* 1884), donnent comme cas particuliers remarquables : le premier cercle de Lemoine, les cercles de Taylor, Neuberg, M'Cay, etc. Ils feront l'objet d'un prochain article.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES REMARQUABLES

Par M. **A. Boutin**, professeur au Collège de Vire.

---

1. — *Résoudre l'équation*

$$C = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos (2^n - 1)x = 0. \quad (1)$$

Groupons les termes à égale distance des extrêmes et transformons leur somme en produit; il vient :

$$\cos x + \cos (2^n - 1)x = 2 \cos 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 1)x$$
$$\cos 3x + \cos (2^n - 3)x = 2 \cos 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 3)x$$
$$\cos 5x + \cos (2^n - 5)x = 2 \cos 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 5)x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La dernière des égalités comprend les deux termes du milieu; le nombre des termes du premier membre de (1) est 2^{n-1}; il est donc toujours pair, sauf pour $n = 1$; ces deux termes du milieu ont les rangs

$$2^{n-2}, \quad 2^{n-2} + 1,$$

et leur expression est : $\cos (2^{n-1} - 1)x$, pour le premier; et $\cos (2^{n-1} + 1)x$, ou $\cos (2^n - 2^{n-1} + 1)x$, pour l'autre.

Donc

$$\cos (2^{n-1} - 1)x + \cos (2^n - 2^{n-1} + 1)x = 2 \cos 2^{n-1}x \cos x,$$

Ajoutons membre à membre toutes les égalités précédentes, nous avons

$$C = 2 \cos 2^{n-1}x[\cos (2^{n-1} - 1)x + \cos (2^{n-1} - 3)x + \ldots$$
$$+ \cos 3x + \cos x] = 0.$$

La quantité entre crochets est de la même forme que le premier membre de l'équation proposée; il suffit pour l'obtenir d'y remplacer n par $n - 1$; on pourra donc, par le même

moyen, faire apparaître le facteur $2 \cos 2^{n-2}x$; puis, dans la nouvelle parenthèse, un facteur analogue; et ainsi de suite. On arrive ainsi à la formule que nous avions en vue :

$$C = 2^{n-1} \cos x . \cos 2x . \cos 4x . \cos 8x \ldots \cos 2^{n-1}x.$$

Les racines de l'équation $C = 0$ sont celles des équations :

$$\cos x = 0, \quad \cos 2x = 0, \quad \cos 4x = 0, \ldots \quad \cos 2^{n-1}x = 0.$$

Toutes ces équations rentrent dans la dernière, si on suppose que n puisse recevoir toutes les valeurs entières de 1 à n.

On a donc, finalement,

$$x = \frac{(2k + 1)\pi}{2^p},$$

k étant un entier quelconque positif, négatif ou nul; et p ne pouvant recevoir que les valeurs entières de 1 à n.

2. — *Résoudre l'équation*

$$C' = 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots$$
$$+ \cos(2^{n+1} - 2)x = 0.$$

Groupons, comme précédemment, les termes équidistants des extrêmes; il vient :

$$1 + \cos (2^{n+1} - 2)x = 2 \cos^2 (2^n - 1)x$$
$$\cos 2x + \cos (2^{n+1} - 4)x = 2 \cos (2^n - 1)x \cos (2^n - 3)x$$
$$\cos 4x + \cos (2^{n+1} - 6)x = 2 \cos (2^n - 1)x \cos (2^n - 5)x.$$
. . . .
$$\cos 2^nx + \cos (2^{n+1} - 2^n - 2)x = 2 \cos (2^n - 1)x \cos x.$$

Ajoutons membre à membre toutes ces égalités et mettons en facteur $2 \cos (2^n - 1)x$, dans le second membre ; il vient

$$C' = 2 \cos (2^n - 1)x[\cos (2^n - 1)x + \cos (2^n - 3)x$$
$$+ \ldots + \cos x].$$

La quantité entre crochets est le premier membre C de l'équation traitée précédemment ; on a donc immédiatement

$$C' = 2^n \cos (2^n - 1)x . \cos 2^{n-1}x . \cos 2^{n-2}x \ldots \cos 2x \cos x.$$

L'équation $C' = 0$ admet donc pour racines, outre les racines de $C = 0$, celles de l'équation

$$\cos (2^n - 1) x = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{(2k + 1)\pi}{2(2^n - 1)}.$$

3. — *Résoudre l'équation*

$$S = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \dots + \sin (2^n - 1)x = 0.$$

Groupons encore les termes à égale distance des extrêmes :

$$\sin x + \sin (2^n - 1)x = 2 \sin 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 1)x$$
$$\sin 3x + \sin (2^n - 3)x = 2 \sin 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 3)x$$
$$\sin 5x + \sin (2^n - 5)x = 2 \sin 2^{n-1}x \cos (2^{n-1} - 5)x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sin (2^{n-1} - 1)x + \sin (2^n - 2^{n-1} + 1)x = 2 \sin 2^{n-1}x \cos x.$$

Ajoutons membre à membre ces égalités et mettons $2 \sin 2^{n-1}x$ en facteur, il vient

$$S = 2 \sin 2^{n-1}x[\cos (2^{n-1} - 1)x + \cos (2^{n-1} = 3)x + \dots + \cos x].$$

La quantité entre parenthèses est C, où n a été remplacé par $n - 1$. On a donc

$$S = 2^{n-1} \cos x . \cos 2x . \cos 4x \dots \cos 2^{n-2}x . \sin 2^{n-1}x.$$

Ainsi les racines de $S = 0$ sont

$$x = \frac{(2k + 1)\pi}{2^p}, \quad \text{et} \quad x = \frac{k\pi}{2^{n-1}};$$

k pouvant recevoir toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, et p les valeurs positives, entières, de 1 à $n - 1$.

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 198.)

22. Points Brocardiens. — Si l'on considère un point M,

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}, \qquad (1)$$

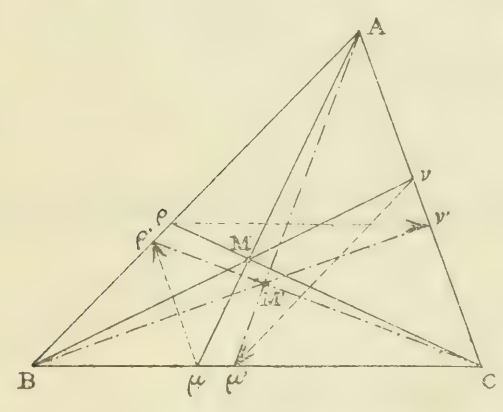
parmi les points que l'on peut associer à celui-ci on doit encore signaler deux points M′, M″ dont les coordonnées vérifient les égalités

$$B\alpha' = C\beta' = A\gamma', \qquad (M')$$
$$C\alpha'' = A\beta'' = B\gamma'', \qquad (M'')$$

et qui constituent avec le point M ce que M. Neuberg nomme, familièrement, un triumvirat. Ces points M′ et M″, ainsi associés à M, se déduisent de celui-ci, comme le couple de Brocard du point de Lemoine; on peut les appeler *points Brocardiens* correspondant au point donné (*).

La construction de ces points se fait très simplement de la manière suivante (**).

Les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés du triangle en des points μ, ν, ρ; menons :



$\mu\rho'$ parallèle à CA,
$\nu\mu'$ — AB,
$\rho\nu'$ — BC,

les droites $A\mu'$, $B\nu'$, $C\rho'$ concourent en un point qui est l'un des points Brocardiens correspondant au point M.

On voit d'abord que les droites en question concourent; il suffit d'appliquer aux points μ, ν, ρ; μ', ν', ρ' le théorème de Jean de Céva, et la propriété réciproque.

En outre, on a

$$\frac{B\rho'}{A\rho'} = \frac{B\mu}{C\mu}, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{C}{B};$$

et

$$\frac{A\nu'}{C\nu'} = \frac{A\rho}{B\rho}, \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{A}.$$

Ces égalités donnent bien

$$B\alpha' = C\beta' = A\gamma'.$$

(*) Cette généralisation de l'idée qui fait apparaître les points de Brocard dans l'étude de la géométrie du triangle paraît due à M. Lemoine, qui l'a fait connaître dans un très intéressant mémoire communiqué au congrès de l'Association française, à Grenoble. (V. *Annuaire* 1885.) Ce mémoire se trouve aussi dans le *Supplément du numéro de mai* 1886 *de Mathésis*.

(**) Cette construction a été donnée par M. Lemoine, *Nouvelles Annales*, 1885, p. 202.

Pour obtenir le second point Brocardien, il faut effectuer le tracé indiqué, mais dans l'ordre inverse; mener μ_2'' parallèle à BA, etc.

23. Points isobariques. -- A un point donné M (A, B, C) on peut aussi associer des points que nous désignerons par M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 conformément aux tableaux suivants :

M ...	A,	B,	C	M_3...	A,	C,	B
M_1...	B,	C,	A	M_4...	C,	B,	A
M_2...	C,	A,	B	M_5 ..	B,	A,	C

On obtient ainsi un groupe de six points que, pour une raison que nous allons donner, nous appellerons, avec M. Neuberg, *groupe isobarique* associé à un point donné.

La raison de cette dénomination découle de ce fait que *les deux triangles* MM_1M_2, $M_3M_4M_5$ *ont le même centre de gravité que le triangle de référence.*

Dans le premier groupe que nous qualifierons *groupe de première espèce*, pour le distinguer du second, le point milieu (*) de M_1M_2 est représenté par les coordonnées

$$B + C, \quad C + A, \quad A + B;$$

or, ces quantités sont, précisément, les coordonnées du point complémentaire de M.

Cette démonstration si simple s'applique, de même, au groupe isobarique de seconde espèce $M_3M_4M_5$.

La construction des points isobariques, associés à un point donné, n'offre aucune difficulté.

Pour les points de première espèce, il suffit d'observer qu'ils sont les réciproques des points Brocardiens.

Pour ceux de seconde espèce la construction est encore beaucoup plus simple.

Prenons, par exemple, le point M_3 et comparons-le au

(*) Lorsque les coordonnées de deux points M, M′ sont :

$$A, B, C; \qquad A', B', C';$$

si l'on a

$$A + B + C = A' + B' + C'$$

les coordonnées du point milieu ω sont proportionnelles à

$$A + A', \quad B + B', \quad C + C'.$$

On démontre ceci, en deux mots, et très élémentairement, en cherchant *les coordonnées absolues* des points M, M′ et ω.

point donné M. Nous observons alors : 1° que les deux points M et M_3 formant, avec la base BC du triangle de référence, deux triangles de même aire, la droite MM_3 est parallèle à BC ; 2° que les droites AM et AM_3 rencontrent BC en deux points isotomiques. De cette double remarque on déduit la détermination de M_3, connaissant M, par un tracé tout à fait simple.

24. Construction de l'associé à l'infini. — Cette construction, que nous avions réservée, peut se faire très simplement par la considération des points isobariques.

Soit M un point, et soient A, B, C ses coordonnées; les points isobariques de première espèce correspondants M_1, M_2 sont représentés par

$$B, \quad C, \quad A; \qquad C, \quad A, \quad B;$$

la droite M_1M_2 a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Sigma\, \alpha(BC - A^2) = 0.$$

Cette droite passe visiblement par le point M_∞

$$B - C, \qquad C - A, \qquad A - B,$$

en vertu de l'identité

$$\Sigma\, (B - C)(BC - A^2) \equiv 0.$$

Par exemple : au centre I du cercle inscrit (a, b, c) correspondent deux points isobariques de première espèce I_1 (b, c, a), I_2 (c, a, b) qui ont été étudiés par M. Jérabek (*Mathesis*, t. I[er]; p. 192); la droite I_1I_2 donne la direction du point situé à l'infini, associé de I, et dont les coordonnées sont

$$b - c, \qquad c - a, \qquad a - b.$$

La droite I_1I_2 a pour équation

$$\Sigma\, \alpha(bc - a^2) = 0,$$

et le point, harmoniquement associé à la transversale réciproque de cette droite, a pour coordonnées

$$bc - a^2, \qquad ac - b^2, \qquad ab - c^2.$$

Ce point a été déjà signalé; les considérations qui précèdent donnent un moyen assez rapide pour trouver sa position.

Observons encore qu'il résulte d'une remarque faite plus haut un autre moyen pour trouver le point qui est associé à l'infini avec le centre du cercle inscrit. Ce point est en effet harmoniquement associé avec la transversale réciproque de la droite qui joint le centre du cercle inscrit au centre de gravité.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur aux Collège de Vire.

1. — Si dans un triangle ABC on considère les trois cercles qui ont leur centre sur un côté et sont tangents aux deux autres, la somme des inverses de leurs rayons est égale au double de l'inverse du rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

2. — Si l'on considère les cercles qui ont pour centres les pieds des bissectrices extérieures d'un triangle et qui sont tangents aux deux autres côtés prolongés, le diamètre de l'un d'eux est une moyenne harmonique entre les rayons des deux autres.

3. — Chacune des hauteurs d'un triangle ABC le partage en deux autres; on a ainsi six triangles. Si dans chacun d'eux on inscrit un cercle, et qu'on désigne dans un certain ordre leurs rayons par r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, le produit des rayons d'indice pair est égal au produit des rayons d'indice impair.

4. — Si on substitue aux hauteurs considérées dans l'exercice précédent les bissectrices intérieures, et que a', a'', b', b'', c', c'' soient les segments déterminés sur chaque côté par la bissectrice de l'angle opposé, $r_{a'}$, $r_{a''}$, $r_{b'}$ ... soient les rayons des six cercles considérés, on a la relation

$$\frac{a}{r_{b'}} + \frac{b}{r_{c'}} + \frac{c}{r_{a'}} = \frac{a}{r_{c''}} + \frac{b}{r_{a''}} + \frac{c}{r_{b''}}.$$

5. — Si, dans l'exercice précédent, on substitue aux bissectrices intérieures les bissectrices extérieures, et que l'on désigne par $r'_{a'}$, $r'_{a''}$, $r'_{b'}$ ... les six rayons des cercles considérés, on a, en employant les mêmes notations, la relation

$$\frac{1}{c-b}\left(\frac{c}{r'_{a'}}-\frac{b}{r'_{a''}}\right)+\frac{1}{a-c}\left(\frac{a}{r'_{b'}}-\frac{c}{r'_{b''}}\right)+\frac{1}{b-a}\left(\frac{b}{r'_{c}}-\frac{a}{r'_{c''}}\right)=\frac{1}{r}.$$

6. — Si, aux lignes considérées précédemment, on substitue les droites qui joignent le sommet d'un triangle au point de contact du cercle inscrit sur le côté opposé, et que l'on désigne par r_1, r_2, r_3 ... les six rayons des cercles analogues dans un certain ordre, on a la relation

$$\frac{1}{r_1 r''}+\frac{1}{r_3 r'''}+\frac{1}{r_5 r'}=\frac{1}{r_2 r'''}+\frac{1}{r_4 r'}+\frac{1}{r_6 r''}.$$

7. — Si aux lignes précédemment considérées on substitue les droites qui joignent le sommet d'un triangle au point de contact du cercle ex-inscrit sur le côté opposé, on a encore six cercles inscrits, soient r_1, r_2, r_3 ... leurs rayons, dans un certain ordre; le produit des rayons d'indice pair est égal au produit des rayons d'indice impair.

8. — Si on considère les cercles analogues, en remplaçant par les médianes les lignes considérées dans les exercices précédents, et que r_1, r_2, r_3 ... soient leurs rayons, la somme des inverses des rayons d'indice pair est égal à la somme des inverses des rayons d'indice impair (*).

9. — Si on joint le centre de gravité d'un triangle aux trois sommets, on le décompose en trois autres triangles; si R_a, R_b, R_c sont les rayons des cercles inscrits dans ces trois

(*) Ce résultat, que je croyais nouveau, figure dans le *Journal de Mathématiques* (année 1881, p. 64). Il n'est conservé ici que pour compléter la suite de ces propositions.

derniers triangles, on a la relation

$$\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_6}-\frac{3}{r}.$$

10. — Si dans un triangle ABC on considère simultanément les trois médianes, elles partagent ABC en six triangles; si r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 sont les rayons des cercles inscrits dans ces six triangles, et dans un certain ordre, la somme des inverses des rayons d'indice pair est égale à la somme des inverses des rayons d'indice impair.

11. — Si par le sommet A d'un triangle on mène une droite AD quelconque, arrêtée au côté a, elle partage le triangle ABC en deux triangles T_1 et T_2, additifs ou soustractifs, tels que le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ des cercles circonscrits aux triangles T_1, T_2 est égal au rapport $\frac{c}{b}$ des côtés qui comprennent l'angle A.

On en déduit que si l'on mène par les sommets B et C d'autres droites, et que si l'on considère les rayons R_3, R_4, R_5, R_6 des cercles analogues à R_1 et R_2, le produit K des rayons d'indice pair est égal au produit des rayons d'indice impair.

Nota. — On trouvera

$$K = R_1R_3R_5 = \frac{AD.BE.CF}{8 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}.$$

Voici la valeur de K pour quelques lignes remarquables du triangle

(Médianes) (*)

$$K = \frac{a^2b^2c^2mm'm''}{64\, S^3};$$

(Hauteurs)

$$K = \frac{abc}{8};$$

(*) La proposition rapportée par M. Gino-Loria (*Journal*, année 1881, p. 64) n'est qu'un cas particulier de ce théorème très général.

(Bissectrices intérieures)

$$K = \frac{abc}{8 \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) \text{ins}\left(C + \frac{B}{2}\right) \sin\left(A + \frac{C}{2}\right)};$$

(Bissectrices extérieures)

$$K = \frac{d'_a\, d'_b\, d'_c}{8 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}, \quad \text{etc.}$$

12. — Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant les rayons a et b des demi-cercles qui ont leur centre sur un côté de l'angle droit et sont tangents aux deux autres côtés.

13. — Si on considère les trois hyperboles qui ont pour foyers les deux sommets d'un triangle et passent par le troisième sommet :

1° L'un des axes focaux est égal à la somme des deux autres;

2° Le produit des demi-axes non-transverses est égal au produit de la surface du triangle par le rayon du cercle inscrit;

3° Si 2α, 2β, 2γ représentent les angles des asymptotes de ces trois hyperboles, on a la relation

$$\sin \beta \,.\, \sin B = \sin \alpha \,.\, \sin A + \sin \gamma \,.\, \sin C;$$

4° Les trois branches de courbe passant par les sommets se coupent en un même point. (Il en est de même d'une de ces branches et des deux secondes pour les deux autres hyperboles;

5° Deux des ellipses considérées dans la question proposée n° 201 (*Journal de Mathématiques*, décembre 1885) et l'hyperbole passant par le troisième sommet se coupent en un même point.

On peut exprimer les côtés, la surface et le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC au moyen des axes non-transversales $2a$, $2b$, $2c$ des trois hyperboles. Le carré de l'inverse du rayon du cercle inscrit est égal à la somme des carrés des inverses des demi-axes non-transverses.

14. — On considère un cercle O et deux diamètres AA′, BB′

rectangulaires; on mène un rayon quelconque OC, puis CD parallèle à OA, D étant le point où CD coupe OB; on mène AD qui coupe OC en un point M dont on demande le lieu.

Ce lieu est une parabole qui a pour foyer le point O et pour directrice la tangente en A au cercle.

15. — On a entre les côtés a, b, c d'un triangle quelconque ABC et les distances d_1, d_2, d_3 du point de concours H des hauteurs aux sommets, la relation

$$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}=\frac{abc}{d_1d_2d_3}.$$

16. — Couper un cône circulaire droit donné par un plan parallèle à une des génératrices et tel que le segment parabolique de section ait une aire maximum (*).

17. — On considère un cercle O et deux points fixes A et B à égale distance du centre sur le diamètre fixe A′B′; un troisième point mobile C parcourt la circonférence. On joint CA, CB; ces deux droites rencontrent respectivement en D et en E la circonférence; les tangentes en D et en E se coupent en un point M dont on demande le lieu.

Ce lieu est une ellipse qui a pour petit axe A′B′.

(A suivre.)

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

FACULTÉ DE LYON

29 juillet 1885. — I. Mesure de l'aire de la sphère.

II. Quel est le poids de glace à 0° nécessaire pour amener à l'état d'eau liquide à 5°, 95gr de vapeur d'eau saturante à 100°? La chaleur de fusion de la glace est 80, la chaleur de condensation de la glace est 537.

(*) Cette question, qui figure dans le recueil d'exercices d'analyse infinitésimale de M. Frenet, peut se traiter élémentairement.

1er août. — Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un seul sommet. Appliquer au cas d'un triangle équilatéral dont le côté = 1m tournant autour d'un axe incliné à 45° sur l'un des côtés.

CORRESPONDANCE

Remarque sur les puissances de 11.

Mon cher ami,

La présente remarque est tellement simple que j'ai presque honte de vous l'adresser. Tout le monde a dû la faire, et cependant je ne l'ai vue imprimée nulle part. Elle aurait cependant, à mon avis, une véritable utilité si on l'introduisait dans l'enseignement d'une façon régulière.

Voici ce dont il s'agit. Les puissances successives de 11 sont : 11, 121, 1331, 14641, etc. On reconnaît immédiatement à l'inspection des chiffres de chacun de ces nombres les coefficients des puissances du binôme, et il n'en peut être autrement, puisque la règle de la multiplication par 11 est identique avec la formation ordinaire du triangle arithmétique de Pascal. D'ailleurs, 11 étant égal à $10 + 1$, 11^p sera $(10 + 1)^p$, c'est-à-dire que les chiffres seront les coefficients des termes dans le développement de $(x + 1)^p$. Pour le système décimal, la remarque ne s'applique que jusqu'à la 4e puissance ; car au delà les coefficients sont supérieurs à 10. Mais si l'on considère le nombre 11 comme écrit dans une base de numération aussi grande qu'on voudra, il n'y a plus de limitation, et les chiffres successifs seront, pour les diverses puissances,

(1), (1)
(1), (2), (1)
(1), (3), (3), (1)
(1), (4), (6), (4), (1)
(1), (5), (10), (10), (5), (1)
(1), (6), (15), (20), (15), (6), (1)
. . . .

(Je mets ici les nombres entre parenthèses pour exprimer qu'ils représentent, sans exception, des *chiffres* d'un certain système de numération.)

Par exemple, la 6e puissance de 38 dans le système de numération de base 37 s'écrira

$$(1)(6)(15)(20)(15)(6)(1).$$

Ne pensez-vous pas que cette remarque ramène au fond la formule du binôme aux plus simples notions de l'arithmétique élémentaire, c'est-à-dire à la théorie de la multiplication la plus facile et qu'à ce titre elle devrait prendre couramment place dans l'enseignement ?

Si oui, donnez-lui accès dans l'un de vos deux excellents journaux.

Si non, excusez-moi de vous avoir pris vos instants pour une chose insignifiante.

Et dans tous les cas croyez-moi bien toujours votre tout dévoué.

C.-A. LAISANT.

Extrait d'une lettre de M. Ed. LUCAS.

M. Ed. Lucas nous écrit pour nous faire observer qu'on peut ajouter aux renseignements bibliographiques que M. Casimir Rey a donnés dans sa note sur l'omniformule, le suivant.

Un mémoire de Chelini publié dans le *Giornale Arcadico*, t. 96, a pour titre : *Teorema di Steiner, sul volume di un corpo-terminato da basi paralleles circoscritto lateralimento da una superficie rigata*, par D. CHELINI, delle scuole Pie.

M. Ed. Lucas possède l'exemplaire de Chelini dédié à Steiner mais il ignore la date de sa publication; un de nos correspondants d'Italie, s'il possède le journal cité, nous la fera sans doute connaître.

G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

227. — Etant donnée une parabole de foyer F, on considère la perpendiculaire à l'axe passant au foyer et coupant la parabole en A et B : par ces points on mène des parallèles à l'axe $\Delta\Delta'$. Soit M un point de la parabole, on joint AM, BM qui coupent $\Delta\Delta'$ en K, H. Enfin HK coupe AB en I et l'on projette M en C sur AB. Démontrer :

1° Que le cercle ABM est coupé par CM en un point dont le lieu est une droite ;

2° $AH + BK = \text{const.}$;

3° HK passe par un point fixe D ;

4° Le cercle DIC est tangent à l'axe en un point fixe ;

5° Les cercles qui ont leur centre sur HK et passent par HC, IC, sont orthogonaux ;

6° L'axe radical de ces cercles passe par un point fixe ;

7° Cet axe radical et les droites MF et HK concourent ;

8° HK est parallèle à la tangente en M ;

9° $AH - BK = 2CF$. (*Louis Prince*, élève au lycée de Grenoble.)

228. — On donne, dans un plan, un angle xOy, et un point A. Par les points O, A, on fait passer une infinité de circonférences. Soit BC la corde déterminée, dans l'une d'elles, par les côtés de l'angle. Soit M la projection de A sur BC. Le lieu de M est la *droite de Simson* relative aux données (*). (*Catalan.*)

(*) Cette proposition, *évidente*, a seulement pour objet de généraliser la définition habituelle.

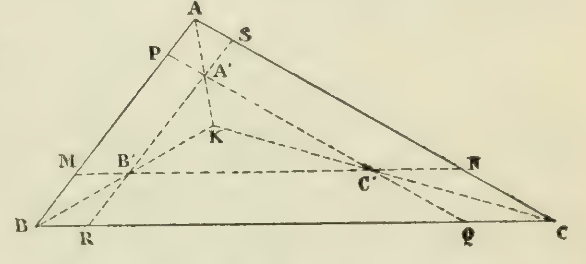
Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18666-6.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES CERCLES DE TÜCKER (*)

Par **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

1. — Les côtés d'un triangle A′B′C′ homothétique au triangle de référence ABC par rapport au point de Lemoine K peuvent être représentés, en coordonnées barycentriques, respectivement par les équations



$$x = \lambda a^2,$$
$$y = \lambda b^2,$$
$$z = \lambda c^2,$$

λ désignant le rapport BB′ : $(a^2 + b^2 + c^2)$BK. La somme des trois coordonnées absolues d'un point étant égale à l'unité, on trouve aisément pour les coordonnées des points 1_2, 1_3 où BC est coupé par A′C′, A′B′ :

$1_2 \ldots 0, \quad \lambda b^2, \quad 1 - \lambda b^2; \qquad 1_3 \ldots 0, \quad 1 - \lambda c^2, \quad \lambda c^2.$

Exprimant que ces valeurs vérifient l'équation d'une circonférence :

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x + y + z)(Ax + By + Cz) = 0,$$

on obtient

$$B = - c^2a^2\lambda(1 - \lambda b^2), \qquad C = - a^2b^2\lambda(1 - \lambda c^2).$$

La forme de ces égalités montre que si l'on pose

$$A = - b^2c^2\lambda(1 - \lambda a^2),$$

la circonférence passe par les six points d'intersection 1_2, 1_3, 2_1, 2_3, 3_1, 3_2 des côtés non homologues des triangles ABC, A′B′C′. Donc l'équation d'un cercle de Tücker est (**)

$$\Sigma \frac{yz}{b^2c^2} - \lambda\Sigma x\Sigma\left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right)x = 0 \cdot \qquad (1)$$

(*) Voyez dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (1886; p. 195) une étude géométrique des cercles de Tücker, par M. E. Vigarié.

(**) Comparer *A group of circles*, by R. Tücker (*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XX).

L'axe radical de ce cercle et du cercle ABC a pour équation

$$\Sigma \frac{x}{a^2} - \lambda \Sigma x = 0\,;$$

il est donc parallèle à la droite de Lemoine et les centres des cercles de Tücker sont sur la droite OK.

L'équation (1) peut être écrite ainsi :

$$\lambda^2 \Sigma^2 x - \lambda \Sigma x \Sigma \frac{x}{a^2} + \Sigma \frac{yz}{b^2c^2} = 0.$$

On en déduit l'équation de l'enveloppe des circonférences de Tücker, savoir

$$\Sigma^2 \frac{x}{a^2} - 4\Sigma \frac{yz}{b^2c^2} = 0,$$

ou

$$\Sigma \frac{x^2}{a^2} - 2\Sigma \frac{xy}{a^2b^2} = 0.$$

Cette enveloppe est donc une ellipse qui touche les côtés de ABC aux pieds des symédianes et a, avec le cercle ABC, un double contact sur la droite de Lemoine.

2. — On peut arriver plus rapidement à l'équation (1).

Si l'on pose $I = x + y + z$, les côtés du triangle A'B'C' ont pour équations

$$\frac{x}{a^2} - \lambda I = 0, \qquad \frac{y}{b^2} - \lambda I = 0, \qquad \frac{z}{c^2} - \lambda I = 0,$$

et toute cubique passant par les neuf intersections des côtés des triangles ABC, A'B'C' est représentée par

$$\left(\frac{x}{a^2} - \lambda I\right)\left(\frac{y}{b^2} - \lambda I\right)\left(\frac{z}{c^2} - \lambda I\right) - mxyz = 0. \qquad (2)$$

On obtient la cubique formée de la droite I passant par les intersections des côtés homologues, et de la conique passant par 1_2, 1_3, 2_1, 2_3, 3_1, 3_2 si l'on pose $m = \frac{1}{a^2b^2c^2}$. Le facteur I se sépare alors de l'équation et il reste l'équation (1).

3. — La même méthode sert à démontrer analytiquement un second mode de génération des cercles de Tücker.

Soient $A_tB_tC_t$ le triangle formé par les tangentes en A, B, C à la circonférence, et $\alpha\beta\gamma$ un triangle homothétique à $A_tB_tC_t$

par rapport à K. Les équations des côtés de ces triangles sont

$$\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=0,\qquad \frac{z}{c^2}+\frac{x}{a^2}=0,\qquad \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=0,$$

$$\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}-\mu=0,\quad \frac{z}{c^2}+\frac{x}{a^2}-\mu_1=0,\quad \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}-\mu_2=0,$$

μ, μ_1, μ_2 étant des constantes. Si l'on retranche l'une de l'autre deux des dernières équations, on doit trouver les équations des symédianes; donc $\mu=\mu_1=\mu_2$. On voit facilement que l'axe d'homologie des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ a pour équation

$$H \equiv \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}-\mu=0;$$

c'est une parallèle à la droite de Lemoine. Les équations des côtés de $\alpha\beta\gamma$ étant mises sous la forme

$$H-\frac{x}{a^2}=0,\quad H-\frac{y}{b^2}=0,\quad H-\frac{z}{c^2}=0,$$

l'équation d'une cubique passant par les neuf intersections des côtés de ABC et $\alpha\beta\gamma$ est

$$\left(H-\frac{x}{a^2}\right)\left(H-\frac{y}{b^2}\right)\left(H-\frac{z}{c^2}\right)+mxyz=0.$$

Cette courbe se décompose en une droite H et une conique, si l'on prend $m=\frac{1}{a^2b^2c^2}$; on retrouve ainsi l'équation (1). On peut observer que la droite H est l'axe radical du cercle (1) et du cercle ABC.

4. Passons aux cas particuliers les plus remarquables.

A. On obtient le *premier cercle de Lemoine* en menant par K des parallèles à BC, CA, AB. On a alors $\lambda=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$; donc ce cercle a pour équation

$$\Sigma\frac{y^2}{b^2c^2}-\frac{x+y+z}{(a^2+b^2+c^2)^2}\Sigma\frac{b^2+c^2}{a^2}x=0.$$

B. Le *deuxième cercle de Lemoine* correspond au cas où les côtés de $\alpha\beta\gamma$ passent par K; le triangle A'B'C' est alors symé-

trique de ABC par rapport à K. Il faut maintenant poser $\lambda = \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$, ce qui donne pour l'équation du cercle :

$$\Sigma \frac{y^2}{b^2c^2} - 2 \frac{x + y + z}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \Sigma \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} x = 0.$$

C. Le *cercle de Taylor* conduit à des calculs intéressants.

Soient A_h, B_h, C_h les pieds des hauteurs de ABC, et pour avoir les mêmes notations qu'au 1°, soient :

1_3 et 1_2 les projections de B_h et C_h sur BC ;
2_1 et 2_3 — — C_h et A_h — CA ;
3_2 et 3_1 — — A_h et B_h — AB.

Cherchons les coordonnées barycentriques de ces points. On a $C1_3 = CB_h \cos C = a \cos^2 C$, $B1_3 = a - C1_3 = a \sin^2 C$; d'où les coordonnées de 1_3 :

$$x = 0, \quad y = \frac{C1_3}{CB} = \cos^2 C, \quad z = \frac{B1_3}{BC} = \sin^2 C.$$

On peut donc former le tableau suivant :

1_3 $(0, \cos^2 C; \sin^2 C)$, 2_3 $(\cos^2 C, 0, \sin^2 C)$;
2_1 $(\sin^2 A, 0, \cos^2 A)$, 3_1 $(\sin^2 A, \cos^2 A, 0)$;
3_2 $(\cos^2 B, \sin^2 B, 0)$, 1_2 $(0, \sin^2 B, \cos^2 B)$;

D'où l'on conclut que les droites $1_3 2_3$, $2_1 3_1$ $3_2 1_2$ ont pour

$z = \sin^2 C$, $x = \sin^2 A$, $y = \sin^2 B$,

et forment un triangle A'B'C' homothétique à ABC par rapport à K; la valeur de λ (1°) est, visiblement, $\lambda = \frac{1}{4R^2}$ et celle du rapport de similitude des deux triangles A'B'C', ABC est

$$1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} = 2 \cos A \cos B \cos C - 1.$$

L'équation du cercle de Taylor est donc

$$\Sigma \frac{yz}{b^2c^2} - \frac{1}{16R^4} \Sigma x \Sigma x \operatorname{cotg}^2 A = 0.$$

Les coordonnées des points A',B',C' sont maintenant

$\cos(B + C)\cos(B - C)$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$;
$\sin^2 A$, $\cos(C + A)\cos(C - A)$, $\sin^2 C$;
$\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\cos(A + B)\cos(A - B)$.

Les droites $2_3 3_2$, $3_1 1_3$, $1_2 2_1$ ont pour équations

$$- x + y \cot g^2 B + z \cot g^2 C = 0, \text{ etc.}$$

elles joignent les milieux de deux côtés du triangle orthocentrique $A_hB_hC_h$ et ont pour longueur commune le demi-périmètre de ce triangle.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 209.)

CUBIQUES DIVERSES

Le tracé des cubiques unicursales (*) par la règle et l'équerre se prête naturellement à toutes ces cubiques, et celles que nous avons examinées jusqu'ici ne constituent qu'une faible partie des courbes de cette famille. Ne pouvant les considérer toutes, nous nous sommes attaché aux plus célèbres et aux plus simples et nous nous sommes borné à indiquer l'un des procédés généraux qui permettent de les obtenir toutes. Mais en quittant le tracé des cubiques nous voulons indiquer encore deux constructions qui conduisent à des cubiques que l'on rencontre assez fréquemment.

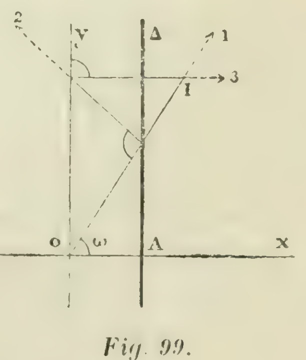


Fig. 99.

117. La cubique mixte. — Prenons un angle droit yox et une droite Δ parallèle à Oy; ayant effectué le tracé (1, 2, 3; *fig.* 99) et posé

$$OA = h, \quad OI = \rho, \quad IOx = \omega,$$

(*) Voyez sur cette question un mémoire de M. P.-H. Schoute (*Annuaire de l'Association française*; p. 169, Congrès de Grenoble, 1885).

on trouve, pour l'équation du lieu décrit par I,

$$h = \rho \sin^2 \omega \cos \omega,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$y^2 x = h(x^2 + y^2).$$

Cette cubique est une transformée conchoïdale de la parabole dans les conditions suivantes.

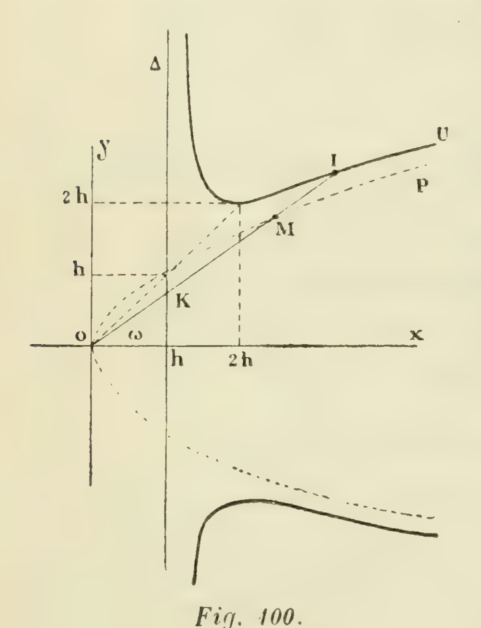


Fig. 100.

Considérons une parabole P représentée par l'équation $y^2 - hx = 0$; par le sommet O menons une transversale mobile qui rencontre la droite fixe Δ ($x - h = 0$) en K; et la parabole P, en M; puis, prenons MI = OK et cherchons le lieu décrit par I.

Nous avons

$$OM = \frac{h \cos\omega}{\sin^2 \omega}, \quad OA = MI = \frac{h}{\cos \omega},$$

et, par suite

$$\rho = \frac{h \cos \omega}{\sin^2 \omega} + \frac{h}{\cos \omega} = \frac{h}{\sin^2 \omega \cos \omega}.$$

Le lieu décrit par le point I est donc la cubique trouvée plus haut, elle est constituée par *deux branches mixtes:* de forme hyperbolique, à l'une des extrémités; de forme parabolique, à l'autre; elle affecte l'apparence générale indiquée par la figure (*).

En considérant deux positions infiniment voisines de la transversale OKMI on obtient la tangente à U au point I par l'application évidente du principe des transversales réciproques.

La cubique qui vient de nous occuper peut encore être

(*) Les courbes P et U sont disposées, l'une par rapport à l'autre comme l'indique la figure, mais elles ne sont pas asymptotiques. La parabole asymptote de U est une parabole égale à P lorsqu'on a transporté celle-ci, de la droite vers la gauche, parallèlement à elle-même, à la distance *h*.

engendrée, point par point, au moyen de la construction (1, 2, 3, 4) indiquée par la figure ci-dessous. On est ainsi conduit à un certain point J.

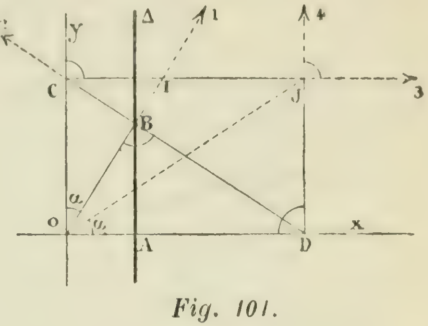


Fig. 101.

En observant que l'angle JOX est égal à BOC, on a

$$y = x \operatorname{tg} \alpha,$$

et

$$OC = y = \frac{OB}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Ces deux relations donnent, par combinaison,

$$y^2 x = h(x^2 + y^2).$$

Ainsi, le lieu décrit par le point J est encore la courbe U que nous venons de considérer. Les parallèles à ox coupent cette courbe en deux points I et J qui se trouvent déterminés simultanément : l'un, par la première construction ; l'autre, par la seconde. C'est un fait que nous avons rarement rencontré et qui semble assez curieux.

118. Remarque. — La cubique mixte qui vient de nous occuper affecte deux formes très différentes suivant que son point double est : isolé, comme dans le cas que nous avons examiné ; ou situé sur les branches réelles de la courbe, comme dans celui que nous allons signaler.

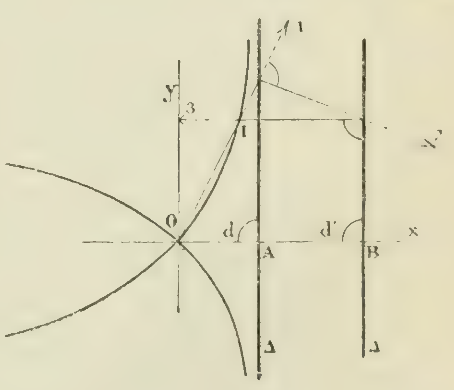


Fig. 102.

Considérons un angle droit yox et soient Δ, Δ′ deux parallèles à Oy ; si nous effectuons la construction (1, 2, 3 ; *fig. 102*) nous obtenons un point I, dont le lieu géométrique, si l'on pose OA $= d$, AB $= d'$ est une courbe représentée par l'équation

$$y^2 (d - x) = d'x^2.$$

Cette courbe est constituée encore par deux branches mixtes, mais, dans ce cas, elles passent par le point double.

119. La cubique conchoïdale. — Parmi les cubiques unicursales que l'on rencontre le plus fréquemment, nous citerons encore celles qui sont constituées par une branche conchoïdale et un point double isolé. Voici un exemple très simple de ces sortes de cubiques.

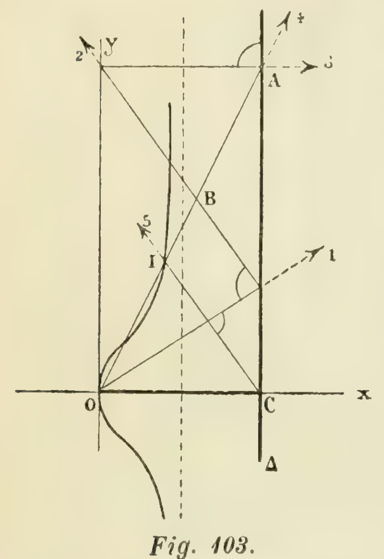


Fig. 103.

Considérons un angle droit yox, une droite Δ parallèle à Oy; effectuons la construction (1, 2, 3, 4, 5: *fig. 103*), le lieu du point I, comme on le vérifiera sans peine, est une cubique ayant pour équation

$$y^2 = (x - h)^2 \frac{x}{h - 2x}.$$

La courbe qui correspond à cette équation a la forme générale qu'indique la figure.

120. La conchoïdale circulaire. — Mais, parmi les conchoïdales, il y a lieu de remarquer celle qui est circulaire et qui s'obtient par la construction suivante.

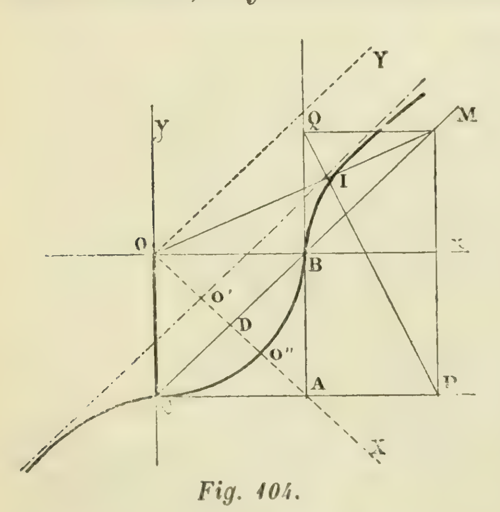


Fig. 104.

Soit CAB un triangle rectangle isocèle; on projette en Q et en P, sur ses côtés AB, AC un point M mobile sur l'hypoténuse BC. La perpendiculaire abaissée de M sur PQ va passer (*) par un point fixe O, quatrième sommet du carré construit avec le triangle proposé CAB et elle rencontre PQ en un point I dont le lieu géométrique est une cubique circulaire unicursale ayant pour équation, dans

(*) Voyez *Nouvelles Annales* 1843, p. 228.

le système yox,

$$(y - x)(y^2 + x^2) + h(y^2 + x^2 - xy) = 0, \quad (AB = AC = h)$$

courbe représentée, dans le système YOX, par l'équation

$$X(X^2 + Y^2) = h\frac{\sqrt{2}}{4}(Y^2 + 3X^2).$$

L'asymptote réelle s'obtient en menant par O', milieu de OD, une parallèle à BC (*); le sommet O″ est au milieu de AD; les points B et C sont deux points d'inflexion réels de la courbe. La forme de celle-ci se trouve ainsi nettement indiquée.

Le tracé de la tangente se fait assez simplement en observant que l'on peut considérer le lieu du point I comme étant la podaire du point O par rapport à une certaine parabole, enveloppe des droites PQ; parabole qui a pour sommet O″ et pour foyer D; ce qui la détermine complètement.

121. Le Folium parabolique droit. — Cette courbe est une cubique unicursale caractérisée par les faits suivants

1° Elle admet une direction asymptotique unique;

2° Elle est droite;

3° Les tangentes au nœud sont rectangulaires.

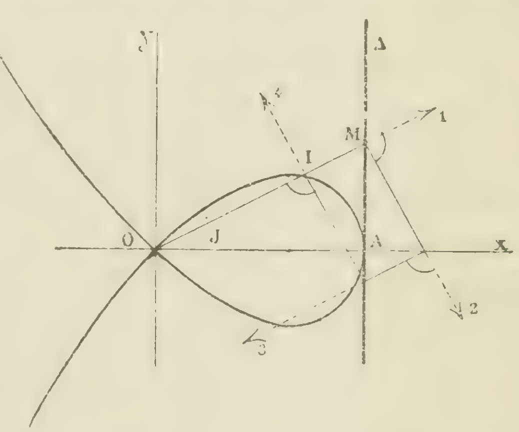


Fig. 105.

Considérons un angle droit yox et une droite Δ parallèle à oy; posons $OA = h$. Si nous effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig.* 105) nous obtenons un point I dont le lieu est une courbe correspondant à l'équation

$$x^3 = h(x^2 - y^2).$$

(*) La courbe qui nous occupe ici a été, comme la plupart des cubiques simples, distinguée par Newton dans son *énumération des lignes du troisième ordre* et par Euler dans sa magistrale *introduction à l'analyse infinitésimale*. Elle a fait l'objet d'une note (*N. A.*, 1843, p. 316); le lecteur qui se reportera à cette note voudra bien rectifier la construction indiquée pour l'asymptote.

L'erreur en question a d'ailleurs été relevée (*N. A.*, 184; p. 299)

Si l'on prend OJ = IM, le lieu du point I est une cubique que nous avons examinée plus haut ($x^3 - hy^2 = 0$) et nous savons construire la tangente à cette courbe au point J. L'application du principe des transversales réciproques permet de tracer la tangente au folium parabolique, au point I.

122. Le Folium parabolique oblique. — Cette cubique unicursale admet, comme la précédente, une direction asymptotique unique et un nœud droit; mais elle n'a plus d'axe de symétrie.

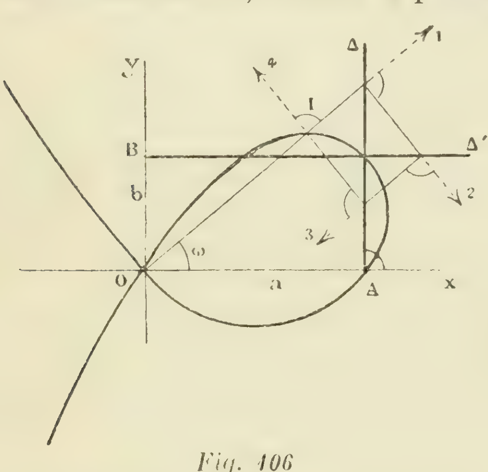


Fig. 106

Exposant OA = a, OB = b et, en exprimant les diverses lignes de la figure au moyen de l'angle ω, on trouve sans peine l'équation polaire du lieu décrit par le point I

$$\rho = \frac{a}{\cos\omega} - \operatorname{tg}\omega \frac{a \operatorname{tg}\omega - b}{\cos\omega}.$$

L'équation cartésienne est donc

$$x^3 = a(x^2 - y^2) + bxy,$$

et celle-ci prouve que la cubique correspondante est un folium parabolique oblique, courbe que nous avons définie tout à l'heure.

CHAPITRE XII

LES QUARTIQUES UNICURSALES

Toutes les courbes unicursales sont évidemment susceptibles d'être tracées, point par point, au moyen de la règle et de l'équerre parce que, à un élément mobile, donné et convenablement choisi, ne correspond qu'un seul point de la courbe. Nous avons déjà fait cette remarque au chapitre précédent, mais nous y insistons encore à cause de son importance et nous allons montrer de nouveau, sur des exemples divers, l'application de cette idée générale.

Nous considérerons uniquement quelques quartiques unicursales.

123. Le Folium double. — Le Folium double est une quartique caractérisée par les propriétés suivantes :

1° Elle admet les directions isotropes comme directions asymptotiques doubles ;

2° Elle possède un point triple présentant la particularité d'un rebroussement pour deux des bras qui passent par ce point.

Il résulte de cette définition qu'en prenant l'origine au point triple, la tangente de rebroussement pour axe des y et des axes rectangulaires, l'équation du folium double est

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by).$$

Voici comment on peut construire cette courbe point par point avec la règle et l'équerre.

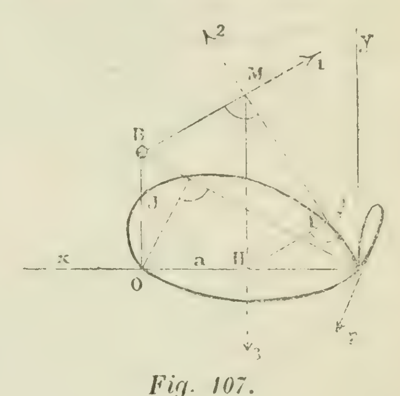


Fig. 107.

Imaginons un angle droit AOB et soit (1, 2, 3, 4; *fig. 107*) une construction conduisant au point I en posant

$$OA = a, \qquad OB = b,$$
$$AI = \rho, \qquad MAO = \omega,$$

nous avons, par application du théorème des projections,

$$AM = a \cos \omega + b \sin \omega$$

et comme

Fig. 108.

$$\rho = AH \cos \omega = AM \cos^2 \omega,$$

nous pouvons écrire

$$\rho = a \cos^3 \omega + b \sin \omega \cos^2 \omega.$$

C'est l'équation polaire du lieu décrit par le point I; l'équation cartésienne est donc

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by).$$

On peut distinguer deux espèces de foliums doubles : le folium droit, et le folium oblique : suivant que la tangente de rebroussement est ou n'est pas un axe de symétrie.

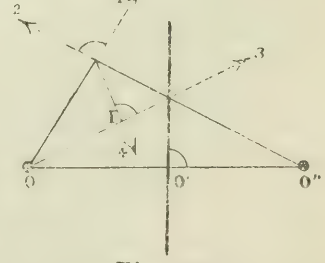


Fig. 109.

Le folium double droit, qui correspond au cas particulier où l'on suppose $a = b$, est une courbe bien remarquable (*); les constructions (1, 2, 3, 4) des figures 108 et 109 conduisent encore au tracé du folium droit, point par point.

Dans cette dernière figure, on suppose $OO' = O'O''$.

124. Le limaçon de Pascal. — On sait que cette courbe se construit très rapidement, point par point, conformément à sa définition, si l'on s'accorde l'usage du compas à pointes sèches, puisqu'il suffit de porter sur un rayon vecteur mobile, à partir d'un point qu'on détermine, une longueur constante.

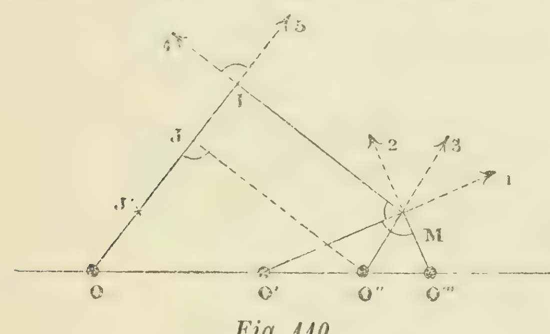


Fig. 110.

Mais on peut aussi, par le seul usage de la règle et de l'équerre, construire ces courbes; le tracé (1.2.3.4.5; *fig. 110*) donne un point I qui est un point d'un limaçon, considéré comme étant la podaire du point O par rapport à un cercle qui serait décrit du point O'', milieu de O'O''', comme centre, avec O''O' pour rayon.

Pour le tracé de la tangente (**) au limaçon, menons O''J parallèle à MI, et prenons J' isotomique de J sur OI; la tangente au lieu décrit par I sera partagée en deux parties égales par les tangentes θ, θ' aux lieux décrits par les points J et J' et cela par application du principe des transversales réciproques. Les points J et J' décrivent des circonférences; les centres sont: le milieu du segment OO'' pour l'une; et O, pour l'autre; or, nous savons, avec la règle et l'équerre, tracer les tangentes θ, θ'; nous saurons, par suite, construire celle du limaçon au point I.

(*) Nous nous proposons de publier prochainement une étude du folium double; nous donnerons alors diverses constructions de la tangente à cette courbe.

(**) Magnus a donné (*Journal de Crelle*, t. IX, 1832, p. 135) une construction de la tangente à la cardioïde; mais, cette construction exige l'emploi du compas, et elle ne s'applique qu'à ce limaçon particulier.

125. La Lemniscate (*). — Prenons sur deux axes rectangulaires donnés ox, oy, deux points fixes A et B, puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4); le lieu du point I est une lemniscate.

En effet, on a

$$\rho = OB' \cos \omega,$$

$$\rho = OA' \sin \omega;$$

et

$$OA'.OB' = OA.OB.$$

En posant

$$OA = a, \quad OB = b$$

on obtient ainsi l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = abxy,$$

Fig. 111.

qui représente le lieu décrit par I ; la courbe qui correspond à cette équation passe doublement par les ombilics du plan ; de plus, le point O est un centre de la courbe et un nœud droit; le lieu considéré est donc une lemniscate (*C. M. S.*, t. II, p. 539).

On voit, en un mot, que nous venons de considérer la lemniscate comme la podaire du centre de l'hyperbole équilatère et, de cette génération remarquable, on déduit très simplement, comme nous allons le montrer, la normale, et par suite, la tangente à la lemniscate.

D'une façon générale, on sait (*C. M. S.*, t. II, p. 33) que si l'on considère une courbe quelconque U et, par rapport à cette courbe, la podaire d'un point O, la normale au lieu décrit par le point I passe par le milieu de MO, M étant le point de contact de la tangente considérée MI.

Cette remarque étant faite, reportons-nous à la figure 111 ; A'B' enveloppe une hyperbole ayant pour asymptotes Ox et

(*) On sait que la lemniscate représente un cas particulier des ovales de Cassini; voici, sur cette courbe célèbre quelques détails bibliographiques que nous empruntons à l'une de ces notes si intéressantes que le savant Terquem a jetées çà et là dans les *Nouvelles Annales*.

« Le nom de cette courbe dérive du mot grec λεμνισχος qui signifie une bandelette nouée en *huit*. Fagnano, (vers 1750) a découvert les principales propriétés de cette ligne qui est d'une si grande utilité dans la théorie des fonctions elliptiques. Les démonstrations du géomètre italien sont géométriques; la théorie analytique est due à Euler (*Mémoires de Saint-Pétersbourg*, t. V, p. 351). »

Oy; le point de contact de A'B' avec cette hyperbole, c'est le milieu M de A'B', déterminée omme l'indique la figure. En achevant le rectangle qui correspond au triangle OIM on obtient un certain point C; IC est la normale à la lemniscate.

126. Le Trifolium droit. — Cette courbe est caractérisée par les propriétés suivantes :

1° Elle n'a pas d'autre direction asymptotique que les directions isotropes;

2° Elle admet un axe de symétrie Δ et un point triple O dont les tangentes sont : la perpendiculaire Δ' à l'axe Δ pour l'une des branches et les bissectrices des droites Δ, Δ' pour les deux autres.

D'après cela, l'équation du trifolium droit est

$$(x^2 + y^2)^2 = Ax(x^2 - y^2).$$

On a pris pour axes les droites Δ, Δ' que nous venons de définir et, dans cette équation, A désigne une constante.

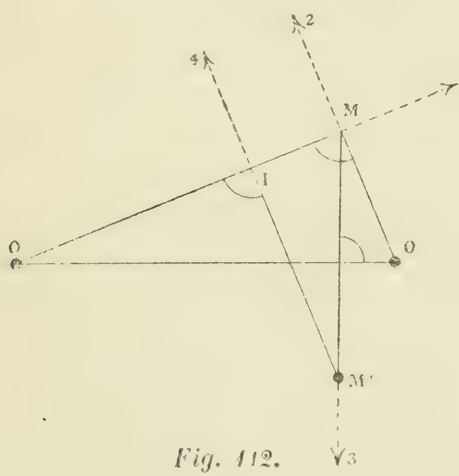


Fig. 112.

Soit OO' un segment donné, effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig. 112*), construction dans laquelle M' est le symétrique de M par rapport à OO', et cherchons le lieu du point I.

En posant

$$OO' = d, \quad OI = \rho, \quad MOO' = \omega,$$

on a

$$\rho = d\cos\omega - 2d\sin^2\omega\cos\omega,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 = dx(x^2 - y^2).$$

Le lieu du point I est donc un trifolium droit, courbe définie comme il vient d'être dit. Pour sa forme et pour le tracé de la tangente en un point pris sur elle, nous renverrons à notre *Traité de Géométrie analytique* (p. 512).

(*A suivre.*)

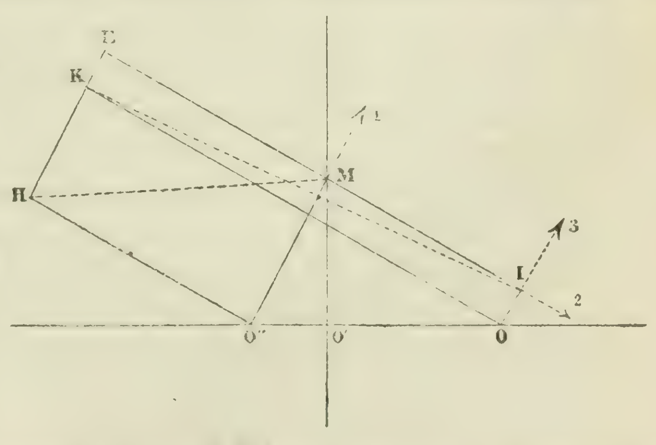
CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. d'Ocagne la lettre suivante :

« Vous me citez très aimablement à la page 200 du dernier numéro du *Journal de Mathématiques spéciales;* mais je vous demanderai la permission de vous faire remarquer que l'article que vous mentionnez (*Nouvelles Annales*, 1886, p. 88) est la suite de mon Mémoire *sur l'enveloppe de certaines droites variables* dont la première partie a paru dans les *Nouvelles Annales* en 1883 (page 252). Je vous prie de vouloir faire cette rectification afin d'établir l'ancienneté de mes recherches, de beaucoup antérieures d'ailleurs à la publication de la première partie du Mémoire.

» Le problème que vous traitez (pages 200 et 201) se trouve à la fin de mon article intitulé : *Nouvelles remarques sur la droite de Simson* (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 8 et 27) où je démontre (en me référant à vos notations de la page 201) que *le point* μ *divise* PQ *comme le point* M *divise le segment de la tangente correspondante à la courbe* U, *compris entre* Ox *et* Oy. (Voir le post-scriptum.)

» Enfin, je vous signalerai que le théorème du centre instantané de rotation donne une construction élégante de la normale à la *trisectrice de Maclaurin.*



» MH perpendiculaire à O'M, O''H perpendicuaire à O''M donnent H centre instantané de rotation de l'angle droit O''MI.

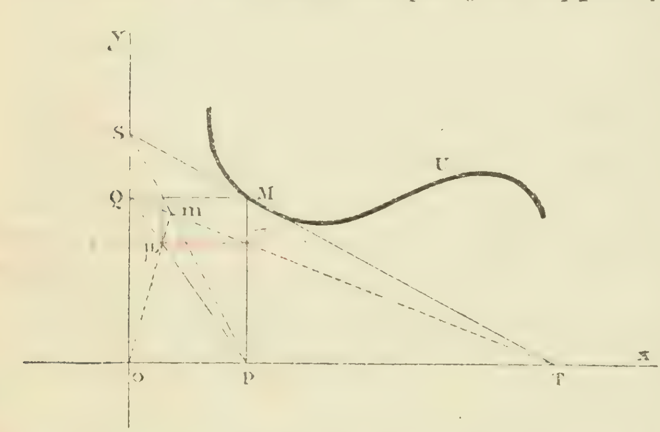
» Donc, HE perpendiculaire à MI est normale à l'enveloppe de cette droite.

» OK perpendiculaire à OI donne avec HE :

» K centre instantané de rotation de l'angle droit EIO.

» Donc KI normale au lieu du sommet I, c'est-à-dire à la *trisectrice...*

» *P.-S.* — Le théorème que j'ai rappelé plus haut, joint à celui que j'ai proposé dans les *Nouvelles Annales* (question 1557, 1885, p. 536), montre que la construction du point μ (page 201 de votre article) est la suivante :



» *Les droites* PS *et* QT *se coupant en* m, *le point* μ *est à la rencontre de* PQ *et de* Om.

» Cette construction est plus simple que celle que vous donnez, dans laquelle interviennent deux perpendiculaires à tracer. »

Nota. — En remerciant M. d'Ocagne des remarques diverses qu'on vient de lire et qui ajoutent à l'intérêt que peuvent avoir les articles cités, je lui ferai observer que l'ancienneté relative de ses recherches n'était nullement discutable, puisque, dans la crainte d'un malentendu, j'avais pris soin, la chose étant à ma connaissance, de dire que sa note, publiée seulement en 1886, était écrite *depuis plusieurs années*. Le lecteur, en se reportant à la source citée, aurait vu d'ailleurs que la nouvelle note faisait suite à celle qui avait paru en 1883; je ne croyais pas une ambiguïté quelconque possible sur ce point, mais je publie bien volontiers la réclamation précédente; la propriété scientifique ne saurait être trop scrupuleusement respectée.

G. L.

QUESTIONS D'EXAMENS

11. — *Lieu des sommets des coniques* Γ *qui passent par quatre points donnés. De quel degré sera le lieu.*

Le réseau des coniques Γ renferme un paramètre variable λ, mais au premier degré seulement; il est représenté par l'équation

$$f = U + \lambda V = 0, \qquad (1)$$

U et V désignant des fonctions du second degré en x et y, indépendantes de λ.

On sait que le faisceau quadratique des axes est donné par l'égalité

$$f_x'^2(A' \cos \theta - B'') + f_x' f_y'(A - A') + f_y'^2(B'' - A \cos \theta) = 0.$$

Cette équation est du troisième degré par rapport aux coefficients de (1); elle renferme donc λ au troisième degré, du moins en général. On peut donc l'écrire sous la forme

$$M\lambda^3 + N\lambda^2 + P \quad + Q = 0, \qquad (2)$$

M, N, P, Q désignant des fonctions du second degré en x et y.

L'élimination de λ entre (1) et (2) prouve que le lieu cherché est, en général, du *huitième degré*.

Il va sans dire que l'ordre du lieu en question peut s'abaisser dans certains cas; lorsqu'on fait abstraction des lieux impropres ou singuliers qut sont inhérents à la question particulière que l'on traite.

Pour exprimer qu'un point M est le sommet d'une conique f, on écrit que la normale en M passe par le centre de f; et l'on cherche le lieu des points communs à cette droite et à la conique. C'est ainsi qu'en cherchant le lieu des sommets des coniques circonscrites à un quadrilatère inscrit à un cercle γ on trouve ce cercle comme lieu singulier.

Un autre exemple bien connu, lui aussi, est celui où l'on propose de trouver le lieu des sommets des coniques circonscrites à un *losange*.

La conique singulière formée par les diagonales de ce

losange fait doublement partie du lieu et l'on trouve que le lieu propre est la quartique φ qui correspond à l'équation

$$(x^2 + y^2)(b^2x^2 - a^2y^2) - a^2b^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Cette courbe φ est constituée par un double folium en forme de lemniscate et par deux branches hyperboliques dont la sinuosité diffère suivant que l'on suppose :

$$b > \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \text{ou} \quad b < \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

On peut aussi séparer, sur φ, les points qui proviennent des ellipses ou des hyperboles du réseau considéré, en abaissant du centre du losange des perpendiculaires sur ses côtés.

Pour citer un cas d'abaissement encore plus remarquable, on peut, à ce propos, rappeler que *le lieu des sommets des coniques qui touchent deux droites rectangulaires* ox, oy *en deux points* A, B (OA = OB = a) *est une parabole.*

L'équation de cette parabole est $(y - x)^2 - a(x + y) = 0$, et les facteurs singuliers sont, dans cet exemple : 1° le cercle inscrit à l'angle yox aux points A et B; 2° la droite AB considérée comme droite double; 3° les axes ox, oy.

Remarque. — La théorie des caractéristiques permet d'apercevoir immédiatement le résultat précédent.

En effet, les caractéristiques des coniques passant par quatre points sont :

$$\mu = 1, \qquad \nu = 2 ;$$

Or, on sait (*) que dans un système (μ, ν) le lieu des sommets des coniques du réseau est une courbe de l'ordre

$$2\mu + 3\nu.$$

Dans le cas présent, on a

$$2\mu + 3\nu = 2 + 6 = 8.$$

12. — *On considère la courbe* U *qui, en coordonnées polaires, correspond à l'équation*

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, tome LVIII; séances du 1er et du 15 février 1864.

La note citée porte, par erreur,

$$2(2\mu + \nu),$$

Cette inexactitude a d'ailleurs été relevée par Chasles lui-même (séances des 27 juin, 4 et 18 juillet 1864).

$$\frac{1}{\rho} = (\omega - \alpha)(\omega - \beta);$$

démontrer : 1° qu'une droite Δ, *issue de l'origine, rencontre cette courbe en des points* A_1, A_2, ... *en nombre infini, 2° que les tangentes à* U, *en ces points, enveloppent une même conique.*

Soit ω_1 une valeur particulière de ω; en posant

$$\omega_i = 2k\pi + \omega_1 \qquad (k \textit{ entier})$$

on obtient pour ρ des valeurs réelles, quel que soit k, et différentes. Ainsi, sur Δ, il y a une infinité de points réels.

Prenons l'un quelconque de ces points A_i; la tangente Δ correspondante est représentée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_i} \cos(\omega - \omega_i) + \left(\frac{1}{\rho_i}\right)' \sin(\omega - \omega_i),$$

égalité qui peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = (2k\pi + \omega_1 - \alpha)(2k\pi + \omega_1 - \beta) \cos(\omega - \omega_1$$
$$+ (4k\pi + 2\omega_1 - \alpha - \beta) \sin(\omega - \omega_1).$$

En posant

$$2k\pi + \omega_1 = \lambda,$$

cette équation devient

$$1 = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(x \cos \omega_1 + y \sin \omega_1)$$
$$+ (2\lambda - \alpha - \beta)(y \cos \omega_1 - x \sin \omega_1).$$

Supposons que λ varie; cette équation, étant du second degré en λ, prouve que, par un point du plan, passent deux des droites qui lui correspondent; en d'autres termes, l'enveloppe des droites (1) est une conique et, de cette remarque, on déduit l'intéressante propriété en question.

QUESTION 26

Solution par M. X. Barthe, au Lycée de Montauban.

Soit f(x, y, z) = o *l'équation d'un paraboloïde; trouver l'équation donnant les paramètres des paraboles principales.*

Cette question est bien connue, nous rappellerons rapidement comment on la résout.

Prenons l'équation du paraboloïde elliptique sous la forme réduite

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0; \qquad (1)$$

les paramètres des paraboles principales sont alors égaux à p et q.

D'après les notations adoptées (*C. M. S.*, t. III) la quantité $\frac{H}{\Delta_0}$ est un invariant; mais pour la forme (1) puisque les axes sont rectangulaires $\Delta_0 = 1$ et le hessien est égal à $\frac{1}{pq}$.

On a donc

$$\frac{1}{pq} = \frac{H}{\Delta_0},$$

et aussi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{A + A' + A''}{\Delta_0};$$

par suite, $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont les racines de l'équation

$$\Delta_0 X^2 - (A + A' + A'')X + H = 0.$$

En considérant le paraboloïde hyperbolique, on obtiendrait la même équation, seulement les racines seraient alors $\frac{1}{p}$ et $-\frac{1}{q}$.

QUESTION 33

Solution par M. X. Barthe, au Lycée de Montauban.

Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique quatre normales formant un faisceau harmonique.

Prenons le cas de l'ellipse et soient x, y les coordonnées d'un point du lieu; les coefficients angulaires des normales menées par ce point sont les racines de l'équation

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}},$$

qu'on peut écrire

$$m^4b^2x^2 - 2b^2m^3xy + m^2(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4) - 2ma^2xy + a^2y^2 = 0.$$

Soient m_1, m_2, m_3, m_4 les quatre racines de cette équation; les relations entre les coefficients et les racines donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\sum m_1 = \frac{2b^2xy}{b^2x^2}, \\ &\sum m_1m_2 = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - c^4}{b^2x^2}, \\ &\sum m_1m_2m_3 = \frac{2a^2xy}{b^2x^2}, \\ &m_1m_2m_3m_4 = \frac{a^2y^2}{b^2x^2}; \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

auxquelles il faut adjoindre :

$$2(m_1m_2 + m_3m_4) = (m_1 + m_2)(m_3 + m_4). \qquad (2)$$

Pour obtenir le lieu demandé, il suffit d'éliminer m_1, m_2, m_3 et m_4 entre les relations (1) et (2).

Or ce problème a été résolu précédemment (voir *Journal*, année 1884, p. 282); dans le cas présent et en utilisant les notations de l'article cité, nous avons

$$A = b^2x^2,$$

$$B = \frac{b^2xy}{2},$$

$$C = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - c^4}{6},$$

$$D = \frac{a^2xy}{2}.$$

$$E = a^2y^2.$$

Transportant ces valeurs dans a condition trouvée (*loc. cit.*) on obtient, toutes réductions faites,

$$54a^4b^4x^2y^2 + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 = 0.$$

C'est une courbe du sixième degré possédant quatre points de rebroussement situés sur les axes, aux points mêmes de rebroussement de la développée de l'ellipse.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie descriptive, par M. Ch. Brisse, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Condorcet, répétiteur de Géométrie descriptive à l'Ecole Polytechnique, avec nombreuses figures dans le texte et planches d'épures, (Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, 55, quai des Grands-Augustins).

Le premier fascicule vient de paraître; l'ouvrage sera complet en janvier prochain. Le prix, pour les souscripteurs actuels à l'ouvrage complet est fixé à 7 francs. Il sera légèrement augmenté, après le mois de janvier.

Représentation géométrique des coniques et des quadriques imaginaires, par M. Gaston Tarry (Gauthier-Villars).

Cette brochure, pleine d'intérêt est celle à laquelle il a été fait allusion dernièrement dans ce journal (p. 237). Elle est divisée en sept chapitres dont les titres donnent une idée du plan que l'auteur a suivi : *Points imaginaires conjugués. — Droites imaginaires conjuguées, droites idéales. — Définition complète des coniques, théorème fondamental. — Coniques conjuguées, théorèmes généraux. — Coniques conjuguées réciproques, coniques complémentaires, coniques et quadriques idéales. — Coniques supplémentaires.*

QUESTIONS PROPOSÉES

209. — Soit un triangle ABC;

M, N, P désignent les milieux des côtés BC, CA, AB.

J, K, L, ... les pieds des bissectrices issues des sommets ABC.

H_a H_b H_c ... les pieds des hauteurs issues de A, B, C.

A' B' C' ... les points de contact du cercle inscrit avec BC, CA, AB.

A'' B'' C'' ... les isotomiques de A', B', C'.

On propose de démontrer les propriétés suivantes :

1° *Les quatre droites* H_bH_c, $B'C'$, KL $B''C''$ *se rencontrent en un même point* θ_a.

Soient θ_b et θ_c les points analogues.

2° *Les côtés du triangle* $\theta_a\theta_b\theta_c$ *passent par les sommets* A, B, C *du triangle considéré.*

3° *Les quatre droites* $A\theta_a$, $A\theta_b$ θ_c, AB, AC *forment un faisceau harmonique.*

4° *Les triangles* ABC, $\theta_a\theta_b\theta_c$ *sont homologiques.*

(*Paul Bourgarel*, à Antibes.)

N.-B. — Si l'on traite cette question par les coordonnées barycentriques qui nous paraissent les coordonnées naturelles de cet intéressant exercice, on pourra vérifier que les droites : B'C', B"C" (transversale réciproque de B'C'), KL, H_bH_c sont représentées respectivement par

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha\,(p-a) - \beta\,(p-b) - \gamma\,(p-c) = 0, \\ \dfrac{\alpha}{p-a} - \dfrac{\beta}{p-b} - \dfrac{\gamma}{p-c} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{a} - \dfrac{\beta}{b} - \dfrac{\gamma}{c} = 0, \\ \dfrac{\alpha}{a}\cos A - \dfrac{\beta}{b}\cos B - \dfrac{\gamma}{c}\cos C = 0. \end{cases}$$

On trouve alors que ces droites concourent en un point θ_a, dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$a\,(\cos B - \cos C),\quad b\,(\cos A - \cos C),\quad c\,(\cos B - \cos A)$$

ou, si l'on préfère, à

$$a\,(c-b)\,(p-a),\quad b\,(c-a)\,(p-b),\quad c\,(a-b)\,(p-c).$$

Les trois points θ_a, θ_b, θ_c signalés dans cet exercice sont alors *algébriquement adjoints* à un certain point θ dont les coordonnées sont proportionnelles à $a\,(c-b)\,(p-a)$, $b\,(a-c)\,(p-b)$, $c\,(b-a)\,(p-c)$.

Les propriétés signalées par M. Bourgarel, ne sont plus, quand on a fait cette remarque, qu'une conséquence immédiate des théorèmes généraux que M. Lemoine a établis (*Journal*, 1885, p. 193).

Le point θ, qui apparaît ici, est un point remarquable du triangle; il est situé au point de concours des quatre droites représentées, respectivement par les équations (1), quand on a changé, dans celles-ci, les signes de β et de γ.

En considérant, en particulier, les équations

$$\alpha\,(p-a) + \beta(p-b) + \gamma\,(p-c) = 0,\quad \frac{\alpha}{p-a} + \frac{\beta}{p-b} + \frac{\gamma}{p-c} = 0,$$

on peut dire que θ est à l'intersection de la droite Δ, harmoniquement associée au point de Gergonne, avec la transversale réciproque de Δ.

G. L.

210. — On considère un cercle de rayon variable et de centre fixe O, et une droite fixe xOy qui coupe le cercle en deux points A et B. On porte de A vers O, sur xy, une longueur constante $AB = l$. Par le point C, on mène une droite inclinée à 45° sur OA; elle coupe le cercle en P, Q. Lieu de ces deux points. (*Troille.*)

211. — On considère un angle droit yox et par un point C, donné sur oy, on mène une droite Δ parallèle à ox.

Autour de O, on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent Δ aux points M et M′ et l'on imagine les deux paraboles U et V qui ont pour sommets, respectivement, les points M, M′; dont les axes sont MO et M′O; et qui passent par C.

Cela posé :

1° Trouver le lieu des points de rencontre des axes de U avec les paraboles V, ou des axes de V avec les paraboles U.

Ce lieu est un cercle.

2° Démontrer que le lieu des points P, Q, R communs aux paraboles U et V est un cercle.

3° Chercher le lieu des points de rencontre des directrices des paraboles U et V.

Ce lieu est une droite parallèle à ox.

4° Démontrer que les cinq points C,P,Q,R,O appartiennent à une certaine hyperbole équilatère H ayant pour centre le milieu de OC.

5° Trouver les lieux décrits par le centre de gravité et par l'orthocentre de PQR.

6° Les asymptotes de H rencontrent les axes des paraboles U et V en des points dont le lieu géométrique est un système de deux cercles. *(G. L.)*

Erratum. — La question qui a été proposée (p. 216) porte par erreur le n° 204, c'est 205 qu'il faut lire.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21810-6.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

Par M. J. **Neuberg**, professeur à l'Université de Liége.

Connaissant les coordonnées barycentriques α, β, γ d'un point M. par rapport au triangle fondamental ABC, on peut se proposer de chercher les coordonnées barycentriques α', β', γ' de ce point par rapport à un triangle remarquable A'B'C', associé à ABC; les nouvelles coordonnées serviront souvent à établir l'identité du point M avec un point remarquable du triangle A'B'C',

Pour résoudre ce problème, il faut : 1° exprimer les côtés a, b, c, et les angles A, B, C du triangle primitif en fonction des côtés a', b', c' et des angles A', B', C' du nouveau triangle de référence; 2° exprimer les nouvelles coordonnées α', β', γ' en fonction des anciennes. Les dernières formules sont :

$$\alpha' = m\,(M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma),$$
$$\beta' = n\,(M_2\alpha + N_2\beta + P_2\gamma),$$
$$\gamma' = p\,(M_3\alpha + N_3\beta + P_3\gamma).$$

où

$$M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma = 0, \ldots$$

sont les équations des droites B'C', C'A' A'B'; m, n, p sont des constantes que l'on peut déterminer en adaptant les formules à un point dont on connaît les coordonnées par rapport à ABC et A'B'C'. Il est évident qu'on peut débarrasser les constantes d'un facteur commun qui est fonction symétrique de a', b', c' ou a, b, c; car il ne s'agit ici que des rapports entre les coordonnées.

1. — A'B'C' *est le triangle complémentaire de* ABC. On a

$$a : b : c := a' : b' : c',$$

$$\frac{\alpha'}{-\alpha+\beta+\gamma} = \frac{\beta'}{\alpha-\beta+\gamma} = \frac{\gamma'}{\alpha+\beta-\gamma}.$$

Application au point de Lemoine. On trouve

$$\frac{\alpha'}{a'^2 + b'^2 + c'^2} = \frac{\beta'}{a^2 - b'^2 + c'^2} = \frac{\gamma'}{a'^2 + b'^2 - c'^2},$$

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \cot A' : \cot B' : \cot C'.$$

Le point K *est donc, par rapport à* A'B'C', *le réciproque de l'orthocentre de* A'B'C' *ou le réciproque du centre du cercle circonscrit à* ABC.

2. — A'B'C' *est le triangle anti-complémentaire de* ABC. On a

$$a : b : c = a' : b' : c',$$

$$\frac{\alpha'}{\beta + \gamma} = \frac{\beta'}{\gamma + \alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha + \beta}.$$

3. — A'B'C' *est le triangle orthocentrique de* ABC. Les relations entre les éléments des deux triangles sont

$$A = \frac{1}{2}(\pi - A'), \qquad B = \frac{1}{2}(\pi - B'), \qquad C = \frac{1}{2}(\pi - C'),$$

$$a : b : c : = \cos\frac{1}{2}A' : \cos\frac{1}{2}B' : \cos\frac{1}{2}C'$$

$$= \sqrt{a'(p' - a')} : \sqrt{b'(p' - b')} : \sqrt{c'(p' - c')}.$$

La première formule de transformation des coordonnées est

$$\alpha' = m(-\alpha \cot A + \beta \cot B + \gamma \cot C).$$

Appliquons-la au point A; alors $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. $\alpha' = AB'C' : A'B'C'$ ou $\alpha' = \cos^2 A$. si on néglige un facteur *symétrique*. Par conséquent, $m = \sin 2A$. On a donc

$$\alpha' = \sin 2A\,(-\alpha \cot A + \beta \cot B + \gamma \cot C),$$
$$\beta' = \sin 2B\,(\alpha \cot A - \beta \cot B + \gamma \cot C),$$
$$\gamma' = \sin 2B\,(\alpha \cot A + \beta \cot B - \gamma \cot C),$$

ou encore

$$\alpha' = \sin A'\left(-\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}A' + \beta \operatorname{tg}\frac{1}{2}B' + \gamma \operatorname{tg}\frac{1}{2}C'\right), \text{etc.}$$

Application. — S'il s'agit du point de Lemoine K de ABC, on trouve

$$\alpha' = \frac{1}{2}\sin 2A\,(-\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= \sin A \cos A . 4 \sin A \cos B \cos C;$$

donc

$$\alpha'' : \beta' : \gamma' = \sin^2 A : \sin^2 B : \sin^2 C$$

$$= \cos^2\frac{1}{2}A' : \cos^2\frac{1}{2}B' : \cos^2\frac{1}{2}C',$$

$$\frac{\alpha'}{a'} : \frac{\beta'}{b'} : \frac{\gamma'}{c'} = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C$$

$$= \cot \frac{1}{2} A' : \cot \frac{1}{2} B' : \cot \frac{1}{2} C'.$$

Parmi les conséquences de ces formules, nous signalons les suivantes :

Les points de Lemoine K *et* K' *des triangles* ABC, A'B'C' *sont en ligne droite avec l'orthocentre* H *de* ABC (*).

Le point de Lemoine d'un triangle ABC *est le centre de trois forces parallèles, proportionnelles à* a^2, b^2, c^2 *et appliquées, soit aux sommets de ce triangle, soit aux pieds des hauteurs, soit en trois points divisant les hauteurs de* ABC *dans un même rapport.*

Les distances du point de Lemoine du triangle ABC *aux côtés du triangle orthocentrique* A'B'C' *sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles exinscrits à* A'B'C' ; *autrement dit, si* $A_1B_1C_1$ *est le triangle formé par les tangentes aux points* A,B,C *de la circonférence* ABC, *le centre d'homothétie des triangles* $A_1B_1C_1$ *et* A'B'C', *est, par rapport au triangle* A'B'C', *l'inverse du point de Lemoine de* ABC.

4. — A'B'C' *est le triangle formé par les bissectrices extérieures de* ABC (**). Les formules cherchées sont

---

(*) On peut écrire : $\alpha' : \beta' : \gamma' = a'p' - a'^2 : b'p' - b'^2 : c'p' - c'^2$; donc le point K est en ligne droite avec les points H (a', b', c') et K' (a'^2, b'^2, c'^2). On voit aussi que $KH : KK' = a'^2 + b'^2 + c'^2 : 2p'^2$.

Ce théorème est dû à M. Edm. Van Aubel (*Mathesis*, t. I, p. 190).

(**) Ce triangle peut être appelé *triangle antiorthocentrique* de ABC ou *triangle anti-supplémentaire* de ABC. Le *triangle supplémentaire* a pour sommets les pieds des bissectrices intérieures de ABC.

Lorsque les coordonnées *normales* de deux points M (x, y, z) et M' (x', y', z') sont liées par les relations

$$\frac{x'}{y+z} = \frac{y'}{z+x} = \frac{z'}{x+y},$$

on peut dire que M' est le *supplémentaire* de M. L'expression de *points complémentaires* est réservée à des points dont les coordonnées barycentriques vérifient les égalités précédentes.

La figure supplémentaire de la circonférence ABC est une conique dont les propriétés, assez curieuses, ont fait l'objet d'une communication présentée par M. de Longchamps au congrès de Nancy. La figure anti-supplémentaire de cette circonférence est la circonférence passant par les centres des cercles exinscrits au triangle ABC.

$$A = \pi - 2A', \qquad B = \pi - 2B', \qquad C = \pi - 2C'$$

$$a : b : c = \sin 2A' : \sin 2B' : \sin 2C'.$$

$$\alpha' = \operatorname{tg} A \left(\frac{\beta}{\sin B} + \frac{\gamma}{\sin C}\right) = -\operatorname{tg} 2A' \left(\frac{\beta}{\sin 2B'} + \frac{\gamma}{\sin 2C'}\right), \ldots$$

5. — A′B′C′ *est le triangle polaire de* ABC *par rapport à la circonférence circonscrite.* Les formules demandées sont

$$A = \frac{1}{2}(\pi - A'), \quad B = \frac{1}{2}(\pi - B', \quad C = \frac{1}{2}\pi - C'),$$

$$a : b : c = \cos\frac{1}{2}A' : \cos\frac{1}{2}B' : \cos\frac{1}{2}C',$$

$$\alpha' = \cos A \left(\frac{\beta}{\sin^2 B} - \frac{\gamma}{\sin^2 C}\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}A' \left(\frac{\beta'}{\cos^2\frac{1}{2}B'} + \frac{\gamma}{\cos^2\frac{1}{2}C'}\right) \ldots$$

Si l'on échange les rôles des deux triangles, on trouve

$$\alpha' = \sin^2 A' (-\alpha \operatorname{tg} A' + \beta \operatorname{tg} B' + \gamma \operatorname{tg} C'), \ldots$$

6. — A′B′C′ *est le complémentaire du triangle orthocentrique de* ABC.

Le triangle A′B′C′ qui a pour sommets les milieux du triangle orthocentrique $A_h B_h C_h$ de ABC, jouit de propriétés assez curieuses : Les points H, A, B, C sont le point de Nagel et les adjoints de ce point, du triangle A′B′C′, et les côtés non homologues des triangles ABC, A′B′C′ se coupent en six points d'une même circonférence ayant pour centre le centre du cercle inscrit à A′B′C′ (*circonférence de Taylor de* ABC).

On obtient les formules relatives à ce triangle en combinant les transformations 3° et 2° ; ce qui donne

$$A = \frac{1}{2}(\pi - A'), \quad B = \frac{1}{2}(\pi - B'), \quad C = \frac{1}{2}(\pi - C'),$$

$$a : b : c = \cos\frac{1}{2}A' : \cos\frac{1}{2}B' : \cos\frac{1}{2}C'.$$

$$\alpha' = \cot A\,(-\alpha + \beta \cot^2 B + \gamma \cot^2 C),$$

$$\beta' = \cot B\,(\alpha \cot^2 A - \beta + \gamma \cot^2 C).$$

$$\gamma' = \cot C\,(\alpha \cot^2 A + \beta \cot^2 B - \gamma).$$

Application. — Si l'on applique ces formules au point de Lemoine, on trouve

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \cot A : \cot B : \cot C$$
$$= \operatorname{tg} \frac{1}{2} A' : \operatorname{tg} \frac{1}{2} B' : \operatorname{tg} \frac{1}{2} C'.$$

Il résulte de là que *le point de Lemoine de* ABC *est le point de Gergonne de* A′B′C′, *ou que les symédianes du triangle* ABC *passent par les points de contact des côtés de* A′B′C′ *avec le cercle inscrit.*

7. — A′B′C′ *est le triangle orthocentrique du complémentaire de* ABC.

On rencontre ce triangle dans l'étude du point A de Brocard (le réciproque de l'orthocentre de ABC et l'anti-complémentaire du point de Lemoine). On a

$$\frac{\alpha'}{\sin 2A} = \alpha(\cot A + \cot B + \cot C)$$
$$+ \beta(- \cot A - \cot B + \cot C)$$
$$+ \gamma(- \cot A + \cot B + \cot C), \text{ etc.}$$

SUR UN MODE PARTICULIER DE GÉNÉRATION DES CONIQUES

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

1. — Supposons donnés un cercle Γ et une droite Δ. Par le centre O du cercle Γ menons une droite qui coupe ce cercle au point M et la droite Δ au point M_1. Posons $OM = \rho$, $OM_1 = \rho_1$, et prenons sur la droite OMM_1, le point M_2 tel que son rayon vecteur $OM_2 = \rho_2$ soit donné par

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}. \qquad (1)$$

On peut énoncer différemment cette construction. En effet, soit Γ′ le cercle de centre O dont le rayon ρ' est double du rayon ρ du cercle Γ. On aura

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{\rho'}.$$

c'est-à-dire que le point M_2 est le conjugué harmonique du point M_1 par rapport aux points O et M', M' étant le point où OM_1 coupe le cercle Γ'.

Le point M_2, défini de l'une ou l'autre manière, engendre une courbe lorsque la droite D pivote autour du point O. Je dis que cette courbe est une conique.

En effet, soit Δ' la droite symétrique de la droite Δ par rapport au point O. Du point M_2 abaissons la perpendiculaire PP' sur les droites Δ et Δ'. Nous avons, en appelant h la distance du point O à la droite Δ,

$$\begin{aligned} M_2P' &= 2h - PM_2 \\ &= 2h - \frac{h(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \\ &= \frac{h(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{M_2P'}{M_2O} = \frac{h(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1\rho_2},$$

ou, en vertu de (1),

$$\frac{M_2P'}{M_2O} = \frac{h}{\rho}.$$

Par suite, le rapport des distances du point M_2 à la droite Δ' et au point O est constant, et *le lieu du point* M_2 *est une conique ayant le point* O *pour foyer et la droite* Δ' *pour directrice correspondante*.

Cette conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le rapport constant $\frac{h}{\rho}$ est supérieur, inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire suivant que la droite Δ est extérieure, en partie intérieure ou tangente au cercle Γ.

On voit que, dans tous les cas, la conique passe par les extrémités du diamètre du cercle Γ qui est parallèle à la droite Δ (*).

2. — La formule (1) montre que le mode de génération des coniques ici envisagé rentre dans la troisième transformation générale étudiée dans mon Mémoire *sur les transformations générales des courbes planes* (**).

Par le point O élevons à la droite OM une perpendiculaire qui coupe en T_1 la droite Δ et en T_2 la tangente à la conique (M_2) au point M_2. La formule (22) du Mémoire cité donne

$$\frac{1}{OT_1} + \frac{1}{OT_2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$OT_2 = - OT_1.$$

Le point T_2 se trouve donc sur la droite Δ' symétrique de Δ par rapport à O, c'est-à-dire sur la directrice de la conique (M_2) correspondant à un foyer O. Dès lors, on tombe sur ce théorème connu :

La tangente en un point d'une conique passe par le point où la perpendiculaire menée par l'un des foyers au vecteur du point considéré, issu de ce foyer, coupe la directrice correspondante.

(*) La relation

$$\frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_2} = \frac{1}{OM}$$

peut s'écrire

$$OM.OM_2 + OM.OM_1 = OM_1.OM_2,$$

ou, en ajoutant et retranchant $\overline{OM}^2$

$$OM_1.OM_2 - OM.OM_2 - OM.OM_1 + \overline{OM}^2 = \overline{OM}^2,$$

c'est-à-dire

$$(OM_1 - OM)(OM - OM_2) = \overline{OM}^2$$

ou encore

$$MM_1.MM_2 = \overline{OM}^2,$$

ce qui démontre le théorème proposé pour le cas de l'ellipse seulement par M. Antomari dans la question 77. (Voir la solution qui a été donnée dans le nº de décembre 1885, p. 279.) C'est précisément cette question, si facilement résolue par le procédé qui vient d'être indiqué, qui nous a suggéré l'idée de publier cette note dont nous possédons les éléments depuis longtemps. — M. D'O.

(**) *Mathesis*, t. V, 1884. p. 73 et 97.

3. — La formule (23) du même Mémoire donne, en appelant R le rayon de courbure à la conique (M_2) au point M_2.

$$\frac{1}{R \sin^3 \widehat{OM_2T_2}} = \frac{1}{\rho}$$

ou

$$\frac{R}{OM} = \frac{\overline{M_2T_2}^3}{\overline{OT_2}^3}.$$

Menons la normale en M_2 à la conique, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en M_2 à M_2T_2.

Si nous tirons la symédiane T_2S du triangle OT_2M_2, nous avons, en vertu d'un théorème démontré dans ma première étude sur la symédiane (*), SH étant perpendiculaire à OM, et le point H appartenant à la normale en M_2,

$$\frac{R}{OM} = \frac{M_2H}{OS}$$

ou

$$\frac{R}{M_2H} = \frac{OM}{OS}.$$

La droite OH coupant au point K la tangente en M, au cercle (Γ), on a

$$\frac{OM}{OS} = \frac{OK}{OH}.$$

Par le point K menons une parallèle à OM ; cette droite coupe la normale M_2H au point E, on a

$$\frac{M_2E}{M_2H} = \frac{OK}{OH} = \frac{OM}{OS}.$$

Donc,

$$M_2E = R,$$

(*) Voir *Nouv. Ann. de Mathém.* (3me série, t. II, 1883, p. 454) et ma *Monographie de la symédiane* (*Journal de Math. élém.*, 1885, p. 193, théorème 6).

et le point E est le centre de courbure, répondant au point M_2.

On peut énoncer ainsi ce résultat.

Si la perpendiculaire élevée à OM, *par le pied de la symédiane du triangle* OT_2M_2, *issue de* T_2, *coupe en* H *la normale en* M_2 *à la conique* (M_2), *et que la droite* OH *coupe en* K *la tangente en* M *au cercle* Γ, *le centre de courbure répondant au point* M_2 *se trouve sur la parallèle au vecteur* OM_2 *menée par le point* K.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 245.)

127. Le Folium simple. — Parmi les quartiques remarquables, nous signalerons encore le Folium simple ; cette courbe correspond à la définition suivante :

1° Les directions isotropes sont les seules directions asymptotiques de la courbe;

2° Elle possède un point triple et les tangentes en ce point sont coïncidentes.

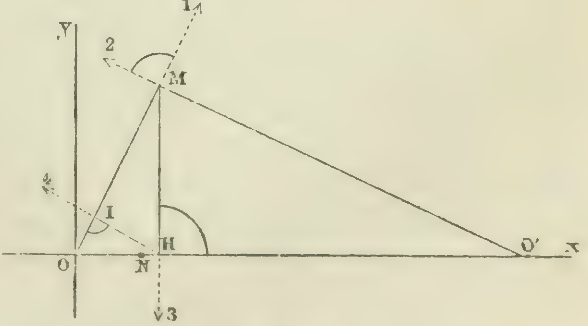


Fig. 113.

D'après cette définition, en prenant convenablement les axes, l'équation du Folium simple est $(x^2 + y^2)^2 = Ax^3$ (1), A étant une constante.

Soit OO′ un segment donné ; effectuons la construction (1, 2, 3, 4, *fig. 113*), nous obtenons unpoint I, et en prenant

$$OO' = d, \qquad OI = \rho, \qquad MOO' = \omega,$$

nous avons

$$OM = d \cos \omega, \qquad MI = d \sin^2 \omega \cos \omega;$$

par suite,

$$\rho = d \cos^3 \omega. \qquad (2)$$

En convertissant cette équation en coordonnées cartésienne, et en supposant $A = d$, nous obtenons bien l'équation du Folium simple.

Tracé de la tangente. — De l'équation (2) on peut déduire une propriété remarquable de la normale en un point pris sur le Folium simple. Mais, comme nous allons le montrer, cette propriété appartient aux courbes, plus générales, qui correspondent à l'équation

$$\rho = d \cos^{2p+1} \omega, \qquad (1)$$

dans laquelle p désigne un nombre entier et positif.

Prenons deux points fixes OO′ et répétons, comme l'indique la figure, p fois la construction visée plus haut. Des points H_1, I_1 nous déduisons des points analogues H_2, I_2; et, ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions aux points H_p, I_p.

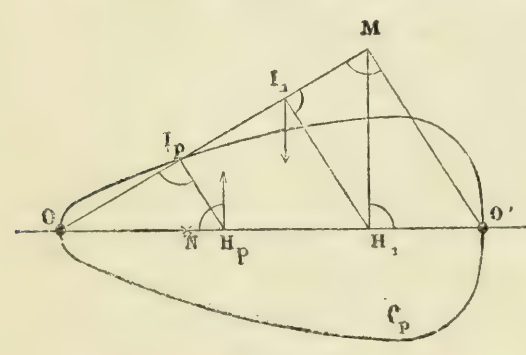


Fig. 114.

Nous avons alors

$$OH_1 = d \cos^2 \omega,$$

$$OH_2 = d \cos^4 \omega, \ldots \quad OH_p = d \cos^{2p} \omega;$$

$$OI_1 = d \cos^3 \omega, \qquad OI_2 = d \cos^5 \omega, \ldots \quad OI_p = d \cos^{2p+1} \omega,$$

Le lieu décrit par le point I_p est donc une courbe f_p représentée, en coordonnées polaires, par l'équation (1).

Cherchons à déterminer la normale en un point I_p pris sur cette courbe f_p.

On sait (*C. M. S.*, t. II, p. 575) que l'équation de la normale est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos (\omega - \omega_1) + \frac{1}{\rho_1'} \sin (\omega - \omega_1) \cdot$$

Appliquons cette relation (1); nous obtenons, après calcul,

$$\frac{d}{\rho} \cos^{2p} \omega_1 = \frac{2p+2}{2p+1} \cos \omega + \left(\operatorname{tg} \omega_1 - \frac{\operatorname{cotg} \omega_1}{2p+1} \right) \sin \omega \cdot$$

Parmi les solutions remarquables de cette équation, on observera la suivante :

$$\omega = 0, \qquad \rho = \frac{2p+1}{2p+2}\,OH_p.$$

D'où nous concluons qu'en prenant sur OH_p un point N tel que

$$\frac{ON}{OH_p} = \frac{2p+1}{2p+2},$$

N est le pied de la normale.

En particulier, si nous revenons au folium simple f_1, *(fig. 113)* supposant par conséquent $p = 1$, nous voyons que le pied de la normale au point I s'obtiendra en prenant

$$ON = \frac{3}{4}\,OH.$$

Parmi les conséquences remarquables de cette construction, on peut observer que *le rayon de courbure au point* O *est nul.*

128. Remarque. — Il est naturel, après avoir considéré les courbes qui correspondent à l'équation (1) du paragraphe précédent, d'examiner celles qui sont représentées par l'équation

$$\rho = d\cos^{2p}\omega; \qquad (2)$$

puis, de supposer, dans les formules (1) et (2), p positif ou négatif. De la sorte, le problème qui nous occupe se trouvera donc résolu pour toutes les équations

$$\rho = d\cos^{m}\omega, \qquad (3)$$

quel que soit l'entier m, positif ou négatif.

Pour avoir les courbes (2), il faut projeter les points H_1, H_2, ... H_p, non plus sur OM, mais sur la droite qui va du point M au milieu de OO′.

Le degré de ces courbes s'élève très vite; le cas le plus simple, celui qui correspond à $p = 1$, donne déjà une courbe du sixième ordre; cette courbe a la forme d'un double ovale et l'on trouve, soit par la considération de l'équation de la tangente en coordonnées polaires, soit par celle de la normale, d'élégantes constructions pour le tracé de ces droites. Sans nous attarder sur ces détails faciles à vérifier, nous allons, pour donner un nouvel exemple remarquable de cette mé-

thode, l'appliquer au cas particulier où dans l'équation (3) on suppose $m = -2$. On obtient ainsi une quartique très simple qui a déjà fait l'objet de notes diverses (*) parce qu'elle présente cette particularité, toujours recherchée, d'avoir des points d'inflexion qui peuvent se déterminer par la règle et le compas. Nous allons montrer que les tangentes de cette quartique se déterminent bien simplement avec la règle et l'équerre.

Prenons trois points en ligne droite O, O′, O″ et tels que $O'O = OO'' = \frac{h}{4}$; puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4, 5, *fig.* 115); nous trouvons ainsi un point I dont le lieu est une courbe U représenté par l'équation

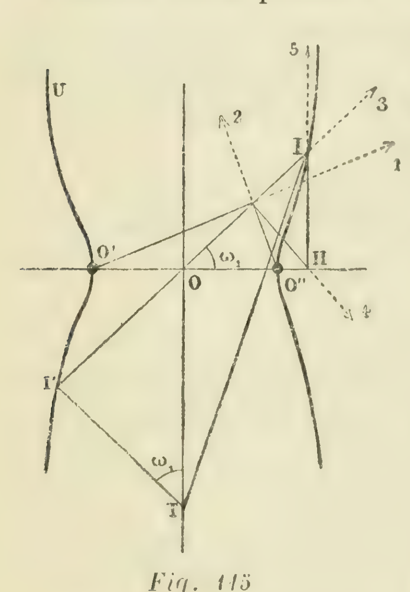


Fig. 115

$$\rho = \frac{h}{\cos^2 \omega}.$$

Proposons-nous de déterminer la tangente au point I (ρ_1, ω_1), à cette courbe.

L'équation de la tangente à une courbe, en coordonnées polaires (*C. M. S.*, p. 573), étant

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' \sin(\omega - \omega_1);$$

Nous avons, dans le cas présent,

$$\frac{2h}{\rho} = (1 + \cos 2\omega_1) \cos(\omega - \omega_1) - 2 \sin 2\omega_1 \sin(\omega - \omega_1).$$

En faisant $\omega = 90^0$ dans cette relation, nous trouvons que la tangente en I coupe l'axe des y en un point T tel que

$$OT = - OI \sin \omega_1.$$

De cette remarque nous pouvons conclure qu'en prenant le point I′ symétrique de I par rapport au centre O et en élevant en I′ une perpendiculaire à I′I, cette perpendiculaire va couper l'axe Oy au même point T que la tangente cherchée.

(*) *Nouvelles Annales*, 1843, p. 232; 1845, p. 319; 1846, p. 214.

En prenant l'équation de la normale, on arrive à une conclusion qui est aussi très simple et que l'on pourra : soit vérifier directement, soit déduire du tracé précédent (*).

Voici quelle est cette propriété.

Élevons au point I une perpendiculaire au rayon vecteur; cette droite rencontre l'axe en un point K; si nous prenons KN = OK, IN est la normale cherchée (**).

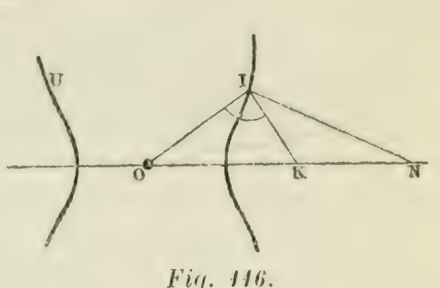


Fig. 116.

129. Les quartiques pyriformes. — Ces quartiques affectent la forme d'un simple folium présentant un axe de symétrie et un point de rebroussement ; elles correspondent à l'équation

$$x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0,$$

dans laquelle a et b désignent deux longueurs données. Ces courbes ont fait l'objet, du moins dans des cas particuliers que nous signalerons tout à l'heure, de diverses recherches (***). Elles offrent plus d'une propriété remarquable : 1° on peut les construire par points et par tangentes, très simplement, avec la règle et l'équerre ; 2° toutes ces courbes se déduisent de

(*) Nous aurons d'ailleurs occasion, dans la deuxième partie de ce ouvrage, d'utiliser la propriété géométrique assez curieuse que nous rencontrons ici.

(**) Dans l'article que nous avons cité plus haut et qui est inséré dans le tome V des *Nouvelles Annales* (1846), on trouve une construction de la tangente à la courbe qui vient de nous occuper, mais cette construction est moins simple que celles que nous proposons ici et, de plus, elle exige l'emploi d'arcs de cercle.

Dans une note qui accompagne cet article, note non signée mais qui est évidemment due à Terquem, il est dit : « Descartes (*Œuvres*, t. V, p. 336, édition Cousin) a imaginé un instrument formé de deux règles à l'aide duquel il construit d'un mouvement continu et simultanément les courbes données par les équations polaires

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos^4\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos^6\omega}, \ldots »$$

(***) O. Bonnet, *Nouvelles Annales* 1844, p. 75. — Brocard, *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, 1880 ; pp. 91, 121, 213, et *Mathesis*, t. III, 1883, pp. 23, 116, 191 ; t. V, p. 227. — J. Mister, *Mathesis*, 1881, pp. 78 et 128.

l'une d'elles par voie projective; 3° on peut déterminer le point le plus haut de la courbe et ses points d'inflexion; 4° l'aire de la courbe peut être calculée, elle se déduit en celle du cercle générateur en multipliant celle-ci par un rapport connu, etc...

Nous allons établir ces diverses propriétés.

1° *Génération des pyriformes.* Imaginons un cercle O et deux diamètres rectangulaires AB, CD, puis effectuons la construction (1, 2, 3, *fig.* 117); nous obtenons ainsi un point I. L'équation du lieu géométrique décrit par ce point est facile à trouver. Prenons pour axe des x le diamètre AB et pour axe des y la tangente en A du cercle O et posons

$$IAB = \alpha,$$
$$AH = b,$$
$$AB = a.$$

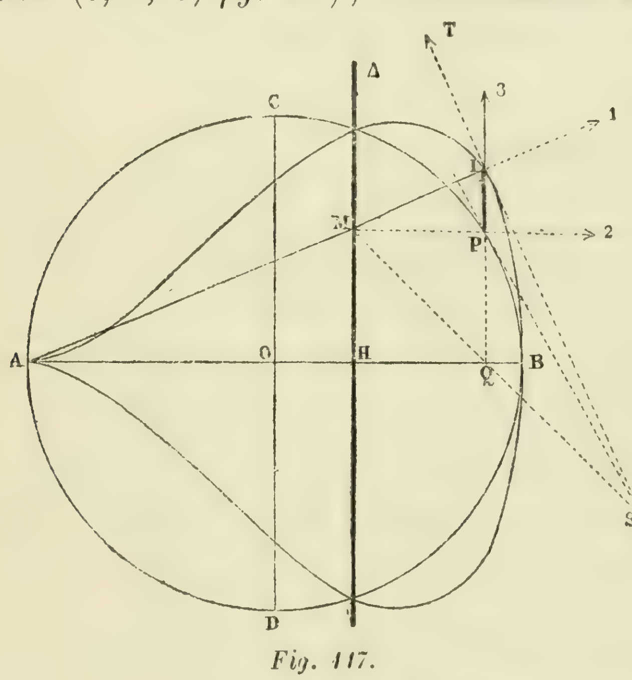


Fig. 117.

Nous avons d'abord

$$\overline{PQ}^2 = \overline{MH}^2 = x(a - x),$$

ou

$$b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = x(a - x).$$

D'ailleurs

$$y = x \operatorname{tg} \alpha;$$

le lieu du point I est donc une courbe, affectant la forme qu'indique la figure et correspondant à l'équation

$$b^2y^2 = x^3(a - x). \qquad \text{(P)}$$

2° *Les pyriformes sont projectives.* En effet, si l'on transforme l'équation (P) au moyen des formules

$$by = aY, \qquad x = X$$

on a

$$a^2Y^2 = X^3(a - X). \qquad \text{(P')}$$

Cette équation (P') représente une pyriforme particulière;

c'est celle qui a été étudiée par M. O. Bonnet *(loc. cit.)*, en supposant $a = 1$. Mais, lorsque a varie, toutes les courbes (P′) sont homothétiques et l'on peut, sans restreindre la généralité des propriétés de la courbe étudiée, faire l'hypothèse $a = 1$.

Quant aux courbes (P), elles se déduisent toutes, par voie projective, d'une courbe (P′), en supposant : 1° que b varie, 2° que l'on donne à a la même valeur dans (P) et dans (P′).

En effet, on a reconnu dans les formules de transformation que nous avons prises, celles qui servent à transformer l'ellipse en cercle. La méthode classique qui sert à l'étude de l'ellipse, considérée comme la projection du cercle s'applique donc aux pyriformes et les propriétés signalées par M. O. Bonnet pour la pyriforme particulière (P′), celles qu'on pourrait encore trouver pour cette courbe, s'appliquent, avec les modifications ordinaires, aux pyriformes plus générales que nous avons définies tout à l'heure.

3° *Points d'inflexion*, etc... Pour n'en citer qu'un exemple, M. O. Bonnet a démontré que les points d'inflexion de (P′) avaient pour coordonnées.

$$X = a\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \qquad Y = \pm\frac{a}{8}\sqrt{6\sqrt{3}-9}.$$

Pour une pyriforme quelconque les points d'inflexion ont pour coordonnées

$$x = a\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \qquad y = \pm\frac{a^2}{8b}\sqrt{6\sqrt{3}-9};$$

Mais il faut observer que la détermination de ces points exige l'emploi du compas.

Il en est de même du point le plus haut des pyriformes. Ce point a pour coordonnées

$$x = \frac{3a}{4}, \qquad y = \frac{3a\sqrt{3}}{16}$$

pour la courbe (P′); pour une pyriforme quelconque ce point est représenté par

$$x = \frac{3a}{4}, \qquad y = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16b}.$$

4° *Quadrature des pyriformes*. La méthode des projections permet encore de déterminer l'axe de la courbe, par des consi-

dérations géométriques que nous allons donner. On évite ainsi le calcul, relativement pénible, de l'intégrale définie

$$\frac{1}{b}\int_0^a x\sqrt{x(a-x)}\,dx.$$

Prenons d'abord la pyriforme de M. O. Bonnet, courbe qu'on obtient en supposant $b = a$, auquel cas Δ est tangente au cercle générateur au point B.

Si nous appliquons la construction exposée plus haut, au cas particulier visé en ce moment, nous trouvons sur le rayon vecteur AM deux points I, I' de la courbe et les propriétés élémentaires de la figure donnent

$$P'I' = QI.$$

On conclut de cette remarque, reconnue autrement par M. O. Bonnet, que l'*aire de courbe considérée est la moitié de celle du cercle générateur.*

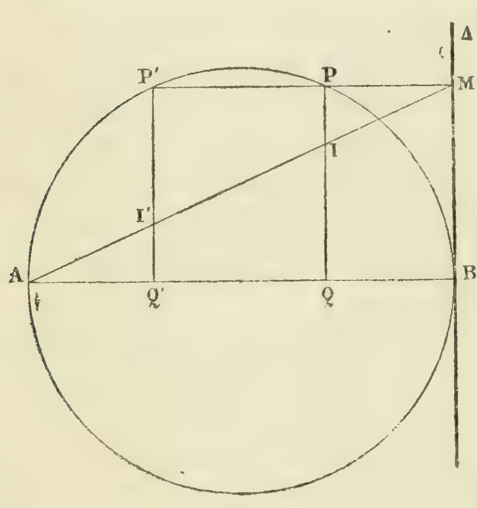


Fig. 118.

Pour une pyriforme quelconque l'aire s'obtient en multipliant celle de (P') par le rapport $\frac{a}{b}$; concluons donc que l'*aire totale d'une pyriforme quelconque représentée par l'équation* (P) *est égale à* $\frac{\pi a^3}{8b}$.

5° *Tracé de la tangente.* On a dû observer que le tracé point par point que nous avons donné pour les pyriformes présente ces courbes comme des transformées du cercle par la méthode de Mac-Laurin. Le tracé de la tangente peut donc être effectué, avec la règle et l'équerre, conformément aux principes que nous avons déjà utilisés. La *fig. 117* rappelle comment ces principes ont été appliqués pour obtenir la tangente IT à la pyriforme (*).

(*) Pour la construction, point par point, des pyriformes, avec la règle et l'équerre, il est bien entendu que le cercle O dont il a été question

130. Réflexions générales. — Beaucoup d'autres quartiques, et aussi certaines courbes d'un ordre plus élevé, sont susceptibles d'être tracées par points et par tangentes au moyen de la règle et de l'équerre. La *Kreuzcurve* et la quartique γ_4 dont nous avons parlé ailleurs (*Journal* 1885, p. 272 et 1886, p. 202); la *rosace à quatre feuilles* (*Géométrie analytique*, p. 597); la *Kohlenspitzencurve* de M. Schoute (*Archiv von Grünert*, 1885); les *hypocycloïdes à trois ou quatre rebroussements* etc., et leurs *podaires*, donneraient lieu à d'intéressants développements dans l'ordre d'idées qui dirige ce travail; mais cette exposition nous entraînerait bien loin. Nous avions eu aussi la pensée, à laquelle nous renonçons, pour le même motif, et avec plus de regrets, de terminer la première partie de cet ouvrage par l'exposition de certaines méthodes de transformation permettant de multiplier, à l'infini, les tracés de la règle et de l'équerre dans la construction des courbes, par points et par tangentes. Nous donnerons un seul exemple des applications auxquelles nous venons de faire allusion, en prenant l'idée de la transformation réciproque, dans la géométrie cartésienne.

Théorème. — *Si, au moyen de la règle et de l'équerre, on sait construire, par points et par tangentes, la courbe* U *d'ordre* p *qui correspond à l'équation*

$$f(x, y) = 0,$$

on peut aussi, dans ces mêmes conditions, construire la courbe U *d'ordre* 2p *qui correspond à l'équation*

$$f\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}\right) = 0.$$

Sur les axes Ox, Oy on donne quatre points A, A'; B, B', tels que

$$OA = A'O = a, \qquad OB = B'O = b;$$

soient

$$m(x, y), \qquad M(X, Y)$$

---

ne doit pas être tracé; on détermine d'abord le point P par le moyen de deux droites rectangulaires issues des extrémités A et B du diamètre AB; puis le point M, etc.

deux points correspondants, dans *la transformation reciproque cartésienne*. nous avons alors

$$xX = a^2, \qquad yY = b^2;$$

telles sont les formules de la transformation en question.

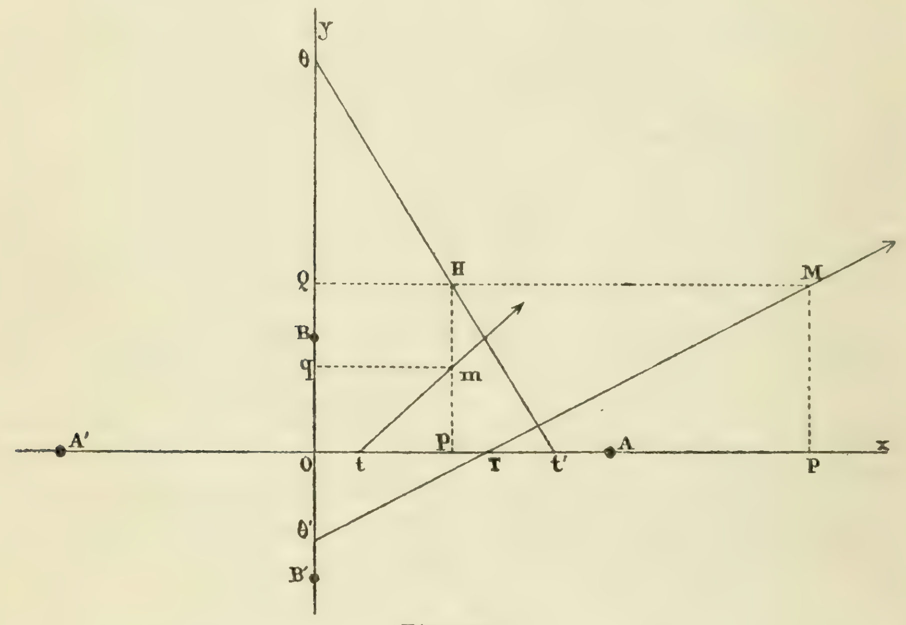


Fig. 119.

Au point p correspond un point P, conjugué harmonique de p par rapport au segment AA'; de même à q correspond Q conjugué harmonique de q par rapport aux points B et B'.

D'après cela, au point m correspond un point M et les constructions qui conduisent de m à M n'exigent que l'emploi de la règle et de l'équerre.

La détermination de la tangente est plus délicate.

Il s'agit de montrer comment, connaissant la tangente en m à u, on peut, avec la règle et l'équerre, construire la tangente en M à la courbe U, transformée de u.

Les formules (L) donnent

$$xdX + X\,dx = 0, \qquad ydY + Ydy = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{X} \cdot \frac{Y}{\left(\frac{dY}{dX}\right)} \cdot \qquad (1)$$

Soient mt la tangente donnée, MT la tangente inconnue ; on a donc

$$y = pt\,\frac{dy}{dx}, \qquad y = \mathrm{PT}\,\frac{dY}{dX}.$$

La relation (1) devient

$$\frac{pt}{Op} = \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{OP}}.$$

Ainsi la ponctuelle (O, t, p) est homothétique à la ponctuelle (O, T, P) et cette remarque permet de déterminer le point T, connaissant les quatre points (O, t, p, P) de plusieurs façons, toutes, très simples.

Mais la difficulté inhérente au sujet que nous traitons et à laquelle nous avons fait allusion tout à l'heure, tient à ce que nous ne nous accordons que l'usage de la règle et de l'équerre et, cette condition étant imposée, nous avons à montrer comment nous déterminons le point inconnu T.

Prolongeons pm jusqu'à sa rencontre en H avec MQ et joignons H au point t' symétrique de t par rapport à p ; t'H rencontre oy en θ et nous avons

$$\frac{t'p \text{ ou } tp}{Op} = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{Q}\theta}. \qquad (2)$$

D'autre part, la droite MT rencontre oy en un point θ' et nous pouvons observer que

$$\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{MP} \text{ ou } \mathrm{OQ}}{\theta'\mathrm{Q}}. \qquad (3)$$

Comparant (2) et (3) nous en déduisons

$$\theta\mathrm{Q} = \mathrm{Q}\theta'.$$

Les deux points θ, θ' sont donc symétriques l'un de l'autre par rapport à Q.

De cette remarque résulte une construction de la tangente MT, par des tracés qui n'exigent, comme l'on voit, que l'emploi de la règle et de l'équerre (*).

(*) Nous terminons ici la première partie de la *géométrie de la règle et de l'équerre;* la seconde partie, qui est purement élémentaire, paraîtra régulièrement dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* à partir du n° de Janvier 1887.

BIBLIOGRAPHIE

A SYNOPSIS OF ELEMENTARY RESULTS IN PURE MATHEMATICS, ... by *G. S. Carr* (London : Francis Hodgson, 89, Farringdon Street, Price 34 s).

Ce livre dont la lecture est facile, même à ceux qui n'ont qu'une faible connaissance de la langue anglaise, est un résumé très complet et clairement ordonné des principaux théorèmes de la géométrie, des formules de l'algèbre, de la trigonométrie, du calcul différentiel, du calcul intégral, de la géométrie analytique, etc. C'est un véritable formulaire mathématique, plein de renseignements précieux et, entre parenthèses, il serait fort à désirer qu'il existât un ouvrage de ce genre, écrit dans notre langue. Le Dictionnaire de M. Sonnet ne remplit pas le même but que le livre de M. Carr et nous appelons sur celui-ci l'attention de nos lecteurs. Toute la nouvelle terminologie mathématique s'y trouve expliquée ; et ce n'est pas un petit service que rend ainsi ce précieux volume. G. L.

QUESTION 116

Solution.

Construire la podaire de l'origine par rapport à la courbe U *représentée par l'équation*

$$x^3 + y^3 - a^3 = 0. \qquad (a > 0)$$

L'observation faite au commencement de la solution donnée plus loin pour la question 117 s'applique aussi à celle-ci.

Soient α, β les coordonnées d'un point de U ; on trouve immédiatement pour les coordoneées x, y d'un point du lieu les valeurs

$$x = a^3 \frac{\alpha^2}{\alpha^4 + \beta^4}, \qquad y = a^3 \frac{\beta^2}{\alpha^4 + \beta^4}.$$

On voit d'abord que x et y sont positifs ; la courbe est renfermée *dans le premier quadrant*. En introduisant les coordonnées polaires ρ, ω, les formules précédentes donnent

$$\frac{\sin\omega}{\beta^2} = \frac{\cos\omega}{\alpha^2} = \frac{\rho}{a^3},$$

et. en tenant compte de la relation $\alpha^3 + \beta^3 = a^3$, on a pour

l'équation polaire du lieu

$$\rho^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \left\{ \sin^{\frac{3}{2}}\omega + \cos^{\frac{3}{2}}\omega \right\}.$$

La courbe correspondante présente un rebroussement à l'origine ; la tangente de rebroussement est en même temps l'axe de symétrie. La courbe est tangente aux axes ox, oy aux points (a, o), (o, a) ; elle n'a pas de points à l'infini ; sa forme générale résulte alors de ces remarques diverses.

G. L.

QUESTION 117

Solution.

Étudier les formes successives de la courbe représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 - 3axy + \lambda = o \qquad (a > o). \qquad (1)$$

Cette question, proposée autrefois (mars 1884), a probablement paru trop simple car nous n'avons reçu pour elle qu'un très petit nombre de solutions; encore celles-ci présentent-elles des fautes graves, ce qui semble prouver, et la chose n'est d'ailleurs que trop facile à constater en assistant aux examens de l'École Polytechnique, combien le problème de la construction des courbes est négligé par les candidats.

La discussion des formes diverses affectées par les courbes qui correspondent à l'équation proposée se fait très simplement en observant d'abord que l'identité bien connue

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)}{2} \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\}$$

permet d'écrire l'équation (1) sous la forme

$$\frac{(x+y+a)}{2} \left\{ (x-y)^2 + (a-x)^2 + (a-y)^2 \right\} + \lambda - a^3 = o. \quad (1')$$

La discussion porte alors, naturellement, sur ces trois hypothèses, que l'on doit aborder successivement :

$$\lambda - a^3 > o, \qquad \lambda - a^3 = o, \qquad \lambda - a^3 < o.$$

La droite Δ qui a pour équation $x + y + a = o$ est

l'asymptote réelle de la courbe et celle-ci est située, toute entière, du même côté par rapport à Δ.

La première bissectrice est un axe de symétrie; en cherchant les sommets de (Γ) on est conduit à l'équation

$$2x^3 - 3ax^2 + \lambda = 0. \qquad (2)$$

Si λ est nul, l'équation (1) représente le folium de Descartes; et si $\lambda = a^3$, la cubique se décompose en une droite et un point. Écartons ces deux cas particuliers. Alors, λ étant différent de zéro, cette équation a une racine réelle, si $\lambda - a^3$ est positif; la courbe a la forme d'une branche conchoïdale; elle a trois racines réelles, si l'on suppose

$$0 < \lambda < a^3.$$

L'équation (2) prouve qu'il y a deux racines positives et une négative; la courbe est formée: 1° d'une branche conchoïdale; 2° d'un ovale extérieur à la région qui est comprise entre cette branche et son asymptote.

Enfin, si λ est négatif, l'équation (2) n'admet qu'une racine réelle, puisqu'il manque un terme entre deux termes de même signe; la courbe est encore constituée par une seule branche conchoïdale. G. L.

QUESTION 129

Solution par M. Henri FERVAL, élève au Lycée Henri IV (Classe de M. Macé de Lépinay).

Trouver toutes les équations du troisième degré telles que si x_1 est une de leurs racines convenablement choisie, les deux autres soient

$$-\frac{x_1 + 1}{x_1} \quad et \quad -\frac{1}{1 + x_1}. \qquad \text{(Weill.)}$$

Observons que le produit des trois racines est égal à 1. De là, nous concluons que le produit de deux racines est égal à l'inverse de la troisième; nous avons donc pour la somme des produits deux à deux des racines :

$$\frac{1}{x_1} - (1 + x_1) - \frac{x_1}{x_1 + 1} = -\left(-\frac{1}{x_1} - 1 + x_1 - \frac{1}{1 + x_1}\right)$$
$$- 3 = -(\lambda + 3),$$

λ étant un paramètre arbitraire, qui désigne la somme des racines. Les équations cherchées ont donc la forme générale :

$$x^3 - \lambda x^2 - (\lambda + 3)x - 1 = 0.$$

NOTA. — Solution analogue par M. Paul Bourgarel.

QUESTION 130

Solution par M. Paul BOURGAREL, à Antibes.

Trouver les équations du sixième degré telles que, si x_1 *est une quelconque de leurs racines, les autres soient :*

$$\frac{1}{x_1} - (1 + x_1) - \frac{1}{1 + x_1} - \frac{x_1}{1 + x_1} - \frac{x_1 + 1}{x_1}.$$

(Weill.)

On voit immédiatement que les équations cherchées sont réciproques, car le produit des racines prises deux à deux est égal à 1.

D'après la question précédente, l'équation générale du troisième degré admettant pour racines :

$$x_1 \quad - \frac{1}{1 + x_1} \quad - \frac{x_1 + 1}{x_1},$$

est :

$$U = x^3 - \lambda x^2 - (\lambda + 3)x - 1 = 0.$$

L'équation générale du troisième degré admettant pour racines

$$\frac{1}{x_1}, \quad -(1 + x_1), \quad - \frac{x_1}{1 + x_1}$$

est l'équation aux inverses des racines de cete équation, c'est-à-dire :

$$V = x^3 + (\lambda + 3)x^2 + \lambda x - 1 = 0.$$

L'équation générale cherchée est donc

$$UV = 0.$$

NOTA. — Solution analogue par M. Henri Feval.

QUESTIONS PROPOSÉES

212. — Soit $A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère normal inscrit à une ellipse Γ ; c'est-à-dire, un quadrilatère tel que les normales en ces points soient concourantes. Les tangentes à Γ en ces mêmes points rencontrent la tangente à l'une des extrémités A du grand axe AA' en quatre points $B_1B_2B_3B_4$; démontrer que l'on a

$$AB_1 . AB_2 . AB_3 . AB_4 = -b^4,$$

et

$$\Sigma AB_1 . AB_2 = 0.$$

(G. L.)

213. — On considère deux paraboles PP' qui, ayant même sommet O, se coupent orthogonalement en ce point. Autour du point O on fait tourner deux droites rectangulaires et on obtient ainsi : sur P, deux points a et b ; sur P', deux autres points a' et b'. Si on prend trois des quatre points a, b, a', b' pour former un triangle, le quatrième est l'orthocentre de ce triangle. *(Beaurepaire.)*

214. — Soit une courbe du quatrième degré ayant deux points doubles à l'infini. En général, il n'est pas possible de lui inscrire un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux asymptotes. Si la chose est possible, elle l'est d'une infinité de manières. On demande alors le lieu des centres de ces parallélogrammes. *(E. C.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24520-6.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Questions diverses. Concours.

Bibliographie.

Questions proposées.

De 187 à 214.

Questions résolues.

108, 38 et 40, 127, 106, 75, 100, 135, 136, 146, 114, 199, 18, 26, 33, 117, 116, 129, 130.

Rappel des questions proposées et non résolues.

11, 17, 20, 24, 29, 45, 55, 57, 62, 63, 66, 67, 70, 71, 74, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24520-6.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur
de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE

TOME CINQUIÈME

Année 1886.



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1886

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

LA PREMIÈRE LEÇON DE CALCUL INTÉGRAL

Par M. **G. de Longchamps.**

On sait que le calcul intégral débute par une difficulté qui porte sur l'établissement de cette propriété fondamentale : *toute fonction continue* f(x) *a une intégrale.*

La démonstration ordinaire donne prise à une objection, parce qu'elle exige la connaissance de l'aire des contours curvilignes fermés. Les ouvrages élémentaires (*) glissent sur la difficulté qui se présente dans la géométrie élémentaire quand on aborde le problème si délicat des quadratures, et se borne à définir l'aire du cercle au moyen des polygones inscrits et circonscrits dont chaque côté décroît indéfiniment.

(*) Voyez *Géométrie* de Briot, p. 202. — *Id.* Rouché et de Comberousse, éd. 4, p. 281. — Les formules de Simpson et de Poncelet qui sont données plus loin (p. 294 et 296), donnent bien des expressions abrégées de l'aire comprise entre une courbe, un axe et deux ordonnées ; mais la définition de l'aire ne nous semble pas établie.

M. Catalan dans ses *Éléments de Géométrie*, éd. 2, p. 169, aborde cette question délicate et dit : « Mais alors se présente cette question : en employant des rectangles comme dans le premier mode et en employant des polygones comme dans le second, arrivera-t-on à la même limite ? Et même, en conservant le second procédé, comme on peut concevoir une infinité de séries de polygones, toutes ces séries conduiront-elles à la même limite ?

« La réponse est affirmative ; mais la démonstration complète de l'identité des résultats ne semble pas pouvoir être établie sans le secours du calcul intégral... »

Voyez aussi, sur ce point : *Géométrie* de Tombeck, p. 235 ; *Géométrie* de Combette, p. 311 ; *Géométrie* de Vacquant, p. 294. Dans tous ces traités la définition donnée pour l'aire ne s'applique qu'à celle du cercle ; le cas général n'est, avec raison d'ailleurs, pas abordé.

Pour le surplus, ils renvoient au calcul intégral ; mais il ne faut pas alors que celui-ci prenne pour base de sa première définition un principe que les élémentaires n'établissent pas avec la rigueur et la généralité qu'on est en droit d'exiger.

Néanmoins cette introduction au calcul intégral, critiquable pour les motifs que nous venons de rappeler, offre l'avantage, toujours appréciable, d'être extrêmement simple ; et nous avons cru, pour cette raison, devoir la reproduire dans l'ouvrage (*) que nous avons récemment publié, quand nous avons abordé, parmi les matières introduites dans le nouveau programme des examens d'entrée à l'Ecole Polytechnique, la *notion de l'intégrale définie.*

Il faut pourtant reconnaître qu'il y a là un point bien délicat et que la démonstration que nous venons de rappeler, si particulièrement importante, puisqu'elle est la base même du calcul intégral, laisse quelques doutes dans un esprit qui veut être complètement satisfait. Nous allons reproduire dans cette petite note (**) la démonstration que M. Jordan (***) a donnée et de la propriété en question.

1. Définition de l'intégrale définie.— Soit $f(x)$ une fonction donnée, continue (****) dans l'intervalle (a, b); prenons,

---

(*) *Supplément au Cours de Mathématiques spéciales.*

(**) Nous n'ajoutons, dans la présente note, rien d'essentiel à la démonstration de M. Jordan ; mais la forme de la rédaction est assez profondément modifiée, parce que, comme nous le disons plus loin, nous ne nous accordons pas la notion de la fonction uniformément continue. Une partie de ces modifications nous a été indiquée par un de nos collègues, M. Hubert, professeur au lycée de Versailles.

(***) C. Jordan : *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*; Gauthier-Villars, 1882 ; t. II, 52.

(****) Nous supposons que la fonction est *continue* dans le sens ordinaire de ce mot et non *uniformément continue* comme paraît l'exiger la démonstration de M. Jordan. Celui-ci d'ailleurs *(loc. cit.)* énonce le fait que *toute fonction continue est aussi uniformément continue;* mais il renvoie pour la démonstration au tome III de son *Cours d'analyse*, lequel n'a pas encore paru, croyons-nous. On trouvera une démonstration de cette propriété dans l'ouvrage que M. Tannery vient de faire paraître, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 106. (Librairie Hermann, 8, rue de la Sorbonne.)

Voici la distinction qui existe entre les fonctions continues et les fonctions uniformément continues.

Pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit uniformément continue, il faut que

entre a et b, deux valeurs x_0, X et, dans cet intervalle, inscrivons p moyens, x_1, x_2,... x_p; de telle sorte que nous ayons

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ x_p < x; \qquad (A)$$

puis, considérons l'expression U

$$U = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) \ldots + (X - x_p)f(x_p) \ldots ;$$

Si nous imaginons que p croisse indéfiniment et de telle façon que l'intervalle entre deux termes consécutifs quelconques de la suite (A) tende vers zéro, la limite vers laquelle tend la quantité U s'appellera l'intégrale définie de $f(x)$ pour l'intervalle considéré (x_0, X).

Mais cette définition ne peut être acceptée que si nous établissons successivement les points suivants :

1° *L'expression* U *a une limite;*

2° *Cette limite est indépendante de la loi d'insertion des moyens.*

Nous aurons encore à montrer quelle est la signification de la fonction U et nous établirons enfin que *la dérivée de* U *par rapport à* X *est égale à* f(X).

2. Théorème I. — *L'expression algébrique* U *a une limite.*

Nous supposerons que $f(x)$ est une fonction croissante (*) dans l'intervalle (x_0, X); s'il en était autrement on diviserait cet intervalle en plusieurs autres séparés par les valeurs limites.

Pour reconnaître que, dans ces conditions, U a une limite, nous allons montrer que U est une fonction croissante restant inférieure à un nombre donné.

---

l'on puisse assigner un nombre fixe ε, désigné d'avance et tel que la différence

$$f(x + h) - f(x)$$

soit plus petite que ε, h étant choisi suffisamment petit, et cela pour toutes les valeurs de x prises dans l'intervalle considéré.

Il n'est pas évident que le nombre ε, nombre qui doit être le même pour toutes les valeurs de x, existe nécessairement. Il y a donc là matière à démonstration ; mais les développements qu'on va lire ne soulèvent pas cette question délicate.

(*) Si l'on ne veut pas faire cette hypothèse, on remplacera dans la démonstration qui suit les différences telles que (A — B), par *mod* (A — B), expression qui, comme l'on sait, représente la valeur absolue de la différence A — B. Suivant la notation commode proposée par M. Tannery *(loc. cit.)* le module de A — B se réprésente aussi par | A — B |.

Insérons entre x_i et x_{i+1} un moyen ξ et considérons la nouvelle fonction U_1 :

$$U_1 = \ldots (\xi + x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - \xi) f(\xi) \ldots$$

Nous avons donc

$$U_1 - U = (\xi - x_i) f(x_i) + (x_{i+1} - \xi) f(\xi) - (x_{i+i} - x_i) f(x_i),$$

ou

$$U_1 - U = (x_{i+1} - \xi)\{f(\xi) - f(x_i)\}.$$

Les deux facteurs qui constituent le second membre de cette identité sont positifs, et nous pouvons écrire

$$U_1 > U.$$

Ainsi la fonction U est croissante quand on augmente le nombre des moyens.

Pour établir que U a une limite il faut encore reconnaître que cette fonction ne croît pas indéfiniment. A cet effet, considérons la suite

$$f(x_0), \quad f(x_1) \ldots \quad f(x_p).$$

Tous les termes de cette suite sont inférieurs à $f(\mathrm{X})$, la fonction $f(x)$ étant supposée croissante; écrivons donc

$$U < (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_p - x_{p-1} + \mathrm{X} - x_p) f(\mathrm{X}),$$

ou

$$U < (\mathrm{X} - x_0) f(\mathrm{X}).$$

Cette inégalité prouve que U ne croît pas indéfiniment; d'ailleurs U, comme nous l'avons montré, est une fonction croissante; finalement, U a une limite.

(A suivre.)

SUR LE POINT DE STEINER

Par **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

Soient $A_1A_2A_3$ un triangle quelconque, O le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité, H le point de concours des hauteurs, E l'ellipse circonscrite dont le centre est en G. Le cercle O et l'ellipse E ont un quatrième point commun R dont Steiner a signalé les propriétés suivantes (*):

(*) *Journal de Crelle* t. XXXII, p. 300 ; *Journal de Borchardt*, t. LXVII, p. 237; *Steiner's Gesammelte Werke*, t. II, p. 689.

Les cercles osculateurs à l'ellipse E *aux points* A_1, A_2, A_3 *se coupent en* R (*).

La normale menée par R *à l'ellipse passe par le symétrique de* H *par rapport à* G.

Le point R *appartient aux trois circonférences qui passent par un sommet du triangle* $A_1A_2A_3$ *et par les symétriques des deux autres sommets pris par rapport à* G.

Ce point est identique à celui que M. Tarry (**) a désigné par la lettre R. Cependant ce fait paraît avoir passé inaperçu.

Nous proposons pour ce point la dénomination de point de Steiner.

La présente note a pour objet l'étude des propriétés du point de Steiner et de quelques autres points qui s'y rattachent.

1. Cherchons d'abord les coordonnées de R.

Les équations du cercle O et de l'ellipse E, en *coordonnées normales* (distances d'un point aux côtés du triangle de référence) étant

$$\frac{a_1}{\delta_1} + \frac{a_2}{\delta_2} + \frac{a_3}{\delta_3} = 0, \qquad \frac{a_2a_3}{\delta_1} + \frac{a_3a_1}{\delta_2} + \frac{a_1a_2}{\delta_3} = 0,$$

les coordonnées de R sont inversement proportionnelles aux quantités

$$a_1(a_2^2 - a_3^2), \quad a_2(a_3^2 - a_1^2), \quad a_3(a_1^2 - a_2^2).$$

Les coordonnées barycentriques (***) de R sont inversement proportionnelles aux différences

$$a_2^2 - a_3^2, \quad a_3^2 - a_1^2, \quad a_1^2 - a_2^2$$

ou aux produits

$$\sin A_1 \sin (A_2 - A_3), \ \sin A_2 \sin (A_3 - A_1), \ \sin A_3 \sin (A_1 - A_2).$$

(*) Nous avons signalé une généralisation de ce théorème dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique*, année 1866, et dans la *Nouvelle Correspondance de Catalan*, t. IV, p. 399. On peut aussi comparer : *Journal de Crelle*, t. XXXVI, p. 95 (Joachimsthal), *Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 393 (G. de Longchamps), et la question du concours d'agrégation des sciences mathématiques de 1882 (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 273).

(**) Congrès de Rouen, communication de M. Brocard.

(***) Les coordonnées barycentriques μ_1, μ_2, μ_3 d'un point M sont proportionnelles aux masses qui, appliquées aux points A_1, A_2, A_3, ont pour centre de gravité le point M. On a

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = a_1\delta_1 : a_2\delta_2 : a_3\delta_3.$$

On en déduit, si R_1, R_2, R_3 sont les points de rencontre de RA_1, RA_2, RA_3 avec a_1, a_2, a_3 :

$$\frac{R_2A_1}{A_3R_1} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}, \text{ etc.}$$

2. Quelques propriétés du point de Steiner résultent, très simplement, de l'application des transformations quadratiques au cercle O et à l'ellipse E. Nous ferons usage de la transformation par polarité trilinéaire, de la transformation isogonale et de la transformation isotomique.

Si $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ est l'équation d'une droite n rencontrant les côtés du triangle fondamental A_1, A_2, A_3 en N_1, N_2, N_3, les conjuguées harmoniques des droites A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 par rapport aux angles A_1, A_2, A_3 du triangle ont pour équations $u_2x_2 - u_3x_3 = 0, \ldots$; elles concourent en un même point N dont les coordonnées sont $\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}$. Nous dirons, avec M. Mathieu (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 399), que N est le *pôle trilinéaire* de n, que n est la *polaire trilinéaire* de N. Si nous convenons d'appeler coordonnées d'une droite les coefficients u_1, u_2, u_3 de son équation, les coordonnées du pôle d'une droite sont inversement proportionnelles à celles de cette droite.

D'après cela, si l'on considère l'équation d'une conique U circonscrite au triangle de référence $A_1A_2A_3$:

$$\frac{L_1}{x_1} + \frac{L_2}{x_2} + \frac{L_3}{x_3} = 0, \qquad (1)$$

on voit que la polaire trilinéaire d'un point quelconque (x_1, x_2, x_3) de cette courbe passe par un point fixe dont les coordonnées sont L_1, L_2, L_3. Ce point fixe que nous appellerons *pôle d'homologie* de U, est le centre d'homologie de $A_1A_2A_3$ et du triangle $T_1T_2T_3$, formé par les tangentes aux points A_1, A_2, A_3 à la conique.

On verra, de la même manière, que la conique U est l'enveloppe des polaires trilinéaires, par rapport au triangle circonscrit $T_1T_2T_3$, d'un point mobile sur l'axe d'homologie des triangles $T_1T_2T_3$, $A_1A_2A_3$.

L'équation (1) exprime aussi que la droite dont les coordon-

nées sont $-\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ passe par le point T_1 ($-L_1, L_2, L_3$). Donc si une droite quelconque menée par T_1 rencontre A_1A_2, A_1A_3 aux points T'_3, T'_2, le point d'intersection des droites $A_3T'_3$, $A_2T'_2$ engendre la conique U (cas particulier du théorème de Maclaurin).

Appliquons ces notions au cercle O et à l'ellipse E. Soient $K_1K_2K_3$, $G_1G_2G_3$ les triangles polaires de $A_1A_2A_3$ par rapport à ces courbes. Le pôle d'homologie du cercle est le point de Lemoine K. Celui de l'ellipse est le centre de gravité G; les axes d'homologie sont, respectivement, la polaire k de K par rapport au cercle, et la droite à l'infini g. Par conséquent : 1° *le point de Steiner est le pôle trilinéaire de la droite joignant le point de Lemoine au centre de gravité;* 2° *les droites* K_1G_1, K_2G_2, K_3G_3 *se confondent avec les côtés du triangle* $R_1R_2R_3$.

(A suivre.)

NOTE SUR QUELQUES POINTS REMARQUABLES

DU PLAN DU TRIANGLE *ABC*

Par **Em. Lemoine**, ancien Élève de l'École Polytechnique.

En 1873, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences à Lyon (voir les comptes rendus, p. 94), et plus en détail dans ce journal voir 1883, p. 5, 27, etc.), nous nous sommes occupé de quatre points Θ_1, Θ_a, Θ_b, Θ_c du plan d'un triangle ABC, tels que si, par l'un d'eux, on mène des parallèles aux trois côtés, elles coupent ces côtés en six points, sommets d'un hexagone circonscrit à l'une des circonférences qui touchent les trois côtés de ABC. Nous avons étudié ces points, nous avons indiqué leur construction géométrique et calculé leurs coordonnées en notant leur rapport de symétrie avec d'autres points remarquables ω_1, ω_a, ω_b, ω_c.

Nous ajouterons que ω_1 est le point que M. Brocard (voir dans ce journal, 1884, p. 207) signale comme ayant aussi

été rencontré par Hochheim dans les *Archives de Grunert*, tome LII, 1871. La question 195 du *Journal de Mathématiques élémentaires* posée par M. G. Boubals revenant à la construction que nous avons indiquée pour le point Θ_1 (par le théorème XIII, p. 52, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1883) nous allons l'exposer ici un peu plus en détail.

On aura de même une construction des points Θ_a, Θ_b, Θ_c et par suite de ω_1, ω_a, ω_b, ω_c.

Voici l'énoncé de la question 195 dont nous venons de parler :

Par les sommets d'un triangle ABC *on mène les parallèles aux côtés opposés et par les sommets* A_1, B_1, C_1 *du triangle ainsi obtenu on mène encore les parallèles aux côtés de* ABC. *Démontrer que si, par le point de concours* Θ_1 *des bissectrices du troisième triangle* $A_2B_2C_2$, *on mène les parallèles aux côtés, ces parallèles déterminent sur les côtés du triangle* ABC *des points qui sont les sommets d'un hexagone circonscrit à un cercle.*

On voit tout d'abord que trois des côtés de l'hexagone étant sur les côtés de ABC, ce cercle est le cercle inscrit dans ABC.

Les deux triangles ABC, $A_2B_2C_2$ sont homothétiques et leur centre d'homothétie est le centre de gravité E de ABC, le rapport d'homothétie est $1/4$; pour avoir le centre Θ_1 du cercle inscrit à $A_2B_2C_2$, il faut donc joindre E au centre I du cercle inscrit à ABC, puis prendre sur EI, à partir de E et dans le sens EI : $E\Theta_1 = 4EI$.

Or, si l'on prend CB pour axe des x, CA pour axe des y, les coordonnées de E sont

$$\frac{a}{3},\quad \frac{b}{3}.$$

Celles de I sont

$$\frac{ab}{2p},\quad \frac{ab}{2p},$$

donc, celles de Θ_1 sont

$$\frac{a(2b-p)}{p},\quad \frac{b(2a-p)}{p}$$

et ce sont précisément celles du point que nous avons appelé Θ_1 *loco citato*.

Les points Θ_a, Θ_b, Θ_c se construisent de même avec les centres des cercles ex-inscrits au triangle ABC.

Remarque. — On voit facilement que les distances de Θ_1 aux trois côtés BC, AC, AB sont

$$4r - h_a, \quad 4r - h_b, \quad 4r - h_c$$

et celles de Θ_c

$$4r_c - h_a, \quad 4r_c - h_b, \quad -4r_c - h_c.$$

$$r,\ r_a,\ r_b,\ r_c\,; \quad h_a,\ h_b,\ h_c$$

désignant, comme d'ordinaire, les rayons des cercles inscrit, ex-inscrit au triangle ABC et les hauteurs.

Les distances de ω_1 aux trois côtés sont

$$\frac{2rh_a}{r_a}, \quad \frac{2rh_b}{r_b}, \quad \frac{2rh_c}{r_c}\,;$$

de même pour ω_a, etc.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(Suite, voir année 1885, p. 269.)

LES ANTI-DÉVELOPPÉES

40. — Imaginons une courbe U et la normale Δ en un point A pris sur cette courbe; soit ω le centre de courbure correspondant. Si nous prenons

$$AI = \omega A,$$

le lieu décrit par le point I est une certaine courbe V qu'on peut nommer l'*anti-développée* de U, pour rappeler, par ce mot, la construction précédente.

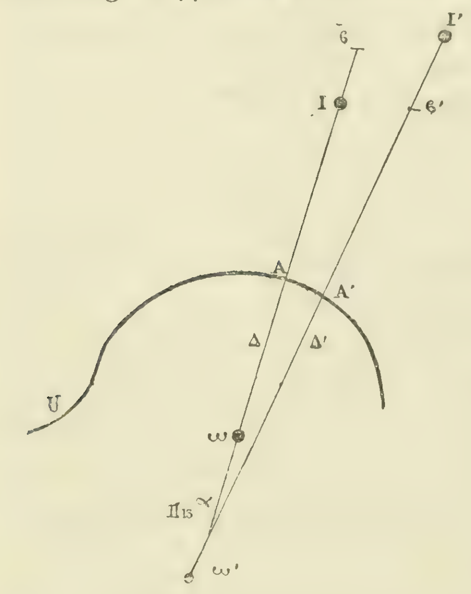
Proposons-nous de déterminer la tangente à V, au point I.

A cet effet, prenons un point A′ voisin de A et répétons, pour ce point, la construction que nous avons faite en A. Soit α le point de concours des deux normales; prenons

$$I\beta = \alpha\omega, \quad \text{et} \quad I'\beta' = \alpha\omega',$$

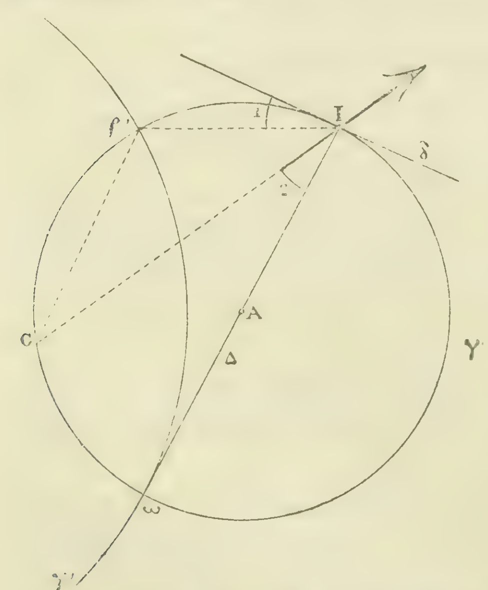
puis imaginons la parabole P tangente aux droites Δ, Δ', $\omega\omega'$,

et $\beta\beta'$ a son axe parallèle à II'. En effet, si nous considérons le triangle $\alpha\beta\beta'$, les droites $\omega\omega'$ et II' sont deux transversales réciproques de ce triangle et ceci (*) établit la remarque en question. Observons encore que le foyer de P appartient, par une propriété connue, au cercle γ circonscrit au triangle $\omega\alpha\omega'$.



Passons maintenant à la limite et supposons que la normale Δ' vienne se confondre avec Δ. La limite de γ est un certain cercle γ' bien déterminé ; c'est le cercle osculateur au point ω à la courbe W, développée de V, Nous admettrons que l'on sache tracer ce cercle.

Cherchons la position limite du foyer de P. Ce point appartient encore au cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\beta'$; mais la droite AA' est parallèle à $\beta\beta'$ et, par suite la position limite de $\beta\beta'$ est constituée par une droite δ passant par I perpendiculairement à Δ. Le cercle $\alpha\beta\beta'$ a donc pour limite le cercle γ'' décrit, de A comme centre, avec le rayon de courbure pour rayon.



Les cercles γ', γ'' se coupent en un point f' qui représente le foyer de la parabole P', limite des paraboles P.

Du point I partent deux tangentes à P'; ce sont justement

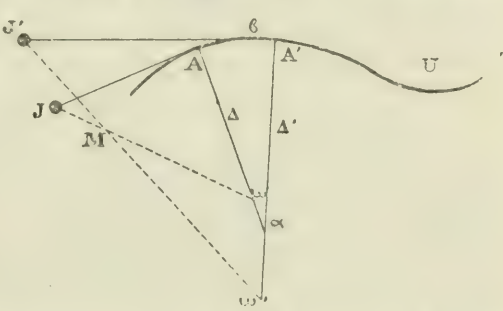
(*) Voyez *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 254, § 71.

les droites Δ, δ ; si nous menons $f'G$ parallèle à Δ, les angles $\hat{1}$ et $\hat{2}$ étant égaux, le théorème de Poncelet prouve que IG est un diamètre de P′.

Concluons donc que IG représente la position limite de II′ ; c'est la tangente à l'anti-développée.

41. — Voici encore un lieu géométrique qui, après ce que nous venons de dire, se présente naturellement à l'esprit.

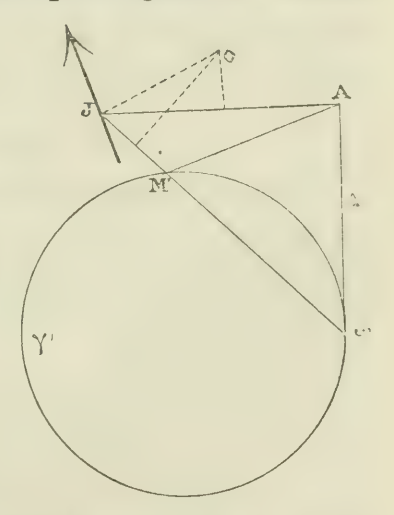
Prenons encore une courbe U et le rayon de courbure Aω, en un point A de cette courbe ; puis portons cette longueur, dans un sens déterminé, *sur la tangente* au point A. Nous obtenons ainsi un point J qui décrit une certaine courbe ζ que nous allons considérer.



Prenons deux points voisins J, J′ sur ζ et joignons Jω et J′ω′ ; les droites se coupent en un point M et le quadrilatère Mωαω′ est évidemment inscriptible ; soit γ le cercle circonscrit à ce quadrilatère. Observons aussi que l'égalité des angles

JMJ′, ωMω′, AαA′, JβJ′,

prouve que les quatre points J, J′ β, M appartiennent à un certain cercle Γ.



Cela posé, passons à la limite et supposons que la normale Δ′ vienne se confondre avec Δ. Le cercle γ devient le cercle de courbure γ′ à la développée, au point ω ; le point M a pour position limite le point M′, commun à γ′ et à ω J ; enfin le cercle Γ est représenté, à la limite, par le cercle circonscrit au triangle AM′J. Si l'on prend le point O, centre de ce cercle, la tangente cherchée (limite des droites JJ′) est la perpendiculaire à OJ, au point J.

(A suivre.)

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1885

Mathématiques spéciales.

Solution par M. E. Mosnat, professeur au Lycée de Toulon.

On donne une sphère S *et sur cette sphère un cercle* C *et un point* T.

1° Démontrer qu'il y a deux paraboloïdes passant par le cercle C *et tangents à la sphère au point* T ;

2° Démontrer que les axes de ces paraboloïdes sont dans un même plan et trouver le lieu de leur point d'intersection quand le point T *se meut sur la sphère ;*

3° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des sommets de ces paraboloïdes ;

4° Soient T *et* T' *deux points diamétralement opposés sur la sphère* S ; *au point* T *correspondent deux paraboloïdes* P *et* Q : *au point* T' *correspondent deux autres paraboloïdes* P' *et* Q'. *Trouver le lieu engendré par la courbe d'intersection de chacun des paraboloïdes* P *et* Q *avec chacun des paraboloïdes* P' *et* Q'. *quand on fait varier la direction du diamètre* TT'.

SOLUTION ANALYTIQUE

1° Prenons, pour axe des z, la droite OC qui joint les centres de la sphère S et du cercle C ; pour axes des x et des y, deux droites rectangulaires menées par O parallèlement au plan du cercle C. Les équations de la sphère et du plan du cercle seront alors

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$
$$z - h = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point T situé sur la sphère ; l'équation du plan tangent en ce point sera

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2 = 0.$$

Une surface du second ordre passant par le cercle C et tangente en T à la sphère S, peut être considérée comme ayant deux courbes planes communes avec cette sphère. Son équa-

tion est donc, en désignant par λ, un paramètre arbitraire,

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + 2(z - h)$$
$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2) = 0. \qquad (1)$$

Cette surface sera un paraboloïde, si les plans du centre sont parallèles à une même droite. Or, ces plans ont pour équations

$$\lambda x + (z - h)\, x_1 = 0,$$
$$\lambda y + (z - h)\, y_1 = 0,$$
$$\lambda z + (z - h)\, z_1 + xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2 = 0,$$

et les deux premiers sont parallèles à la direction

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{-\lambda};$$

le troisième sera parallèle à cette direction, si l'on a

$$\lambda^2 + 2\lambda z_1 - (R^2 - z_1^2) = 0.$$

Telle est la condition que doit vérifier le paramètre λ, pour que l'équation (1) représente un paraboloïde.

Cette équation du second degré en λ admet toujours deux racines réelles qui sont

$$\lambda' = - z_1 - R, \qquad \lambda'' = - z_1 + R,$$

ce qui nous prouve qu'il y a deux paraboloïdes P et Q répondant à la question. Les équations de ces paraboloïdes sont :

$$(z_1 + R)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - 2(z - h)$$
$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2) = 0 \qquad (P)$$
$$(z_1 - R)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - 2(z - h)$$
$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2) = 0. \qquad (Q)$$

Il importe de remarquer que l'on passe de l'une de ces équations à l'autre en changeant le signe de R. Tous les calculs faits pour l'un des paraboloïdes s'appliqueront à l'autre, en changeant R en — R.

2° Cherchons l'axe du paraboloïde P. Nous savons que cet axe est le diamètre conjugué du plan perpendiculaire à la direction des diamètres :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1 + R}.$$

Ses équations sont donc

$$\frac{f'x}{x_1} = \frac{f'y}{y_1} = \frac{f'z}{z_1 + R}$$

ou

$$= \frac{(z_1 + R)\,x - (z - h)\,x_1}{x_1} = \frac{(z_1 + R)\,y - (z - h)\,y_1}{y_1}$$

$$= \frac{(z_1 + R)\,z - (z - h)\,z_1 - (xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2)}{z_1 + R}$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{R\,(2z - h) - (xx_1 + yy_1 - R^2)}{(z_1 + R)^2}.$$

Les équations de l'axe du paraboloïde Q s'obtiennent en changeant le signe de R, ce qui donne :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{-R(2z - h) - (xx_1 + yy_1 - R^2)}{(z_1 - R)^2}.$$

Ces deux axes sont contenus dans le plan ayant pour équation

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$$

c'est-à-dire dans le plan passant par l'axe des z et le point T.

Supposons que le point T soit dans le plan des zy, l'axe du paraboloïde P sera dans ce plan et aura pour équation

$$\frac{x}{x_1} = \frac{R(2z - h) - (xx_1 - R^2)}{(z_1 + R)^2},$$

ou, en chassant les dénominateurs et en simplifiant,

$$2x(z_1 + R) - z_1(2z + R - h) = o.$$

L'axe du paraboloïde Q aura pour équation, dans ce plan,

$$2x(z_1 - R) - x_1(2z - R - h) = o.$$

On peut observer que la première droite passe par le point fixe D $\left(x = o,\ \ z = \frac{h - R}{2}\right)$, lorsque T varie sur le grand cercle de S situé dans le plan zx. Dans les mêmes conditions, la seconde droite passe par le point D′ $\left(x = o \quad z = \frac{h + R}{2}\right)$. Ces points sont situés sur OC et sont les milieux des portions CB, CB′ de ce diamètre.

Le lieu du point de rencontre des axes, lorsque T décrit le cercle précédent, s'obtient en éliminant x_1 et z_1 entre les deux équations des axes et la suivante : $x_1^2 + z_1^2 = R^2$.

Retranchons, membre à membre, les équations des axes,

nous aurons

$$4Rx - 2Rx_1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x_1 = 2x.$$

Portons cette valeur de x_1 dans la première de ces équations, et divisons par $2x$, quantité qui n'est pas nulle, en général ; il nous viendra, en simplifiant,

$$z_1 = 2z - h.$$

Le lieu cherché a donc pour équation

$$(2x)^2 + (2z - h)^2 - R^2 = 0$$

ou

$$x^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0.$$

C'est un cercle ayant pour centre le milieu de OC et pour rayon la moitié de celui de la sphère.

Pour obtenir le lieu du point de rencontre des axes, lorsque le point T décrit la sphère S, il suffit de faire tourner le plan zx de 360° autour de oz. Le lieu cherché est alors engendré par la révolution complète du cercle précédent autour de oz. Ce lieu est une sphère ayant même centre et même rayon que le cercle considéré. Son équation est

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0.$$

3° Pour chercher le lieu des sommets du paraboloïde P, nous supposerons que le point T se déplace d'abord dans le plan zx. Ce lieu s'obtiendra en éliminant x_1 et z_1 entre les équations :

(1) $(z_1 + R)(x^2 + z^2 - R^2) - 2(z - h)(xx_1 + zz_1 - R^2) = 0,$

(2) $$(z_1 + R)x - x_1\left(z + \frac{R - h}{2}\right) = 0,$$

(3) $$x_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0.$$

Les équations (3) et (2) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{x_1}{R + z_1} = \frac{R - z_1}{x_1} = \frac{x}{z + \dfrac{R - h}{2}},$$

d'où l'on tire :

$$x_1 = \frac{2Rx\left(z + \dfrac{R - h}{2}\right)}{\left(z + \dfrac{R - h}{2}\right)^2 + x^2}; \qquad z_1 = R\,\frac{\left(z + \dfrac{R - h}{2}\right)^2 - x^2}{\left(z + \dfrac{R - h}{2}\right)^2 + x^2}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (1) et simplifions ; il vient :

$$(4) \qquad \left(z+\frac{R-h}{2}\right)^2(x^2+z^2-R^2)-(z-h)$$
$$\left[x^2(z-h)+(z-R)\left(z+\frac{R-h}{2}\right)^2\right]=0,$$

ou, encore,

$$x^2\left(z+\frac{R-3h}{4}\right)+(z-R)\left(z+\frac{R-h}{2}\right)^2=0.$$

Cette équation représente une courbe C^3 du 3e ordre, symétrique par rapport à l'axe des z, et asymptote à la droite $z=\frac{3h-R}{4}$. Cette droite rencontre l'axe des z au milieu de CD, car on a

$$\frac{3h-R}{4}=\frac{h+\frac{h-R}{2}}{2}.$$

La courbe C^3 est comprise entre son asymptote et la droite $z=R$, elle passe par les points cycliques et par les points du cercle C situés dans le plan zx. Le point D $\left(z=\frac{h-R}{2}\right)$ est un point double isolé.

Le lieu des sommets des paraboloïdes P, lorsque le point T décrit la sphère, est la surface de révolution obtenue en faisant tourner cette courbe autour de oz.

L'équation de cette surface est

$$(x^2+y^2)\left(z+\frac{R-3h}{4}\right)+(z-R)\left(z+\frac{R-h}{2}\right)^2=0.$$

Le lieu des sommets des paraboloïdes Q s'obtient en changeant le signe de R dans l'équation précédente. C'est une surface de révolution de même forme que la précédente et dont la méridienne a pour équation

$$x^2\left(z-\frac{R+3h}{4}\right)+(z+R)\left(z-\frac{R+h}{2}\right)^2=0.$$

Cette courbe du troisième degré D^3 symétrique par rapport à l'axe des z, est comprise entre les droites $z=-R$, $z=\frac{R+3h}{4}$.

Cette dernière droite coupe l'axe des z au milieu de CD': elle est asymptote à D^3. La courbe passe aussi par les points cycliques et admet le point D' $\left(x = 0,\ z = \frac{R + h}{2}\right)$ pour point double isolé.

4° Les équations des paraboloïdes P' et Q' correspondant au point T', diamétralement opposé de T, s'obtiennent en changeant x_1, y_1, z_1 en x_1, $-y_1$, $-z_1$, ce qui donne :

$$(-z_1 + R)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + 2(z - h)$$
$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 + R^2) = 0 \qquad P'$$
$$-(z_1 + R)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + 2(z - h)$$
$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 + R^2) = 0 \qquad Q'$$

Pour obtenir le lieu engendré par la courbe d'intersection des deux paraboloïdes P et P', lorsque la direction TT' varie, nous ajoutons, membre à membre, les équations de P et P'; il vient, en divisant par 2R,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + 2R(z - h) = 0.$$

Ce lieu est donc une sphère passant par le cercle C et ayant pour centre le point B $(o, o, -R)$.

L'intersection des deux paraboloïdes Q et Q' engendre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2R(z - h) = 0,$$

dont le centre est le point B' (o, o, R) et qui passe aussi par le cercle C.

En ajoutant les deux premiers membres des équations P et Q', il vient

$$4R^2(z - h) = 0,$$

ce qui montre que le lieu de la courbe d'intersection de ces paraboloïdes se compose du cercle C et du plan de l'infini.

Il en est de même de l'intersection des paraboloïdes P' et Q.

Nous allons maintenant reconnaître les résultats précédents, par des considérations géométriques.

(A suivre.)

QUESTION D'EXAMEN

1. — *Le nombre des solutions positives de l'équation*

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

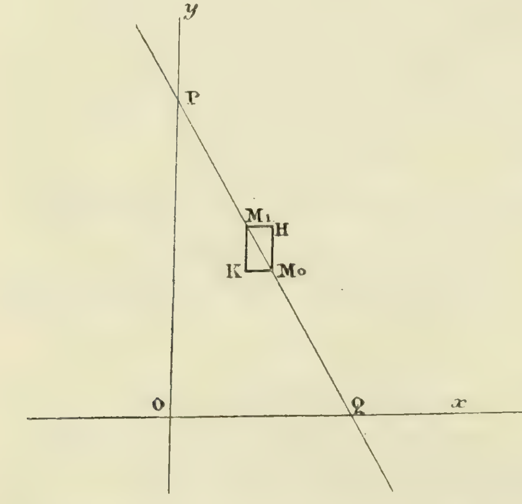
dans laquelle a, b, c, *désignent trois nombres positifs est égal au nombre des unités renfermées dans le rapport* $\frac{c}{ab}$; *ou égal à ce nombre augmenté de l'unité.*

En effet, les formules de résolution sont, comme l'on sait :

$$x = x_0 - bt, \ y = y_0 + at ;$$

dans les égalités, x_0 y_0 désignent une première solution entière et t représente un entier arbitraire.

Considérons la droite D qui correspond à l'équation (1) ; elle coupe les axes de coordonnées que nous supposerons d'ailleurs rectangulaires en deux points P et Q et l'on a



$$\overline{PQ}^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}$$

$$= \frac{c^2}{a^2b^2}(a^2 + b^2),$$

d'où

$$PQ = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Soit N_0 le point qui correspond à la solution première x_0, y_0. Pour avoir la solution voisine il faut prendre $M_0H = a$, et $M_0K = b$; les parallèles aux axes de coordonnées menées par les points H et K se coupent sur PQ en un point M_1 et l'on a

$$\overline{M_1M_0}^2 = a^2 + b^2,$$

ou

$$M_1M_0 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a donc

$$\mathrm{PQ} = \frac{c}{ab}\,\mathrm{M_1M_0}.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{M_0M_1} = \theta,$$

on aura

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M_0P} &= u\theta + \alpha, \quad (o \leq \alpha < \theta) \\ \mathrm{M_0Q} &= v\theta + \beta, \quad (o \leq \beta < \theta). \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

D'après cela, le nombre des segments de longueur θ compris entre les points P et Q est égal à $u + v$ et le nombre des points marqués sur PQ, points auxquels correspondent des solutions entières, est $u + v + 1$. Le nombre des solutions positives de l'équation proposée est donc égal à $u+v+1$.

D'autre part, si l'on a

$$\mathrm{PQ} = \mu\theta + \gamma, \quad (o \leq \gamma < \theta), \qquad (2)$$

la comparaison des formules (1) et (2) prouve que l'on a

$$u + v = \mu,$$

ou, dans d'autres cas,

$$1 + u + v = \mu,$$

suivant que $\alpha + \beta$ est compris entre zéro et θ, ou entre θ et 2θ.

Concluons donc que le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$ax + by = c \qquad (a,\ b,\ c \text{ positifs})$$

est égal, suivant les cas, au plus grand entier contenu dans $\frac{c}{ab}$, ou à ce nombre augmenté de l'unité.

Ce théorème dû à Paoli est connu depuis longtemps (*), la démonstration précédente, remarquable par son extrême simplicité, est due à M. Ed. Lucas (**). Le cas général est celui où l'on demande le nombre des solutions positives de l'équation

$$ax + by + cz + \ldots + lt = \alpha,$$

dans laquelle $a, b, c, \ldots l, \alpha$ désignent des nombres entiers positifs; $x, y, z, \ldots t$ représentant les inconnues.

(*) Voyez *Exercices d'analyse numérique*, par A. Le Besgue; 1859, p. 52.

(**) Voyez *Arithmétique de Cesaro;* lettres à M. Hermite.

Euler s'est occupé de cette question et rapporte la solution à la règle dite *Regula cœci* qu'il a nommée aussi *Regula virginum* (*).

(A suivre.) (G. L.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. VIGARIÉ, *élève externe à l'École des Mines, sur le triangle arithmétique de Pascal.*

Dans son traité général des nombres, Nicolo Tartaglia (1500-1559) a tracé la figure suivante (voir l'*Histoire des Mathématiques* de Ferdinand Hœfer, p. 342) pour montrer la formation successive des coefficients des diverses puissances du binôme à partir de la deuxième.

2
3 3
4 6 4
5 10 10 5
6 15 20 15 6
7 21 35 35 21 7
8 28 56 70 56 28 8
9 36 84 126 126 84 36 9
. . . .

Cette table se construit facilement. Elle donne le triangle arithmétique de Pascal avec beaucoup plus de symétrie que celle qui est généralement employée.

ÉCOLE CENTRALE (OCTOBRE 1885)

Géométrie analytique.

On donne dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires, OX, OY et une droite AB définie par son coefficient angulaire m et son ordonnée à l'origine b, et l'on demande :

(*) Le Besgue, *loc. cit.*, p. 77. Voyez aussi sur ce sujet : Terquem; *Nouvelles Annales*, janvier 1859, et Sylvester, *Philosophical Magazine*, nov. 1858.

1° De trouver la direction des diamètres des paraboles tangentes à l'axe des Y au point B où il est coupé par la droite AB, et ayant leurs foyers sur cette dernière droite.

2° D'écrire l'équation générale de ces courbes.

3° De construire le lieu de leurs sommets.

4° De construire le lieu des points où leurs tangentes sont parallèles à OX.

5° De construire le lieu des pôles de l'axe des X relativement aux paraboles considérées (en d'autres termes, par les deux points d'intersection de chaque parabole avec l'axe des X, on mène des tangentes à la courbe, et on demande de trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes).

Triangle.

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés :

$$a = 2543^{m},430$$
$$b = 2332^{m},751$$
$$c = 2597^{m},808.$$

Épure.

Construire les *projections* et le *développement* de la partie de la *surface des deux nappes* d'un cône de révolution comprise entre la surface d'un cube et celle de la sphère inscrite dans ce cube; le cube et la sphère sont supposés transparents.

Le cube dont le côté a $0^{m}100$, est situé dans le dièdre antérieur supérieur, et deux de ses faces sont dans les plans de projection.

Le cône a son sommet au point le plus haut de la sphère inscrite, son axe est parallèle à la ligne de terre, et son angle au sommet est de 120°.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque des projections et des développements des lignes d'intersection et les tangentes en ces points.

Ces constructions seront *succinctement* expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersections de surfaces.

Placer la ligne de terre à égale distance des grands côtés de la feuille, et les projections du centre du cube à $0^{m}100$, du bord de gauche du cadre.

CHOIX DE QUESTIONS ORALES

POSÉES AU CONCOURS POUR L'ÉCOLE DE SAINT-ÉTIENNE EN 1885

Trouver la vraie valeur de $x\mathrm{L}x$ quand x tend vers zéro (sans employer la règle de l'Hôpital).

— Que pensez-vous de la série suivante?

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \text{———} + \frac{x^n}{n^n} + .$$

— Lieu des sommets des paraboles dont on donne un point et le point de rencontre des directrices et des axes.

— Lieu enveloppe du côté d'un angle droit dont l'autre côté passe par un point fixe et dont le sommet s'appuie sur une droite fixe.

— Fonction primitive de $\dfrac{1}{x^2 - 3}$.

— Quand la courbe représentée par

$$y = \sqrt{\frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x^\alpha + mx^{\alpha - 1}}}$$

a-t-elle des asymptotes obliques à l'axe oy^2.

— Variations de $y = x^x$ x allant de o à ∞.

— Etablir directement la dérivée de

$$y = \text{arc tg } x^x.$$

— Construire $\omega = \dfrac{\rho^2 - 2\rho + 1}{\rho + 1}$.

— Construire $x^2 - y^2 + 2xy - x - y = 0$. *(A suivre.)*

QUESTIONS PROPOSÉES

187. — Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = \log x + \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien.

188. — Même question, l'équation de la courbe étant

$$y = \log x + \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$ *(S. Realis).*

NOTA. — La question 77, dont une solution a paru dans le numéro de Décembre dernier, a été résolue par MM. Léon Clément, du lycée de Rouen; Amaury de Kerdrel, du lycée de Brest, et Henri Ferval, élève du lycée Henri IV classe de M. Macé de Lépinay).

NOTA. — L'abondance des matières nous oblige à reporter au prochain numéro un article bibliographique que nous avons consacré au livre que M. Kœhler vient de faire paraître chez Gauthier-Villars, et qui a pour titre; *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure.* Mais nous voulons pourtant signaler dès maintenant ce livre à nos lecteurs.

Le numéro en question contiendra aussi les matières et leçons qui forment le programme du concours de l'agrégation pour 1886, ce document nous ayant été demandé de divers côtés. G. L.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 29020-5.

LA PREMIÈRE LEÇON DE CALCUL INTEGRAL

Par M. **G. de Longchamps**.

(*Suite*, voir p. 3.)

Théorème II. — *La limite de la fonction* U *est indépendante du nombre et de la loi des moyens insérés dans l'intervalle donné* x_0, X.

Cet énoncé sous-entend pourtant : 1° que le nombre des moyens augmente indéfiniment; 2° que l'intervalle entre deux moyens consécutifs quelconques tend vers zéro.

Soit

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ x_p,\ X, \qquad (A)$$

une première suite

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_p < X.$$

A cette suite correspond une fonction U :

$$U \equiv (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1)\ \ldots + (X - x_p)f(x_p).$$

Prenons maintenant une deuxième suite

$$x_0,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_q,\ X, \qquad (B)$$

$$x_0 < \theta_1 < \theta_2\ \ldots < \theta_q < X,$$

et soit V la fonction correspondante :

$$V \equiv (\theta_1 - x_0)f(x_0) + (\theta_2 - \theta_1)f(\theta_1) + \ldots + (X - \theta_q)f(\theta_q).$$

Je suppose maintenant que l'on considère la suite des moyens x, θ et qu'on les range par ordre de grandeur croissante, ce qui donne une troisième suite

$$x_0,\ \theta_1,\ x_1,\ \ldots\ x_t,\ \theta_i,\ \theta_{i+1},\ x_{t+1}\ \ldots\ \theta_q,\ X. \qquad (C)$$

A cette suite correspond encore une fonction W :

$$W \equiv (\theta_1 - x_0)f(x_0)\ \ldots + (X - \theta_q)f(\theta_q)$$

que nous allons comparer successivement à U et à V.

Supposons qu'entre x_t et x_{t+1} il n'y ait aucun moyen θ; dans ce cas, les termes correspondants de U et de W disparaissent.

Mais, en général, nous rencontrerons, dans cet intervalle, un ou plusieurs moyens θ ; de telle sorte que dans la suite (C) nous trouverons

$$\ldots\ x_t,\ \theta_i,\ x_{t+1}\ \ldots \qquad (1)$$

ou

$$\ldots x_t,\ \theta_i,\ \theta_{i+1},\ x_{t+1}\ \ldots \qquad (2)$$

etc.

Comparons les suites U et W dans l'intervalle de x_t à x_{t+1}.

Nous avons, dans l'hypothèse (1),

$$U = \ldots (x_{t+1} - x_t) f(x_t) \ldots$$

$$W = \ldots (\theta_i - x_t) f(x_t) + (x_{t+1} - \theta_i) f(\theta_i) \ldots$$

Observons que le terme mis en évidence dans U peut s'écrire

$$\left\{ (x_{t+1} - \theta_i) + (\theta_i - x_t) \right\} f(x_t).$$

Dans la différence W — U nous rencontrerons donc le terme A_t,

$$A_t = (x_{t+1} - \theta_i) \left\{ f(\theta_i) - f(x_t) \right\}$$

et nous avons, par conséquence,

$$A_t < (x_{t+1} - x_t) \left\{ f(\theta_i - f(x_t) \right\}$$

et, *à fortiori*,

$$A_t < (x_{t+1} - x_t) \left\{ f(x_{t+1}) - f(x_t) \right\}.$$

Prenons maintenant l'hypothèse qui correspond au groupement (2). Nous avons alors

$$W = \ldots (\theta_i - x_t) f(x_t) + (\theta_{i+1} - \theta_i) f(\theta_i) + (x_{t+1} - \theta_{i+1}) f(\theta_{i+1}) + \ldots$$

D'autre part, U peut s'écrire

$$U = \ldots (\theta_i - x_t + \theta_{i+1} - \theta_i + x_{t+1} - \theta_{i+1}) f(x_t) \ldots$$

Dans la suite W — U entre x_t et x_{t+1} se trouvent des termes dont nous désignerons l'ensemble par B_t; en posant

$$B_t = (\theta_{i+1} - \theta_i)[f(\theta_i) - f(x_t)] + (x_{t+1} - \theta_{i+1})[f(\theta_{i+1} - f(x_t)].$$

La fonction étant croissante, nous pouvons écrire

$$B_t < (\theta_{i+1} - \theta_i + x_{t+1} - \theta_{i+1}) \{ f(\theta_i) - f(x_t) \},$$

ou

$$A_t < (x_{t+1} - \theta_i) \{ f(\theta_i) - f(x_t) \}$$

et, *à fortiori*

$$B_t < (x_{t+1} - x_t) \{ f(x_{t+1}) - f(x_t) \}.$$

Le raisonnement précédent est évidemment général et peut se répéter tout le long du développement de la fonction

W — U, quel que soit le nombre des moyens θ qui se trouvent placés entre deux autres moyens x consécutifs.

Nous avons donc :

$$W - U < \Sigma (x_{i+1} - x_i)\{f(x_{i+1}) - f(x_i)\}.$$

Il est maintenant facile de conclure.

Si nous désignons par ε la plus grande des différences

$$f(x_1) - f(x_0) \ldots f(x_{i+1}) - f(x_0) \ldots$$

nous avons, *à fortiori*,

$$W - U < \varepsilon (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 \ldots - X - x_p),$$

ou

$$W - U < \varepsilon (X - x_0).$$

et finalement

$$\lim (W - U) = 0.$$

Nous pourrions démontrer de même, par la comparaison des fonctions V et W, que

$$\lim (V - W) = 0;$$

concluons donc que

$$\lim U = \lim V \text{ (*)}.$$

(A suivre.)

(*) Dans une note accompagnant le commencement du présent article (*Journal*, p. 3) j'ai dit que dans tous les traités de géométrie élémentaire *la définition générale de l'aire d'une courbe n'était pas abordée et* JUSTIFIÉE. Comme on me l'a fait observer, cette assertion est trop exclusive et elle ne concerne pas notamment le *Traité de Géométrie* de M. Vacquant que j'avais lu, alors, incompletement. On trouve en effet (p. 526 et suivantes) une exposition rigoureuse, d'après une méthode due à M. Tannery, de la définition de la longueur d'un arc de courbe plane ou gauche et celle des aires des surfaces planes limitées par des contours curvilignes, avec les justifications nécessaires.

A propos du même article, nous avons reçu une lettre de M. Catalan, qui nous demande une rectification portant sur la *priorité* à laquelle il croit avoir droit, relativement à l'introduction, dans l'enseignement et dans ses ouvrages, d'une définition rigoureuse de l'aire des surfaces planes à contours curvilignes et il nous renvoie, dans ce but, à son *Traité de Géométrie* dont la première édition a paru en 1843. Il est vrai, ajoute M. Catalan dans la lettre à laquelle nous faisons allusion, que j'ai avoué mon impuissance à démontrer que *la limite est indépendante du moyen de décomposition*. Mais, il nous semble que c'est précisément là le point délicat; et la définition donnée n'est justifiée que s'il est complètement et rigoureusement établi. M. Catalan n'en a pas moins le grand mérite, si la priorité qu'il réclame est exacte, comme je le crois, d'avoir le premier soulevé ces intéressantes questions portant sur la définition de la longueur des arcs et sur celle des aires limitées par des courbes, et de les avoir résolues; sauf le point (mais encore une fois il est essentiel) qu'il avait réservé.

SUR LE POINT DE STEINER

Par **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège

(*Suite*, voir p. 6.)

4. — M étant un point quelconque du plan $A_1A_2A_3$, les symétriques des droites A_1M, A_2M, A_3M par rapport aux bissectrices des angles A_1, A_2, A_3 du triangle fondamental concourent en un même point M', dont les coordonnées normales sont inversement proportionnelles à celles de M. Les points M et M', qui sont les foyers d'une même conique inscrite à $A_1A_2A_3$, sont appelés *conjugués isogonaux*, ou *inverses*, ou *confocaux* (*).

L'équation (1) exprime que le point $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right)$ est situé sur la droite (L_1, L_2, L_3), qui est la polaire trilinéaire du point $\left(\frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{L_3}\right)$. Donc toute conique circonscrite au triangle de référence est la transformée isogonale de la polaire trilinéaire du point conjugué isogonal avec le pôle d'homologie de la conique.

En particulier, la circonférence $A_1A_2A_3$ est la transformée isogonale de la droite à l'infini, et l'ellipse E celle de la droite k. Par conséquent, *le point de Steiner est conjugué isogonal avec le point situé à l'infini sur* k.

Autrement dit, *le point de Steiner est le foyer de la parabole inscrite au triangle* $A_1A_2A_3$, *qui a pour directrice la perpendiculaire abaissée de* H *sur la droite* ~~OK~~ k; ou encore, *la droite de Simson du point de Steiner par rapport au triangle* $A_1A_2A_3$ *est parallèle au diamètre* OK *du cercle de Brocard* (**).

Cette propriété a des corollaires importants. Soient B_1, B_2 B_3

(*) La transformation isogonale a été étudiée par M. Mathieu (*loc. cit.*), par M. Schoute (*Bulletin de Darboux* et *Archives néerlandaises*), etc.

(**) Théorème dû à M. Boubals. Voir *Journal de Bourget et de Longchamps, mathématiques spéciales*, 1885, p. 33.

les sommets du *premier triangle de Brocard*, ou les projections de K sur les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés de $A_1A_2A_3$; et soient r_1, r_2, r_3 les projections de R sur ces côtés. Si l'on compare les quadrilatères inscriptibles $Rr_1A_3r_2$, OB_1KB_2, on trouve facilement que les droites RA_3 et B_1B_2 sont parallèles. Par conséquent :

1° *Les parallèles menées par* A_1, A_2, A_3, *aux côtés correspondants du premier triangle de Brocard concourent au point de Steiner* R; *les perpendiculaires abaissées de* A_1, A_2, A_3, *sur les mêmes côtés se rencontrent au point* N *diamétralement opposé à* R *sur la circonférence* O (Tarry et Brocard, Congrès de Rouen); 2° *les bissectrices des angles formés par les côtés homologues des triangles inversement semblables* $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ *sont parallèles aux axes de l'ellipse* E; 3° *le point de Lemoine du triangle* $A_1A_2A_3$ *est le point de Steiner du triangle* $B_1B_2B_3$.

5. — Lorsque deux points M et N sont tels que les droites A_1M et A_1N, A_2M et A_2N, A_3M et A_3N rencontrent les côtés du triangle de référence en des points M_1 et N_1, M_2 et N_2, M_3 et N_3 qui sont symétriques par rapport aux milieux P_1, P_2, P_3 de ces côtés, nous dirons que ces points sont conjugués isotomiques ou sont réciproques par rapport au triangle $A_1A_2A_3$ (*). Les coordonnées barycentriques de N sont inversement proportionnelles à celles de M.

De là résulte l'interprétation suivante de l'équation (1) :

Toute conique U circonscrite au triangle fondamental $A_1A_2A_3$ *a pour transformée par points réciproques la polaire trilinéaire du réciproque de son pôle d'homologie.*

En particulier, l'ellipse E est la transformée isotomique de la droite à l'infini; c'est-à-dire, si M est un point de cette courbe et N le réciproque de M, les droites A_1N, A_2N, A_3N sont parallèles. Or ces droites sont aussi parallèles à celles qui joignent les milieux P_1, P_2, P_3 des côtés de $A_1A_2A_3$ aux milieux Q_1, Q_2, Q_3 des droites A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, et d'après un théorème de Newton, le centre de la conique qui touche

---

(*) La transformation par points réciproques et par transversales réciproques a été étudiée par M. de Longchamps (*Annales de l'École normale supérieure*, t. III, pp. 321-340).

les côtés de $A_1A_2A_3$ aux points M_1, M_2, M_3, est à l'intersection des droites P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 qui joignent les milieux des diagonales des quadrilatères circonscrits $A_1A_2M_1A_3$, $A_3M_2A_1A_2$, $A_1M_3A_2A_3$. Donc *l'ellipse* E *est le lieu du pôle d'homologie d'une parabole inscrite à* $A_1A_2A_3$, *et le point à l'infini sur l'axe de la parabole est le conjugué isogonal du pôle d'homologie* (*).

La transformée isotomique du cercle $A_1A_2A_3$ est la polaire trilinéaire du point D où se coupent les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Cette polaire est perpendiculaire à la droite OG ; car le cercle, sa transformée isotomique et la polaire de G par rapport au cercle ont pour équations en coordonnées barycentriques :

$$\Sigma\, a_1^2 \mu_2 \mu_3 = 0, \qquad \Sigma\, a_1^2 \mu_1 = 0, \qquad \Sigma\, a_1^2 (\mu_2 + \mu_3) = 0,$$

et la somme des deux dernières équations donne l'équation de la droite à l'infini.

On conclut de là que *le point de Steiner est le conjugué isotomique du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à* OG; *ou encore, les points* R_1, R_2, R_3 *sont les points de contact des côtés du triangle* $A_1A_2A_3$ *avec une parabole qui a pour directrice la droite* HGO. *Cette parabole est l'enveloppe de la polaire trilinéaire d'un point mobile sur la droite* GK (**).

(A suivre.)

(*) Ce théorème, peu connu, a été démontré autrement par Steiner. (*Gesammelte Werke*, t. I, p. 199, et *Annales de Gergonne*, t. XIX, § 10 de l'article *Développement d'une série*, etc.)

(**) GK est la polaire trilinéaire du pôle d'homologie R de la parabole. Son foyer F est le pôle trilinéaire de la droite OK. En effet, les coordonnées barycentriques du foyer à l'infini sont inverses de celles de R ; par suite, ses coordonnées normales sont proportionnelles à $\dfrac{a_2^2 - a_3^2}{a_1}$, ..., et celles de F le sont aux quantités $\dfrac{a_1}{a_2^2 - a_3^2}$, ..., ou à

$$\frac{1}{\sin(A_2 - A_3)}, \qquad \frac{1}{\sin(A_3 - A_1)}, \qquad \frac{1}{\sin(A_1 - A_2)}.$$

D'autre part, l'équation de OK est

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ \cos A_1 & \cos A_2 & \cos A_3 \end{vmatrix} = \Sigma\, \delta_1 \sin(A_2 - A_3) = 0.$$

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1885

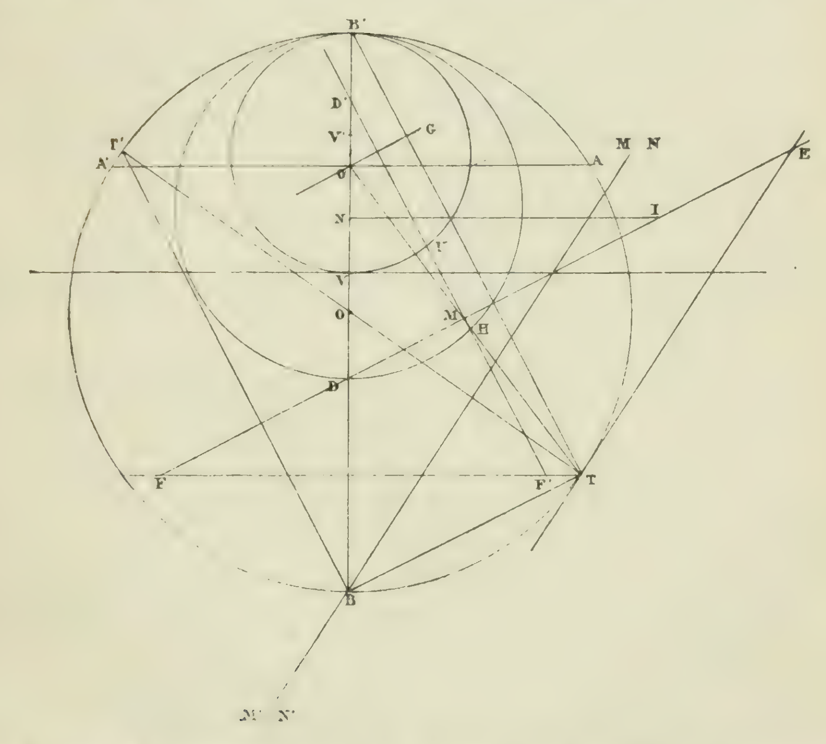
Mathématiques spéciales.

Solution par M. E. MOSNAT, professeur au Lycée de Toulon.

(*Suite*, voir p. 14.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

1° Supposons qu'on ait trouvé un paraboloïde passant par le cercle de centre C et tangent en T à la sphère S de centre O ; le plan TCO perpendiculaire aux deux plans



cycliques et passant par le centre des sections circulaires sera un plan principal de la surface.

Ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle O, le cercle C suivant une corde AA′, le plan tangent à la sphère en T suivant une droite TE et le paraboloïde suivant une parabole passant par les points A, A′ et tangente en T à TE.

Proposons-nous de déterminer cette parabole. Remarquons, d'abord, que les droites AA′, TE, coupant la parabole en des points par lesquels on peut faire passer un cercle, sont également inclinées sur l'axe; ce qui prouve que l'axe est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle de ces deux droites ou à l'une des droites TB, TB′, obtenues en joignant le point T aux extrémités du diamètre OC.

Supposons que l'axe soit parallèle à TB et menons par le point C une parallèle à cette droite qui rencontre la parabole p en Q. La tangente à p en ce point est parallele à AA′, puisque CG est le diamètre conjugué de AA′; mais, cette tangente étant symétrique de TE par rapport à l'axe, le point G est symétrique de T par rapport à l'axe. Ce point G se trouve donc sur TB′; l'axe coupe TB′ au point H, milieu de TG, et le diamètre OC au point D, milieu de BC. Ainsi, on obtient l'axe de la parabole p, en menant par le milieu de BC une parallèle à TB. Cet axe coupe la tangente en E, et le milieu I de la sous-tangente HE sera le sommet de la parabole. La parallèle à AA′ menée par T sera le rayon vecteur du point T, puisqu'elle est symétrique de la tangente TE par rapport à l'axe; elle coupera l'axe DE en un point F qui sera le foyer de la parabole.

On voit donc qu'il existe une seule parabole p répondant à la question et dont l'axe soit parallèle à TB.

On trouverait de même les éléments d'une parabole q passant par A et A′, tangente en T à TE et dont l'axe est parallèle à TB.

Cela posé, on peut déterminer un paraboloïde P et un seul en admettant p pour parabole principale et passant par le cercle C.

En effet, par un point K de cette parabole menons une perpendiculaire au plan principal et faisons passer par cette droite un plan qui y rencontre p en un second point K′, et le cercle C en deux points L et L′. Le paraboloïde sera coupé suivant une conique déterminée ayant pour axe KK′ et passant par LL′; si on fait tourner ce plan autour de la perpendiculaire, la conique engendrera le paraboloïde.

On peut, de même, déterminer le paraboloïde Q passant

par la parabole q et par le cercle C. Ainsi il est bien démontré que l'on peut trouver deux paraboloïdes P et Q, répondant à la question.

2° Ces paraboloïdes ont mêmes axes que leurs paraboles principales. Ces axes sont les droites DF, D'F' situées dans un même plan passant par OC et par le point T.

Ces droites se coupent à angle droit en M et passent par des points fixes D et D'; le lieu du point M, lorsque T décrit le cercle O, est donc la circonférence de diamètre DD'.

Si T décrit la sphère S, il suffira de faire tourner le cercle O ou la circonférence DD', autour de OC; on obtiendra pour le lieu une sphère de diamètre DD', ayant pour centre le milieu de OC et pour rayon la moitié de celui de la sphère S.

3° Cherchons le lieu des sommets du paraboloïde P, lorsque le point T décrit le cercle O.

Abaissons, du sommet I, la perpendiculaire sur BB' qui rencontre cette droite en N et B'T au point U. Les triangles semblables IHU, HTE montrent que l'on a $UH = \frac{TH}{2}$. Menons, par le point U, la parallèle à DH et BT qui rencontre BB' en V, on aura

$$\frac{VD}{UH} = \frac{BD}{HT} \quad \text{d'où} \quad VD = \frac{BD}{2} = \frac{CD}{2}.$$

Ce point V est donc le milieu de DC.

Décrivons une circonférence sur VB, comme diamètre, et supposons que le point U se déplace sur cette circonférence, le point I d'intersection des deux droites NU, DH engendrera la courbe cherchée. Cette courbe passe par le point B', admet la tangente à la circonférence en OV comme asymptote et est située au-dessus de cette droite. On peut ainsi construire la courbe trouvée analytiquement. Les mêmes raisonnements s'appliquent au lieu des sommets de Q.

Les deux courbes trouvées engendrent, en tournant autour de OZ des surfaces de révolution qui sont les lieux des sommets de P et de Q lorsque T décrit la sphère S.

4° Les paraboloïdes P'Q' correspondant au point T' diamétralement opposé de T ont leurs paraboles principales p', q' dans le plan TCT' et leurs axes sont parallèles, respective-

ment, à ceux de Q et de P. Cherchons l'intersection des paraboloïdes P et P′ dont les axes passent par le point D. Menons par le point B la parallèle aux tangentes en T et T et soient M,M′ les points d'intersection de cette droite avec la parabole p, N et N′ les points analogues pour p'. Les deux segments MM′, NN′ ont leurs milieux en B, car les droites TB, T′B étant parallèles aux axes de p et de p' sont des diamètres. Faisons maintenant passer un cercle γ par les points AA′, MM′, ce qui est possible puisque les droites AA′, MM′ sont également inclinées sur l'axe de p. Ce cercle aura son centre en B. Faisons de même passer un cercle par les points AA′, NN′, il aura aussi son centre en B. Il se confondra donc avec le cercle γ.

Le plan perpendiculaire au cercle O, mené par MM′, est parallèle au plan tangent à la sphère en T; il coupe chacun des paraboloïdes suivant un cercle de diamètre MM′. L'intersection des paraboloïdes P, P′ se compose donc du cercle C et du cercle MM′.

Si le point T décrit le cercle O, le cercle de diamètre MM dont le centre est en B décrit toute la sphère dont γ est un grand cercle.

Si le point T décrit toute la sphère S, on obtient la même sphère. Ainsi le lieu des courbes d'intersection de P et de P′ est la sphère de centre B, passant par le cercle C. On trouve, de même, que le lieu des courbes d'intersection de Q et Q′ est la sphère de centre B′ passant par le cercle C.

Enfin, les paraboloïdes P et Q′ ou P′ et Q ont leurs axes parallèles et leur intersection se compose du cercle C et d'une courbe à l'infini, et le lieu de leur intersection se compose du cercle C et du plan de l'infini.

Note. — On peut observer que le problème se ramène à un problème plan, et qu'il peut se résoudre au moyen des propriétés suivantes :

1° Les couples de cordes communes à une conique et à un cercle ont pour bissectrices des parallèles aux axes de la conique ;

2° Les quatre points communs à une parabole et à un cercle

ont pour centre des moyennes distances un point de l'axe de la parabole ;

3° Les quatre points communs à deux paraboles sont sur un cercle, quand les axes des courbes sont rectangulaires.

I et II. — Il y a deux paraboles passant par les points A et A' et tangentes au cercle en T; leurs axes sont parallèles aux bissectrices TB et TB' de l'angle $\widehat{ATA'}$ (première propriété), et se coupent au milieu M de CT (deuxième propriété). — Donc le lieu de M est le cercle décrit sur DD' comme diamètre, D étant le milieu de CB et D' le milieu de CB'.

III. — Le sommet de l'une des paraboles est le milieu I de EH; soit $DB = a$, $DB' = a'$, $DI = \rho$, $\widehat{B'DI} = \omega$.

On a :

$$DI = DH + \frac{HE}{2}; \quad DH = a' \cos \omega; \quad HE = H\ T \operatorname{tg}\omega,$$

car

$$\omega = \widehat{HTE},$$
$$HT = a \sin \omega.$$

L'équation du lieu est donc

$$\rho = a' \cos \omega + a \sin \omega \operatorname{tg} \omega.$$

On trouverait de même le lieu du sommet de la seconde parabole.

IV. — Les axes des quatre paraboles relatives à deux points diamétralement opposés T et T' forment un rectangle dont l'une des diagonales est DD'. — Considérons les deux paraboles dont les axes rectangulaires se coupent en D; leurs quatre points d'intersection sont sur un cercle (troisième propriété) et ont pour centre des moyennes distances le point D (Deuxième propriété). — La corde commune AA' a pour milieu C; donc la corde qui joint les deux points variables d'intersection a pour milieu B; ce point B est donc le centre du cercle qui passe par les quatre points; ce cercle est fixe. Le lieu cherché est donc le système des cercles ayant pour centres, respectivement, B et B', et passant par A et A'. X.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. KOENIGS, *professeur à la Faculté des sciences de Toulouse,* **sur la question 22.**

... La question que j'ai proposée aux lecteurs de ce journal se rattache à ma *Note sur les axes des quadriques* insérée aux *Nouvelles Annales* de 1883. Le théorème en question y est démontré comme cas particulier de propositions plus générales; mais il est susceptible d'une démonstration simple et directe.

Il s'agit donc de prouver que *si l'on mène les six normales à une quadrique aux points où elle est percée par une cubique gauche passant par son centre et ayant ses asymptotes parallèles aux axes principaux de la quadrique, ces six normales sont sur une même surface du second degré.*

Je rapporte à ses axes principaux la quadrique, dont l'équation sera

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Je laisse aux lecteurs le soin de démontrer ce fait bien connu, que les coordonnées d'un point de l'une *quelconque des cubiques considérées* peuvent être exprimées à l'aide d'un paramètre t par les formules :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A\alpha}{A_1 - t}, \\ y &= \frac{B\beta}{B_1 - t}, \\ z &= \frac{C\gamma}{C_1 - t}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, A_1, B_1, C_1 sont des constantes quelconques. J'ai mis A, B, C en évidence aux numérateurs, en vue d'une légère simplification ultérieure des formules.

Les paramètres des points où la cubique perce la quadrique sont donnés par l'équation du sixième degré

$$\frac{A\alpha^2}{(t-A_1)^2}+\frac{B\beta^2}{(t-B_1)^2}+\frac{C\gamma^2}{(t-C_1)^2}-1=0, \qquad (3)$$

obtenue en remplaçant dans l'équation (1) x, y, z par leurs valeurs (2). Il y a donc six points de rencontre; soit (x_0, y_0, z_0) celui qui répond à $t = t_0$, où t_0 est racine de l'équation (3). La normale en ce point à la quadrique peut être représentée à l'aide des équations :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A-\rho}{A}\,x_0 \\ y &= \frac{B-\rho}{B}\,y_0 \\ z &= \frac{C-\rho}{C}\,z_0 \end{aligned}\right\}$$

ou à l'aide des équations (2), où l'on fait $t = t_0$ et par suite $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha\,\frac{A-\rho}{A_1-t_0} \\ y &= \beta\,\frac{B-\rho}{B_1-t_0} \\ z &= \gamma\,\frac{C-\rho}{C_1-t_0} \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

A chaque valeur de ρ répond un point (x, y, z) sur la normale au point (x_0, y_0, z_0).

Or, envisageons les équations :

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha\,\frac{A-\rho}{A_1-\sigma} \\ y &= \beta\,\frac{B-\rho}{B_1-\sigma} \\ z &= \gamma\,\frac{C-\rho}{C_1-\sigma} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

qui définissent les coordonnées (x, y, z), d'un point de l'espace en fonction des *deux* paramètres ρ et σ. L'élimination de ρ et σ entre ces équations conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & A_1x - A\alpha \\ y & \beta & B_1y - B\beta \\ z & \gamma & C_1z - C\gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

ce qui prouve que les points dont les coordonnées sont de

la forme (5) appartiennent à une surface du second degré. Mais on passe des équations (5) aux équations (4) en prenant pour σ la valeur t_0 de l'*une quelconque* des racines de l'équation (3). Il est donc prouvé que la surface (6) contient les six normales à la quadrique aux points où elle est percée par la cubique considérée.

En faisant $\rho = 0$ dans les équations (5), elles coïncident avec les équations (2). La surface (6) contient donc la cubique considérée. Résultat évident encore si l'on observe que la surface (6), ayant déjà les six pieds des normales en commun avec la courbe, a encore en commun avec elle les quatre sommets du tétraèdre principal.

Pour que la surface (6) se réduise à un cône, il faut et il suffit que les six normales concourent en un même point.

On peut alors supposer

$$A_1 = A, \quad B_1 = B, \quad C_1 = C,$$

et les équations (5) deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha\frac{A-\rho}{A-\sigma} \\ y &= \beta\frac{B-\rho}{B-\sigma} \\ z &= \gamma\frac{C-\rho}{C-\sigma} \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

A toute valeur de σ répond une droite représentée par les équations (5), ρ demeurant variable. Cette droite, dans le cas des équations (5'), passe constamment, et *quel que soit* σ, par le point (α, β, γ), comme on le constate en faisant $\rho = \sigma$. Donc, le sommet du cône a pour coordonnées

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma.$$

Il est aisé de donner de la surface (6) une définition géométrique.

La cubique (2) ne change pas si A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont multipliés par une même constante K; il suffit de prendre Kt pour paramètre variable au lieu de t. Or, l'équation (6) ne change pas non plus, tandis que l'équation (1), au lieu de représenter la quadrique primitive, représente une quadrique homothétique; on peut donc énoncer ce théorème :

Envisageons des quadriques homothétiques et concentriques, et

les points où elles sont percées par une cubique gauche fixe circonscrite à leur tétraèdre principal commun; les normales à ces quadriques en ces points de rencontre engendrent une surface du second degré.

Le cas particulier où la surface (6) est un cône a été étudié par Chasles, qui a démontré que si l'on a une série de surfaces du second ordre homothétiques et concentriques, les normales abaissées d'un point de l'espace sur ces surfaces forment un cône du second ordre, et que leurs pieds sont sur une cubique gauche (*).

La généralisation que je présente ici est trop naturelle pour qu'elle n'ait pas déjà été trouvée par quelque géomètre; malgré cela, je ne me souviens pas de l'avoir jamais vue explicitement énoncée....

QUESTIONS D'EXAMENS

2*. — *Étant donnés deux segments* AB, CD, *trouver le lieu des points d'où ils sont vus sous des angles égaux* (ou supplémentaires).

Cette question donne lieu à des calculs assez longs si on la traite par la méthode naturelle, c'est-à-dire par celle qui n'est que la traduction immédiate de l'énoncé proposé.

On peut prendre une voie plus courte en considérant les cercles circonscrits aux triangles AIB, CID et en observant que les distances des centres de ces cercles aux droites AB et CD ont un rapport constant.

On peut aussi obtenir immédiatement l'équation du lieu cherché en raisonnant comme il suit. Soient décrits les cercles sur AB et CD comme diamètres; on a

$$\frac{CD \cdot IH}{AB \cdot IK} = \frac{IC \cdot ID}{IA \cdot IB}; \qquad (1)$$

d'ailleurs les triangles rectangles semblables ARI, ISD donnent

$$\frac{IA}{IR} = \frac{ID}{IS}. \qquad (2)$$

(*) Rapport sur les progrès de la géométrie, p. 113.

Des égalités (1) et (2), on déduit

$$\frac{CD \cdot IH}{AB \cdot IK} = \frac{IC \cdot IS}{IB \cdot IR}.$$

Mais les produits

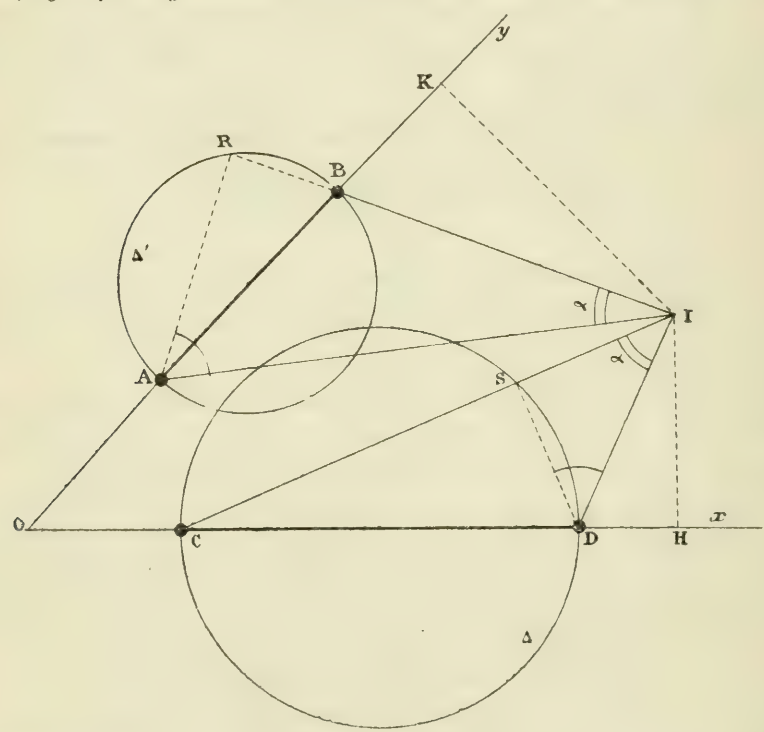
$$IC \cdot IS, \quad IB \cdot IR,$$

représentant, respectivement, la puissance du point I par rapport aux cercles Δ, Δ' ; en posant

$$OC = \alpha, \ OD = \alpha' ; \qquad OA = \beta, \ OB = \beta',$$

les équations des cercles Δ et Δ' sont :

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta - (\alpha + \alpha')(x + y \cos \theta) + \alpha\alpha' = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta - (\beta + \beta')(x \cos \theta + y) + \beta\beta' = 0.$$



Finalement, l'équation du lieu est

$$\frac{(\alpha' - \alpha) y}{(\beta' - \beta) x} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta - (\alpha + \alpha')(x + y \cos \theta) + \alpha\alpha'}{x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta - (\beta + \beta')(x \cos \theta + y) + \beta\beta'}. \quad (A)$$

C'est une cubique circulaire.

Dans le cas où les angles sont *égaux*, les puissances du point I par rapport aux cercles Δ et Δ' sont égales et de *même signe*, parce que le point I ne peut, dans cette hypothèse, être qu'extérieur aux deux cercles, ou intérieur à l'un et à l'autre.

Au contraire, si les angles considérés sont *supplémentaires*, le point correspondant est extérieur à l'un des cercles et intérieur à l'autre. D'après cette remarque, on voit qu'il faut donner au premier membre de l'équation (A), successivement, le signe + ou le signe —, suivant que les coordonnées du point considéré sont de même signe que les puissances de ce point, ou de signes contraires. Enfin, le lieu complet se compose de deux cubiques circulaires et les équations de ces courbes s'obtiennent en affectant le premier membre de (A) du signe +, puis du signe —.

Ce théorème est dû à Steiner (*) qui a fait observer, comme le prouve visiblement l'équation A, que ces deux cubiques, outre les ombilics du plan, possèdent *sept* autres points communs, savoir : 1° les quatre points donnés A, B, C, D; 2° le point de concours O des droites AB, CD; 3° les points communs aux deux cercles Δ, Δ' décrits sur CD et sur AB comme diamètres.

De nombreux cas particuliers découlent, comme l'a fait d'ailleurs remarquer Steiner, du cas général que nous venons d'examiner. Si les segments AB et CD sont placés sur la même ligne droite, les cubiques de Steiner dégénèrent en deux cercles, abstraction faite de cette droite. (V. *loc cit.*) Un autre cas particulier intéressant (**) est celui où l'on suppose que les segments AB et CD ont une extrémité commune. Dans ce cas la cubique possède un nœud à l'origine O et elle admet pour tangentes en ce point les bissectrices des directions données; c'est une strophoïde oblique.

En effet, en supposant $\alpha = \beta = 0$, dans l'équation (A), celle-ci devient

$$\left(\frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha'}\right)(x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta) = y^2 - x^2.$$

Enfin, on peut observer que cette génération des cubiques circulaires, proposée par Steiner et qui permet de construire

(*) Voyez *Journal de Mathematiques elémentaires* 1886, p. 16.

(**) Voir sur ce sujet *Journal für die reine und andgewandte Mathematik* 1885, p. 108 (Bemerkung an lässlich des Aufsatzes von Hern O. HERMES über eine gewisse Curve dritten Grades; von P. A. Schoute, professeur à l'Université de Groningue).

ces courbes par points, au moyen de deux segments capables du même angle, est susceptible d'être généralisée et l'on peut dire :

Étant donnés deux cercles γ, γ' *et deux droites* δ, δ'; *le lieu d'un point* I *tel que les distances de ce point aux droites données soient dans un rapport* K *avec les puissances de ce même point aux cercles proposés, est une cubique circulaire.*

CHOIX DE QUESTIONS ORALES

POSÉES AU CONCOURS POUR L'ÉCOLE DE SAINT-ÉTIENNE EN 1885

(*Suite et fin*, voir p. 8.)

— Construire $\rho = \dfrac{-p}{1 + 2\cos\omega}$.

— Dérivée de m^{ième} de $\dfrac{x}{x-1}$.

— Equation générale des hyperboles équilatères ayant un foyer donné.

— Limite de $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ pour x tendant vers zéro.

— Limite de $\cos x^{\frac{1}{\sin x}}$ quand x tend vers zéro.

— Construire $x^2 + 4y^2 - 4y + x = 0$; sommet et paramètre de cette courbe.

— Dérivée de $y = \text{L tg arc} \cos x^x$.

— Equation générale des coniques bi-tangentes à une conique aux points où elle est coupée par une droite.

— Construire $xy^2 + x^2 - 1 = 0$.

— Dérivée de y définie par l'équation

$$y^x - xy + \text{arc tg} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

— Lieu des sommets d'une parabole dont on donne la directrice et un point.

— Construire $\rho = \dfrac{\text{tg } 2\omega}{3 - 5\sin\omega}$.

— Dérivée de $y = \text{arc tg} x^x$.

— On a deux droites AC et AB qui sont les asymptotes d'une hyperbole, passant par deux points M et N fixes. Lieu du point A lorsque l'hyperbole se déplace dans le plan en passant toujours par les points M N.

— On donne une directrice d'une hyperbole équilatère, un point de la courbe et le point de rencontre de la directrice avec une des asymptotes. — Lieu des sommets des hyperboles équilatères.

— Dérivée de $y = \sin \dfrac{1}{x^2}$.

— On donne une ellipse, deux cordes rectangulaires MA.MB. On mène la normale MP en M à l'ellipse. — Lieu du point P quand M se déplace sur l'ellipse. — Démontrer que si M est fixe, P est fixe, lorsque l'angle droit tourne autour de M.

— Trouver les axes en direction et en longueur dans la courbe.

$$x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0.$$

— Si A est un polynome du 3e degré; et si ce polynome est cube parfait, démontrer que $AA'' - \frac{2}{3} A' = 0.$

— Dérivée de $L(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)$.

— Démontrer que $\cos x + \sqrt{-1} \sin x = e^{x\sqrt{-1}}$, au moyen des développements en série.

— Construire $\rho = \frac{\sin\omega}{1 - 2\cos\omega}$.

— Lieu des foyers des ellipses dont on connaît le sommet et les extrémités des diamètres conjugués égaux.

— Lieu des sommets des paraboles dont on donne un point et le pied de la directrice sur l'axe.

— Foyer de la conique $x^2 - y^2 + 2x - y = 0$.

— Construire $y = x^3$.

— Etudier la fonction $\sin(xy) - x = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure, à l'usage des candidats aux Ecoles Polytechnique et Normale et à l'agrégation, par J. Kœhler, ancien répétiteur à l'Ecole Polytechnique, ancien directeur des études à l'Ecole préparatoire de Sainte-Barbe (Questions et solutions). Première partie; Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins, 1886.

Le livre de M. Kœhler comble une lacune dans le champ des ouvrages qui visent la préparation à l'Ecole Polytechnique, à l'Ecole Normale et à l'Agrégation. On sait toute l'importance qui est attribuée, et fort justement a notre sens, à la composition mathématique dans les examens auxquels nous venons de faire allusion; mais le cours de Mathématiques spéciales est tellement étendu qu'il n'est pas toujours possible au professeur chargé de ce cours de s'attarder, autant qu'il le voudrait, dans l'exposition des exercices si multipliés de la Géométrie analytique. Le livre de M. Kœhler, dont la première partie vient de paraître, est donc appelé à rendre aux candidats un bien réel service en leur montrant, sur des exemples très variés, l'élégance et la fécondité des méthodes qui conduisent à la recherche des lieux ou à la démonstration des théorèmes de la géométrie supérieure.

En parcourant cet intéressant volume nous avons remarqué et nous signalons à nos lecteurs:

1° Divers problèmes relatifs aux triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre (chap. I, n° 1 ... 5; chap. III, n° 22, p. 76 à 87). Ces questions sont traitées par des méthodes élémentaires sans faire intervenir le covariant F de Salmon ou les invariants Θ, Θ'. C'est à cette théorie générale des polygones inscrits et circonscrits simultanément à deux coniques, théorie

dont l'idée remonte, croyons-nous, à Poncelet, que se rattache la question donnée aux candidats à l'École Normale au dernier concours (*).

2° La théorie des polygones circonscrits à une conique et dont les sommets se meuvent sur d'autres coniques (chap. VIII, appendice, p. 270).

Le problème I de cet appendice a été traité par M. Darboux en faisant intervenir les fonctions elliptiques. Voici l'énoncé de ce problème (p. 275):

Lorsque trois coniques U, (f), (f') *sont inscrites dans le même quadrilatère, si deux sommets d'un triangle circonscrit à l'une d'elles glissent sur les deux autres, le lieu du sommet libre se compose de deux coniques inscrites dans le même quadrilatère que les trois premières.*

M. Darboux donne l'équation du lieu; mais la différence de deux intégrales elliptiques s'introduit dans l'équation; il est vrai qu'il ressort de sa démonstration que cette différence est nécesssairement algébrique. M Kœhler donne (éq. Γ, p. 277) le moyen de former explicitement les équations des deux coniques qui constituent par leur ensemble le lieu cherché.

Nous signalerons encore dans ce même appendice le problème 5 (p. 584):

Deux sommets d'un triangle se meuvent sur une conique F; *deux côtés touchent une conique* U, *le troisième enveloppe une conique* F' *du faisceau* U,F; *trouver le lieu du sommet libre.*

Ce problème paraît avoir été traité pour la première fois par Salmon dans le *Quaterly Journal;* la solution de Salmon, extrêmement laborieuse d'ailleurs, se trouve résumée dans l'édition française du traité des coniques de cet auteur.

La solution de M. Kœhler est sensiblement plus simple. C'est à la suite (pp. 288 et 289) qu'on trouve une démonstration, que nous croyons nouvelle, du célèbre théorème de Poncelet.

Si les n *côtés d'un polygone touchent une conique fixe* U *et si* n — 1 *sommets se meuvent sur une conique* F, *le lieu du sommet libre est une conique inscrite dans le même quadrilatère que les deux premières.*

Nous signalerons encore, comme nous ayant plus particulièrement frappé:

1° L'*étude analytique du cercle de Brocard.*

Cette étude est faite au moyen des coordonnées trilinéaires, qui sont les coordonnées naturelles de cette question. Il y a d'ailleurs longtemps, relativement du moins, que cette étude analytique a été entreprise par MM. Neuberg, Lemoine, etc., sans compter M. Brocard lui-même. A notre avis (et M. Neuberg que nous venons de citer, partage, croyons-nous, cette opinion), l'étude analytique en question se fait un peu plus simplement en adoptant les coordonnées barycentriques. Mais, au fond, la différence des deux méthodes est peu sensible.

2° Étude d'un systeme de deux coniques telles que la conique covariante F se réduise à deux droites (p. 222; n° 49);

3° Étude de trois coniques formant un système harmonique;

4° Calcul du rayon de courbure en coordonnées trilinéaires, équation du cercle de courbure (p. 382).

De cette dernière formule, M. Kœhler déduit l'expression du rayon de courbure de l'hypocycloïde à trois rebroussements et retrouve le théorème que nous avons donné autrefois (**) :

Le rayon de courbure en un point quelconque de l'hypocycloïde à trois rebroussements est égal à huit fois la distance du centre du cercle circonscrit à la tangente en ce point.

(*) Voyez *Journal*, 1885, p. 180.

(**) *Journal de mathématiques spéciales*, 1884, p. 176.

Ces citations diverses suffisent à donner une idée de l'importance du livre de M. Kœhler, du souffle élevé qui l'anime, de l'abondance et de la variété des matériaux qui le constituent. On se plaint beaucoup, il faut avoir le courage de le reconnaître, de la faiblesse de plus en plus marquée, dans les divers examens et au concours général, des compositions de mathématiques, principalement à Paris. On ne sait plus faire le problème; et nos élèves lisent de moins en moins, absorbés qu'ils sont par un cours qui est vraiment bien lourd, surtout pour les élèves de première année. Il faut dire aussi qu'ils travaillent trop les questions d'examens, et ils poussent aujourd'hui *la préparation* jusqu'à la connaissance des détails les plus minutieux. Ce n'est pas là, assurément, la base d'une bonne instruction et nous ne pouvons croire que ces procédés artificiels puissent faire d'un candidat tout à fait médiocre un élève de nos grandes écoles.

Les candidats savent pourtant bien que cette préparation ne trompe personne et que ceux notamment qui sont appelés à les juger ont vite dévisagé ces médiocrités bien dressées, qui ne représentent qu'une surface facile à percer. On ne leur demande pas, dans les examens auxquels ils se destinent, de répéter, les uns après les autres, une définition plus ou moins controversée dans sa forme, comme celle des irrationnelles ou des imaginaires, définition qui peut cesser de plaire d'une année à la suivante, ou quand on passe d'un juge à un autre. Non, les examinateurs ont souci de trouver en eux des esprits précis et droits ; sans doute connaissant bien la valeur des termes qu'ils emploient, mais surtout largement ouverts aux raisonnements rigoureux et aux méthodes générales des mathématiques. C'est qu'il est, en effet, de toute justice que les portes de nos grandes écoles ne se ferment pas sur ces intelligences d'élite, leur recrutement intéressant le bon fonctionnement des services publics. Que les élèves cherchent donc à voir un peu au delà du cours; qu'ils lisent des ouvrages comme celui que nous venons d'analyser, et nous persistons à penser, malgré quelques exemples qu'on pourrait nous rappeler et qui donnent au système que nous préconisons ici un tort apparent, que ces candidats trouveront, en nous écoutant, la voie la plus courte et la plus sûre pour atteindre le but qu'ils ont en vue. G. L.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Questions de mathématiques supérieures d'où sera tiré le sujet de l'une des compositions d'admissibilité.

Calcul différentiel et calcul intégral.

Propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes d'une variable réelle ou imaginaire. Cercle de convergence.

Développement d'une fonction d'une seule variable z, réelle ou imaginaire en série ordonnée suivant les puissances entières de z. Séries de Taylor et de Mac Laurin. Théorème de Laurent sur les développements en série.

Définition et propriétés des fonctions z^m, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arc\,tg} z$.

Propriétés fondamentales de l'intégrale Eulérienne de seconde espèce.

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

Détermination de l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et des intégrales définies qui s'en déduisent immédiatement.

Montrer que l'intégrale Eulérienne $\Gamma(a)$ est la limite du produit

$$\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right)}$$

pour n infini. Conséquences de cette propriété.

Evaluation approchée de $\log \Gamma(a)$ pour de très grandes valeurs de la variable a.

Formule de Stirling.

Equation différentielle du premier ordre entre deux variables : intégrales générales, intégrales particulières, intégrales singulières. Démonstration de l'existence de l'intégrale générale.

Intégration de l'équation dans les cas les plus simples.

Mécanique.

Etude, au point de vue cinématique, du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Vitesse des différents points de ce corps ; axe instantané de rotation.

Représentation géométrique d'un mouvement fini du solide considéré. Comparer les accélérations de ces divers points pour un instant donné.

Mouvements d'un corps solide sur lequel agissent deux forces données et qui est assujetti à tourner autour d'un point fixe. Equation d'Euler. Etude du cas où le corps est un solide de révolution homogène dont l'axe passe par le point fixe; examiner en particulier les divers mouvements que ce solide peut prendre lorsqu'il est uniquement sollicité par la pesanteur.

Etudier, comme second cas particulier, celui où le solide, de forme quelconque, n'est sollicité par aucune force extérieure. Représentation du mouvement ; théorèmes de Poinsot; polhodie et herpolhodie.

Mouvement d'un solide complètement libre et sollicité par des forces données.

Equations générales auxquelles Lagrange a ramené la résolution d'un problème quelconque.

(A suivre.)

QUESTION 108

Solution, par M. J.-T., élève de Mathématiques spéciales.

On donne un triangle rectangle isoscèle AOB, *et on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes et un point variable. Par ce dernier, on mène la tangente au cercle. Lieu du point d'intersection de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet de l'angle droit aux asymptotes de l'hyperbole correspondante.*

Je prends pour axe des x une parallèle à l'hypoténuse menée par le sommet de l'angle droit et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite. Soit a la distance de l'origine

à l'hypoténuse, l'équation du cercle circonscrit du triangle est

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

L'équation d'une hyperbole équilatère passant par les points A, B, O est

$$x^2 + y^2 - 2ay - 2(y - a)(y - mx) = 0.$$

Elle coupe le cercle en un point qui est sur la droite $y - mx = 0$ et qui a pour coordonnées $\frac{2am}{1 + m^2}$ et $\frac{2am^2}{1 + m^2}$.

La tangente au cercle en ce point a pour équation

$$x \frac{2am}{1 + m^2} + y\left(\frac{2am^2}{1 + m^2} - a\right) - a \frac{2am^2}{1 + m^2} = 0$$

ou

$$m^2(y - 2a) + 2mx - y = 0. \qquad (1)$$

L'équation des directions asymptotiques de l'hyperbole est

$$x^2 - y^2 + 2mxy = 0. \qquad (2)$$

Il n'y a plus qu'à éliminer m entre (1) et (2). Tirant m de la seconde et portant dans la première, on a l'équation du lieu

$$y(y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2) - 2a(y^2 - x^2)^2 = 0.$$

Pour construire la courbe représentée par cette équation, je pose $y = tx$ et j'en tire

$$x = \frac{2a}{1 + t^2} - \frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 - 3)}, \quad y = \frac{2a}{1 + t^2} \frac{(t^2 - 1)^2}{t^2 - 3}.$$

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des y. Les valeurs d'x et d'y deviennent infinies pour

$$t = \pm \sqrt{3}.$$

La différence

$$y - x\sqrt{3} = \frac{2a(t^2 - 1)^2}{(1 + t^2)(t^2 - 3)}, \quad \frac{t - \sqrt{3}}{t} = \frac{2a(t^2 - 1)^2}{t(1 + t^2)(t + \sqrt{3})}$$

devient $\frac{a}{3}$ pour $t = \sqrt{3}$ et la somme

$$y\ x + \sqrt{3} = \frac{t(1 + t^2)(t - \sqrt{3})}{2a(t^2 - 1)^2}$$

devient $\frac{a}{3}$ pour $t = -\sqrt{3}$.

La courbe présente donc deux asymptotes réelles :

$$y = x\sqrt{3} + \frac{a}{3},$$

$$y = -x\sqrt{3} + \frac{a}{3}.$$

Il y a en outre une asymptote parallèle à l'axe des x qui est donnée pour $t = o$

$$y = -\frac{2a}{3}.$$

La courbe présente un point quadruple à l'origine, les tangentes étant les bissectrices des angles des axes. Elle coupe l'axe des y au point d'ordonnée $2a$ et la tangente en ce point est une parallèle à l'axe des x.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Marchis, à Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

189. — Construire les courbes représentées par l'équation

$$y = \frac{\log x + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right)}{\log x + \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)},$$

où les signes se correspondent. *(S. Realis.)*

190. — On considère deux points fixes A, B; un angle droit *uov* pivote autour d'un point fixe O et l'on considère les deux paraboles P et Q qui, passant par A et B, ont pour axes, respectivement, *ou* et *ov*.

Trouver le lieu décrit par les deux autres points qui sont communs à P et à Q.

On examinera le cas particulier où le point O est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB. *(X.)*

ERRATUM. — P. 12, lig. 15, et p. 13, lig. 9 (en remontant) au lieu de cercle de courbure γ', il faut lire *demi*-cercle de courbure ; cette erreur m'a été signalée par M. Maurice d'Ocagne. Je reviendrai d'ailleurs, dans le prochain numéro, sur les constructions en question qui sont, comme l'a remarqué M. d'Ocagne, susceptibles d'une notable simplification.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2326-6.

LA PREMIÈRE LEÇON DE CALCUL INTÉGRAL

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 25.)

Théorème III. — *La limite de* U *est une fonction de* X *dont la dérivée est identique à* f (X).

Après avoir montré que la fonction U a une limite, nous pouvons lui donner un nom et la représenter par un symbole.

Nous dirons donc que U est l'*intégrale définie* de $f(X)$, dans les limites (x_0, X) et nous ferons la convention de représenter cette limite par la notation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Nous écrirons donc

$$\lim U = \int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Dans cette formule U a la signification que nous lui avons donnée plus haut, dx désigne l'un quelconque des intervalles

$$x_1 - x_0, \qquad x_2 - x_1, \quad . \; . \; . \quad X - x_p.$$

On peut d'ailleurs supposer que ces accroissements sont égaux, puisque, comme nous l'avons prouvé, la limite est indépendante de la loi d'insertion des moyens, pourvu que chaque différence tende vers zéro. Il faut donc supposer simplement que *dx est une quantité variable tendant vers zéro.*

L'expression

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx,$$

par sa définition même, est nulle quand $X = x_0$; de plus,

c'est une fonction de X. On peut donc la représenter par
$$F(X) - F(x_0)$$
en posant
$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = F(X) - F(x_0). \qquad (\alpha)$$
Nous voulons démontrer que nous avons
$$F'(X) = f(X).$$
L'identité (α) donne, par un changement de notation,
$$\int_{X}^{X+\Delta X} f(x)dx = F(X + \Delta X) - F(X).$$
Considérons maintenant l'intervalle
$$X, \qquad X + \Delta X,$$
et, dans cet intervalle, insérons les moyens
$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_i.$$
D'après la définition même, donnée tout à l'heure, de l'intégrale définie, nous pouvons écrire
$$\int_{X}^{X+\Delta X} f(x)\, dx = F(X + \Delta X) - F(X)$$
$$= \lim \left\{ (\xi_1 - X) f(X) + \ldots + (X + \Delta X - \xi_i) f(\xi_i) \right\}.$$
Soit M la plus grande des quantités
$$f(X), \quad f(\xi_1) \ldots f(\xi_i)\,; \qquad (6)$$
nous avons donc
$$F(X + \Delta X) - F(X) < M(\xi_1 - X + \ldots + X + \Delta X - \xi_i),$$
ou, en tenant compte des simplifications,
$$F(X + \Delta X) - F(X) < M \,.\, \Delta X. \qquad (7)$$
De même, soit M′ la plus petite des quantités (6); nous avons alors
$$F(X + \Delta X) - F(X) > M' \,.\, \Delta X. \qquad (8)$$
Des inégalités (7) et (8) nous déduisons
$$M' < \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X} < M.$$
Si nous passons à la limite, ΔX tendant vers zéro, toutes les quantités (6) ont pour limite commune $f(X)$; concluons donc que
$$f(X) = \lim \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X} = F'(X).$$

Après l'exposé qui précède, les difficultés auxquelles nous avons fait allusion au début de cette note disparaissent; l'intégrale définie se trouve rigoureusement établie et l'on peut, en se plaçant au point de vue du problème des quadratures, donner l'interprétation géométrique qu'elle comporte.

SUR LE POINT DE STEINER

Par M. **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

(*Suite*, voir p. 28.)

---

6. — On peut rattacher au point de Steiner deux autres points remarquables du plan $A_1A_2A_3$; ce sont ceux qui, avec R, sont les sommets d'un triangle inscrit à l'ellipse ε et ayant pour centre le centre de gravité, le point G.

A cet effet, considérons, d'abord, un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$. Sur la circonférence circonscrite, et dans le même sens, prenons trois arcs égaux A_1E_1, A_2E_2, A_3E_3. Il est facile de voir que les faisceaux $E_1(A_1A_2A_3)$, $E_2(A_3A_1A_2)$, $E_3(A_2A_3A_1)$ ont leurs rayons homologues parallèles.

En généralisant la réciproque de cette propriété au moyen d'une projection cylindrique, on trouve le théorème suivant :

Étant donné un triangle quelconque $A_1A_2A_3$, *le lieu d'un point* E_1 *tel que les parallèles aux droites* E_1A_1, E_1A_2, E_1A_3 *menées respectivement par* A_3, A_1, A_2 *concourent en un même point* E_2, *est l'ellipse* ε *circonscrite à* $A_1A_2A_3$ *et ayant pour centre le centre de gravité de* $A_1A_2A_3$. *Les parallèles à* E_1A_1, E_2A_2, E_3A_3 *menées respectivement par* A_2, A_3, A_1 *concourent également en un même point* E_3 *de l'ellipse* ε. *Les triangles* $E_1E_2E_3$, $A_1A_2A_3$ *ont même centre de gravité* (*).

Le point de Steiner étant situé sur l'ellipse ε, on a le cas

(*) Une projection conique conduit à cette nouvelle généralisation :

Étant donnés un triangle quelconque $A_1A_2A_3$ *et une conique circonscrite* U *dont le pôle et l'axe d'homologie par rapport à* $A_1A_2A_3$ *sont désignés par* L *et* l, *les droites joignant* A_1, A_2, A_3 *à un point quelconque* E_1 *de* U *rencontrent* l *en trois points* α, β, γ : *les droites* $A_2\alpha$, $A_3\beta$, $A_1\gamma$, *concourent en un même point* E_3 *de* U, *et les droites* $A_3\alpha$, $A_1\beta$, $A_2\gamma$ *en un point* E_2 *de* U; *le pôle et l'axe d'homologie de* U *par rapport au triangle* $E_1E_2E_3$ *sont encore* L *et* l.

particulier que voici : *Si par les sommets* A_2, A_3, A_1 *d'un triangle on mène des parallèles aux droites* A_1R, A_2R, A_3R *(ou à* B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2), *ces parallèles concourent en un même point* ρ'; *de même, les parallèles menées par* A_3, A_1, A_2 *aux lignes* A_1R, A_2R, A_3R *concourent en un point* ρ. *Le triangle* $R\rho\rho'$ *a même centre de gravité que* $A_1A_2A_3$.

La droite $\rho\rho'$ étant parallèle à la tangente menée par R à l'ellipse, est perpendiculaire à la droite qui joint R au point symétrique de H par rapport à G.

Les directions des côtés des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ faisant des angles égaux avec un axe de ε, on voit sans peine que *les parallèles aux côtés* a_1, a_2, a_3 *du triangle* $A_1A_2A_3$, *menées respectivement par* B_2, B_3, B_1 *ou par* B_3, B_1, B_2 *concourent en deux points* x', x : *les triangles* $B_1B_2B_3$, Kxx' *ont même centre de gravité et sont inscrits à une même ellipse.*

En faisant intervenir le point N, on peut donner, des résultats précédents, cet autre énoncé : *Il existe dans le plan de tout triangle* $A_1A_2A_3$ *un point* N *tel que les perpendiculaires abaissées* A_1, A_2, A_3 *ou de* A_3, A_1, A_2 *ou de* A_2, A_3, A_1 *concourent respectivement en trois points* R, ρ, ρ'. *Les points* N *et* R *sont situés sur le cercle* $A_1A_2A_3$, *et les triangles* $A_1A_2A_3$, $R\rho\rho'$ *ont même centre de gravité.*

Les angles des faisceaux $R(A_1A_2A_3)$, $\rho(A_3A_1A_2)$, $\rho'(A_1A_2A_3)$ étant égaux aux angles du triangle $A_1A_2A_3$, on peut déterminer les points ρ, ρ' par une construction offrant la plus grande analogie avec celle des points de Brocard. On sait que ceux-ci sont à l'intersection des arcs des segments capables des angles $\pi - A_1$, $\pi - A_2$, $\pi - A_3$ construits sur a_2, a_3, a_1 ou sur a_3, a_1, a_2. Les symétriques de ces circonférences par rapport aux côtés correspondants de $A_1A_2A_3$ se coupent respectivement en ρ et ρ'.

Les coordonnées barycentriques des points ρ', ρ sont :

$$\frac{1}{a_3^2 - a_1^2}, \quad \frac{1}{a_1^2 - a_2^2}, \quad \frac{1}{a_2^1 - a_3^2};$$

$$\frac{1}{a_1^2 - a_2^2}, \quad \frac{1}{a_2^2 - a_3^2}, \quad \frac{1}{a_3^2 - a_1^2}.$$

(A suivre.)

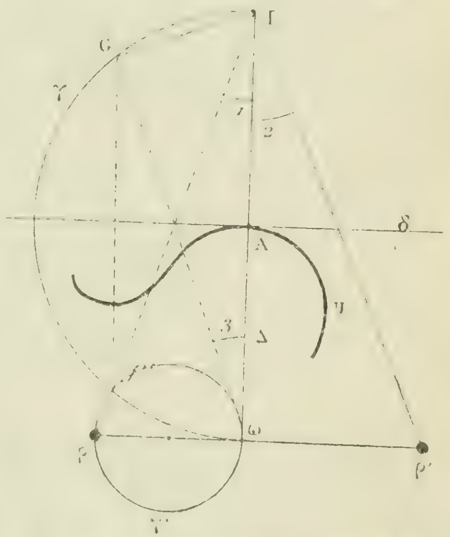
SUR LES COURBES PARALLÈLES
ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 11.)

Les constructions (*) indiquées dans les deux paragraphes précédents sont susceptibles d'une notable simplification qui m'a été signalée par M. d'Ocagne et que je vais faire connaître.

42. — Prenons d'abord les *anti-développées*. Soient ω le centre de courbure de la courbe proposée U, ρ celui de la développée W. Sur $\omega\rho$ comme diamètre, décrivons le cercle γ'; celui-ci coupe le cercle γ décrit sur ωI comme diamètre en un point f'; la parallèle menée à Iω par f' coupe γ en un point G qui appartient à la tangente en I à l'anti-développée.



De cette construction, indiquée par nous, on peut déduire que *la normale en* I *à l'anti-développée passe par le point* ρ' *symétrique de* ρ *par rapport à* ω.

En effet, les trois points ρ, f', I sont en ligne droite; les angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ sont égaux, puisque $\omega\rho' = \omega\rho$. Par suite on a $\widehat{3} = \widehat{2}$; la droite ωG étant perpendiculaire sur GI, la parallèle ρ'I est, elle aussi, perpendiculaire sur cette droite; ρ'I est donc la normale à l'anti-développée.

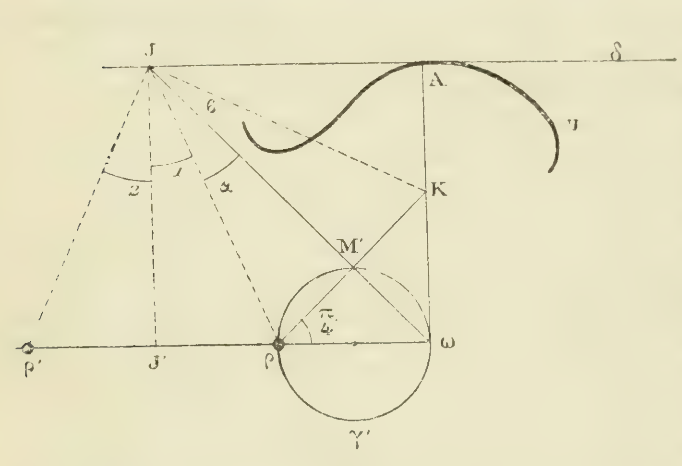
43. — Considérons maintenant les courbes ζ que l'on

(*) Je veux parler des *constructions rectifiées* conformément à l'erratum publié à la dernière page du numéro de février.

déduit, comme nous l'avons dit plus haut (§ 41), d'une courbe donnée U, en portant le rayon de courbure sur la tangente correspondante.

Soit U la courbe proposée; nous prenons sur U un point A et nous traçons la tangente δ et la normale $A\omega$, en ce point A. Ayant pris le point ρ, centre de courbure en ω de la développée V, nous décrivons, sur $\omega\rho$ comme diamètre, un cercle γ' et nous joignons les points J et ω; cette dernière droite coupe γ' en un point M'. Nous avons démontré que la tangente en J à la courbe ζ était tangente au cercle circonscrit au triangle AM'J.

Cette construction conduit à une conséquence remarquable qui est la suivante : *la normale en J à la courbe ζ passe par le point ρ', symétrique de ρ par rapport à la parallèle, menée par J, à la normale à U, au point considéré A.*



En effet, prolongeons $\rho M'$ jusqu'à sa rencontre en K avec $A\omega$, le quadrilatère AJM'K est inscriptible; par suite, le centre du cercle circonscrit au triangle AM'J est situé au milieu de JK. La droite JK est donc la normale à la courbe ζ, d'où l'on conclut, en observant que, $\omega K = \omega\rho$, que *en retranchant du rayon de courbure* ωA *le rayon de courbure* $\omega\rho$ *de la développée, on obtient un point* K *par lequel passe la normale à la courbe* ζ.

On voit aussi qu'en prenant, comme le propose M. d'Ocagne, $J'\rho' = \rho J'$, on a $\widehat{1} = \widehat{2}$; mais $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$; d'ailleurs le quadrilatère $JJ'\rho M'$ étant inscriptible $\widehat{1} + \widehat{\alpha} = \frac{\pi}{4}$; on a donc $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \frac{\pi}{2}$, d'où l'on conclut finalement $\rho' JK = \frac{\pi}{2}$. La droite $J\rho'$ est donc la tangente à la courbe ζ.

C'est, croyons-nous, en reprenant les problèmes que nous nous sommes posé dans les paragraphes 40 et 41, et en leur appliquant une formule de Newton (*), formule dont il a d'ailleurs fait connaître plusieurs transformations qui la rendent plus pratique et plus commode (**), que M. d'Ocagne a relevé l'erreur qui nous avait fait confondre le rayon du cercle osculateur avec son diamètre, et qu'il a été conduit aux deux constructions très élégantes que nous venons d'établir différemment, en prenant pour base de nos raisonnements ce principe si fécond des transversales réciproques.

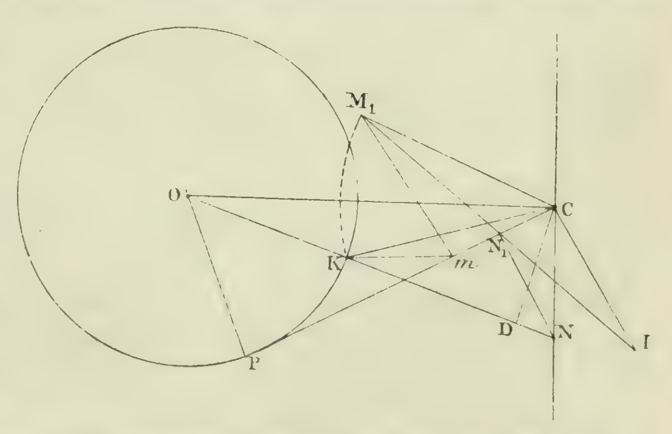
(A suivre.)

SUR LA SECTION PLANE D'UNE SURFACE
DE RÉVOLUTION ET LE THÉORÈME DE VILLARCEAU

Par M. **Poujade**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Quand une surface de révolution dont on connaît le méridien est coupée par un plan, on sait que la section se construit par points de la manière suivante :

I. — Supposons que le plan coupe l'axe en C, prenons le plan méridien perpendiculaire au plan sécant pour plan du tableau et rabattons-y la section autour de sa trace CP. En un point *m* de CP se projette sur le tableau un point M de la section, situé sur le parallèle de trace MK perpendiculaire à l'axe CZ rencontrant le méridien en K. On a



(*) Voyez *Journal*, 1880, p. 433.

(**) Voyez, sur ce sujet, divers articles de M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales*, dans *Mathesis* et dans ce journal même.

d'ailleurs CM = CK; donc élevant en m la perpendiculaire à CP et décrivant l'arc de cercle de C comme centre et rayon CK, il coupe cette perpendiculaire au point M_1, rabattement de M.

Application. — La méridienne est un cercle de centre O, la perpendiculaire abaissée de O sur l'axe a son pied en C et CP est tangente à cette méridienne, le plan considéré est alors bi-tangent au tore. Envisageons toujours la construction du rabattement M_1 du point M situé sur le parallèle de trace mK, l'équivalence des deux triangles OCK, OCm donne en abaissant de C sur OK la perpendiculaire CD $OK \times CD = Cm \times OP$, donc $CD = Cm$. Par suite les deux triangles CKD, CmM_1 sont égaux ainsi que leurs angles aigus en M_1 et K. Elevons en C sur CP une perpendiculaire $CI = OP$, en sens contraire de mM_1, les deux triangles ICM_1 et OCK sont égaux et $IM_1 = OC$; donc le lieu de M_1 est un cercle de centre I et rayon OC. Il y a un deuxième cercle symétrique par rapport à CP.

II. — Pour construire la tangente à la section au point M_1, observons que la normale à la surface en M se projette sur le plan sécant suivant la normale à la section. Si donc nous menons la normale à la méridienne en K, soit KN coupant l'axe en N, si nous projetons ce point sur CP en N_1, M_1N_1 est la normale à la section et M_1T_1 perpendiculaire donne la tangente.

Application. — On en pourrait déduire que dans la section du tore par un plan bitangent, la normale en un point M_1 va passer par un point fixe I.

On peut aussi obtenir cette propriété moins connue : *Un cercle situé sur le tore dans un plan bitangent coupe tous les méridiens sous le même angle.*

Remarque. — Quand un plan sécant est parallèle à l'axe il faut envisager le rabattement du parallèle mK pour connaître mM et construire M_1. La tangente se construit toujours comme ci-dessus.

SUR UN NOUVEAU (*) CERCLE REMARQUABLE

DU PLAN D'UN TRIANGLE,

Par M. G. de Longchamps.

1. Définition du cercle Δ. — Imaginons un triangle ABC et du point A comme centre, avec a pour rayon, décrivons un cercle Δ_a; il existe un cercle Δ coupant orthogonalement les trois cercles Δ_a, Δ_b, Δ_c; c'est ce cercle Δ que nous avons ici en vue.

2. Équation cartésienne de Δ. — Si nous prenons le sommet C pour origine et les côtés CB, CA pour axes des x et des y, des calculs bien simples, mais que, pour abréger, nous supprimons, conduisent à l'équation

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos C - 2cx \cos B - 2cy \cos A + c^2 = 0. \quad (1)$$

On vérifiera d'ailleurs immédiatement que la puissance des points A (o, b), B (a, o), C (o, o) est égale, respectivement à a^2, b^2, et c^2; l'équation (1) représente donc bien le cercle orthotomique aux trois cercles Δ_a Δ_b Δ_c imaginés plus haut.

3. Équation de Δ **en coordonnées barycentriques.** — On sait qu'en désignant par α, β, γ les coordonnées barycentriques d'un point M, situé dans le plan du triangle ABC, c'est-à-dire, en grandeur et en signe, les aires des triangles MBC, MCA, MAB, l'équation générale des cercles est

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0. \quad (A)$$

Dans ce système de coordonnées, et c'est un des motifs qui nous le font préférer à celui des coordonnées trilinéaires, les

(*) Je veux dire, bien entendu, que je le suppose nouveau, mais il est très possible qu'il ait été déjà entrevu.

On sait que la géométrie élémentaire moderne s'est enrichie de propriétés diverses et fort intéressantes par l'introduction d'éléments nouveaux dans la *Géométrie du triangle*. Tels sont notamment : le cercle de Brocard, le premier et le deuxième cercle de Lemoine, le cercle de Taylor, etc. Cette géométrie commence à être très connue et M. Vigarié, dans un prochain article, fera le résumé des principales définitions et des plus importantes propriétés qui la constituent.

paramètres u, v, w qui déterminent un cercle quelconque ont une signification géométrique immédiate et bien remarquable; ils représentent, respectivement, les puissances des sommets du triangle par rapport au cercle considéré.

On peut vérifier ceci, en prenant l'équation

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos C + \frac{x}{a}(v - w - a^2)$$
$$+ \frac{y}{b}(u - w - b^2) + w = 0,$$

laquelle représente un cercle tel que les puissances des points A B, C soient respectivement u, v, w.

En la transformant en coordonnées barycentriques au moyen des formules :

$$2\alpha = ay \sin C, \quad 2\beta = bx \sin C, \quad \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\frac{1}{2} ab \sin C} = 1,$$

on obtient l'équation (A).

Dans cette manière d'envisager les cercles qui appartiennent au plan d'un triangle, en prenant

$$u = f(a, b, c), \quad v = f(b, c, a), \quad w = f(c, a, b),$$

on obtient un cercle remarquable associé à ce triangle. Celui que nous étudions dans cette note correspond à l'hypothèse particulière

$$u = a^2, \quad v = b^2, \quad w = c^2.$$

En coordonnées barycentriques, l'équation de Δ est donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

Nous reviendrons d'ailleurs, un peu plus loin, sur cette égalité remarquable.

4. Détermination du centre de Δ. — Les coordonnées du centre vérifient les équations

$$x + y \cos C - c \cos B = 0,$$
$$x \cos C + y - c \cos A = 0.$$

La première représente une droite perpendiculaire à CB et passant par le point $(a, -b)$, c'est-à-dire par le sommet A' du triangle A'B'C' obtenu en menant par les sommets du triangle proposé des parallèles à ses côtés.

Concluons donc que *le centre de Δ est l'orthocentre de* A'B'C'; nous pouvons dire aussi que *le centre de Δ s'obtient en pre-*

nant le symétrique de l'orthocentre de ABC *par rapport au centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

5. Calcul du rayon de Δ. — Le discriminant U de l'équation (1) est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos C & -c\cos B \\ \cos C & 1 & -c\cos A \\ -c\cos B & -c\cos A & c^2 \end{vmatrix},$$

d'où
$$U = c^2(1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C). \quad (2)$$

D'ailleurs on a
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1, \quad (3)$$
et, par conséquent,
$$U = 4c^2\cos A\cos B\cos C.$$

En désignant par ρ le rayon de Δ, la formule connue
$$\rho^2\sin^2 C + U = 0$$
donne, dans le cas présent,
$$\rho^2 = -16R^2\cos A\cos B\cos C, \quad (B)$$
formule dans laquelle R désigne le rayon du cercle circonscrit à ABC.

On sait (*) qu'en désignant par ρ' le rayon du cercle conjugué à un triangle, ρ' est donné par la formule
$$\rho'^2 = -4R^2\cos A\cos B\cos C\ ;$$
on peut donc dire que *le rayon de* Δ *est égal au diamètre du cercle conjugué.*

On voit aussi, d'après ce résultat, que Δ, comme le cercle conjugué, est imaginaire lorsque le triangle n'a que des angles aigus; il se présente sous la forme d'un point, au moment où ABC est rectangle, ce point étant symétrique du sommet de l'angle droit par rapport au milieu de l'hypoténuse; enfin, si le triangle possède un angle obtus, le cercle Δ existe réellement.

6. Autre expression du rayon. — Les équations (2) et (3) donnent encore
$$U = 2c^2(1 - \cos^2 A - \cos B^2 - \cos^2 C),$$
ou
$$U = 2c^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2).$$

(*) Voyez Kœhler, *Exercices de Géométrie analytique*, p. 173.

On a donc

$$\rho^2 \sin^2 C = 2c^2\left(2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}\right)$$

ou, finalement,

$$\rho^2 = 16R^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Cette forme remarquable permet de construire ρ par un tracé très simple, et sur lequel il est inutile d'insister ici, lorsque l'on a

$$a^2 + b^2 + c^2 < 8R^2,$$

inégalité qui est vérifiée, comme nous l'avons observé tout à l'heure, toutes les fois que le triangle donné possède un angle obtus.

7. Réflexions générales. — Le fait que nous venons de constater et duquel il résulte que Δ cesse d'exister pour les triangles qui n'ont que des angles aigus, entraîne une conséquence qu'il est bon d'observer avant de pénétrer plus profondément dans l'étude de Δ. Puisque Δ est un cercle imaginaire quand ABC n'a pas d'angle obtus, Δ ne saurait passer par aucun point remarquable, ni être tangent à aucune droite ou cercle remarquable du plan du triangle, si l'on suppose du moins que cet élément (point, droite ou cercle) soit ce qu'on pourrait appeler *un élément unicursal*, c'est-à-dire quelque chose qu'on obtient par une construction aboutissant à ce *seul* élément; ou, si l'on préfère la traduction analytique de notre pensée, par un tracé dépendant d'une équation du *premier degré*.

En effet, si Δ pouvait passer, par exemple, par un point ω dont l'existence serait certaine, et ne dépendrait pas de la forme du triangle, Δ serait un cercle toujours réel, ce qui n'est pas.

Ces sortes de propriétés sont donc interdites au cercle Δ; mais il n'en est plus de même de celles qui ressortent des équations du second degré et nous allons maintenant en montrer quelques-unes (*).

(A suivre.)

(*) Il est probable que cette note donnera lieu à des réflexions diverses; mais je désire, pour un motif trop naturel, qu'elles ne me soient pas communiquées avant la publication complète du présent article.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMETRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 8.)

CHAPITRE VIII (*)

LE TRACÉ DES CUBIQUES

La cissoïde de Dioclès et la duplication du cube (**).

91. Génération normale de la cissoïde. — Soient Δ et Δ' deux droites parallèles et AB une perpendiculaire commune ; par A menons une transversale AD, puis, du point B abaissons une perpendiculaire BC et prenons enfin AI = CD (***). Le lieu décrit par le point I, quand AD tourne autour de A, est une courbe imaginée par Dioclès et qu'on nomme la cissoïde.

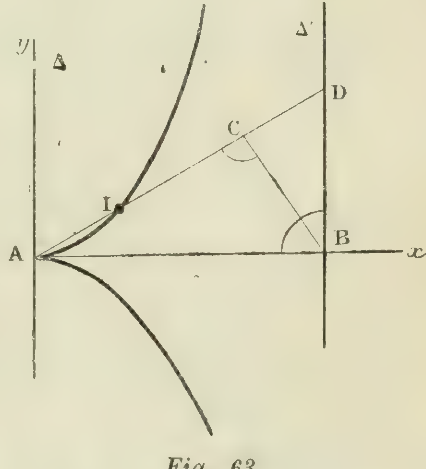


Fig. 63.

En posant

$AI = \rho$, $DAB = \omega$, $AB = d$,

on trouve immédiatement

$$\rho = \frac{d \sin^2 \omega}{\cos \omega};$$

c'est l'équation polaire de la cissoïde.

(*) Voyez les sept premiers chapitres traitant de sujets élémentaires dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

(**) Il va sans dire que le problème de la duplication du cube ne ressort nullement de la géométrie de la règle ; nous n'en parlons ici qu'incidemment à propos de la cissoïde qui doit, à ce problème fameux, sa première renommée.

(***) Il est bien entendu qu'en écrivant AI = CD, nous voulons exprimer non seulement que les segments AI et CD sont égaux, mais aussi qu'ils ont la *même direction*.

En prenant AB pour axe des x, Δ pour axe des y, l'équation précédente donne

$$y^2 = \frac{x^3}{d - x},$$

c'est, dans le système d'axes adopté, l'équation cartésienne de la cissoïde.

La génération précédente n'exige, comme on le voit, que l'usage de la règle et de l'équerre ; car (§ 26) nous savons porter un segment donné CD sur sa direction, en prenant pour origine un point quelconque A. Mais nous allons faire connaître d'autres constructions, point par point, de la cissoïde, qui se prêtent mieux que la précédente à l'emploi de la règle et de l'équerre.

92. Générations diverses de la cissoïde. — 1° Prenons encore les deux parallèles Δ, Δ', puis effectuons avec elles

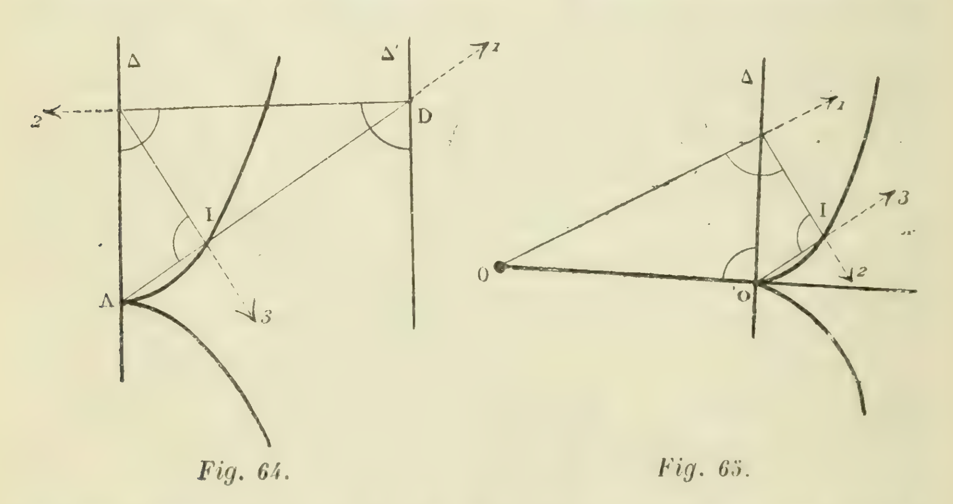


Fig. 64. *Fig. 65.*

la construction (1, 2, 3, *fig. 64*) (*). On obtient un point I qui décrit évidemment une cissoïde.

On peut présenter cette construction, dans une forme un

(*) Pour abréger, nous convénons de désigner ainsi une construction effectuée avec la règle et l'équerre dans l'ordre marqué par les chiffres qui sont placés sur la figure ; de plus, pour éviter toute ambiguïté nous indiquerons les angles droits par un petit arc de cercle. Enfin, dans les constructions qui ont pour objet la génération de certaines courbes, c'est la transversale 1 que nous supposerons mobile ; elle détermine la mobilité des autres droites 2, 3, etc.

peu différente, en effectuant la construction (1, 2, 3, *fig. 65*).

2° Aucune construction ne peut, croyons-nous, dépasser en rapidité celles que nous venons d'indiquer et qui n'exigent, pour la détermination d'un point de la cissoïde, que trois mouvements de la règle ou de l'équerre; mais en voici une qui, bien que plus compliquée, offre un intérêt particulier; elle permet, en effet, de construire une cissoïde dont l'asymptote Δ' ne peut être placée dans les limites de l'épure.

Soient O, O', O'' trois points en ligne droite; on fait la construction (1, 2, 3, 4, 5, *fig. 66*); le point I décrit une cissoïde, quand la transversale 1 est supposée mobile.

En effet, si nous posons

$$O''I = \rho, \qquad IO''x = \omega, \qquad OO' = d, \qquad O'O'' = d',$$
$$OMO' = O''MI = \alpha,$$

nous avons

$$MO'' = (d + d') \sin \omega, \quad \text{et} \quad \rho = (d + d') \sin \omega \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

D'autre part, le triangle OMO' donne

$$\frac{d}{\sin \alpha} = \frac{MO}{\sin (\alpha + \omega)} = \frac{(d + d') \cos \omega}{\sin \alpha \cos \omega + \sin \omega \cos \alpha} \quad (2)$$

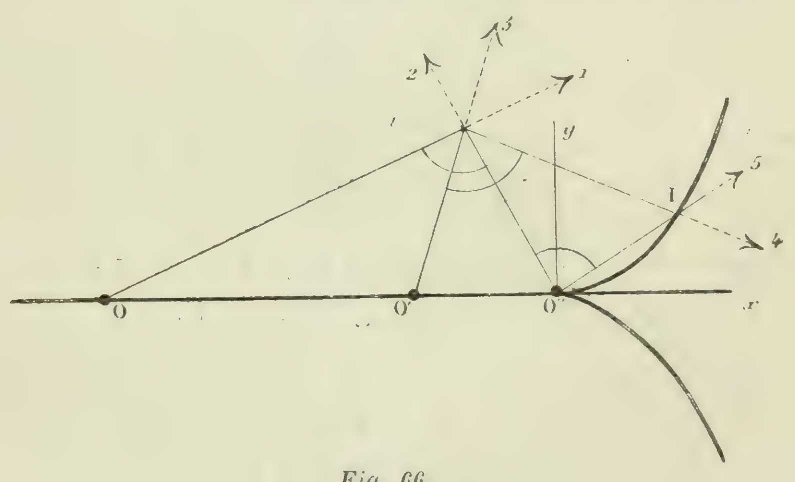


Fig. 66.

Si nous éliminons α entre (1) et (2) nous obtenons

$$\rho = \frac{d(d + d') \sin^2 \omega}{d' \cos \omega},$$

c'est bien l'équation de la cissoïde donnée plus haut. Le point O'' est le sommet de cette cissoïde et la distance du

point o'' à l'asymptote de la courbe est égale à h

$$h = \frac{d(d + d')}{d'}.$$

En supposant que d' est suffisamment petit on voit que cette longueur h peut être aussi grande que l'on voudra et l'on pourra construire la cissoïde, dans le voisinage de son sommet, sans avoir besoin de connaître l'asymptote de la courbe.

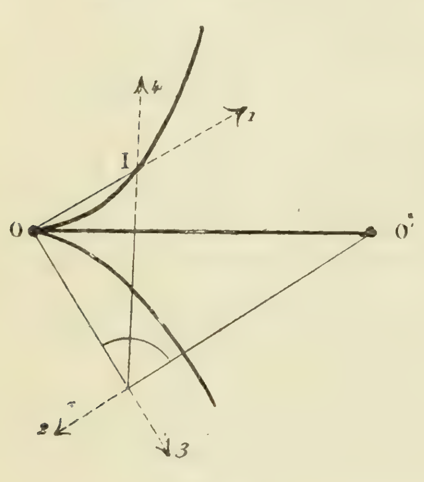


Fig. 67.

3° Prenons deux points o, O'; la construction (1, 2, 3, 4, *fig. 67)* donne un point I; ce point décrit une cissoïde, quand la transversale 1 tourne autour du point O.

Il serait de peu d'intérêt, croyons-nous, de multiplier ces constructions qui varient à l'infini; nous avons choisi les précédentes parmi celles qui offrent le plus d'intérêt et de simplicité, et nous allons maintenant nous occuper du tracé de la tangente à la cissoïde.

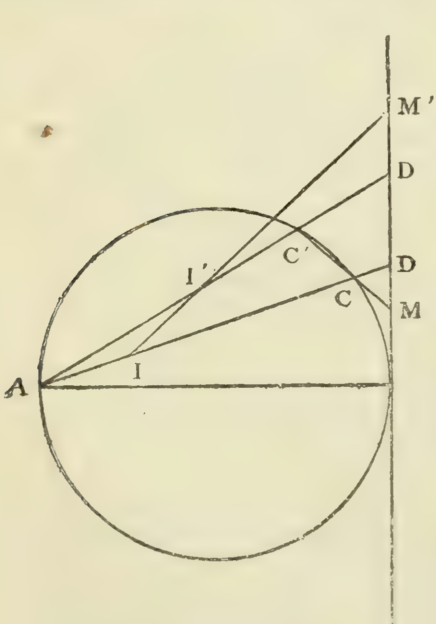


Fig. 68.

93. Tracé de la tangente. — Considérons deux transversales ACD, AC'D' et prenons sur ces droites AI = CD, AI' = C'D'; les deux points I et I', ainsi obtenus, sont deux points de la cissoïde. Les deux droites C'C et I'I sont deux transversales réciproques, dans le triangle ADD'; on peut donc dire que les points M et M' sont symétriques par rapport au milieu

de DD′. Si nous supposons maintenant que la transversale AC′D′ vienne se confondre avec ACD, la droite II′, par définition, a pour position limite la tangente, au point I, à la cissoïde et, d'autre part, CC′ devient, à la limite, la tangente au cercle au point C.

De cette remarque résulte une construction de la tangente à la cissoïde ; cette construction est indiquée sur la figure ci-dessous. Pour obtenir la tangente Iμ', on a pris Dμ' = Dμ.

Pour simplifier les explications, et aussi pour les rendre plus faciles à saisir, nous avons tracé, dans ces deux figures, le cercle qui admet AB pour diamètre ; mais il va sans dire que le tracé de ce cercle n'est pas nécessaire; et cette remarque a son importance, dans un livre où nous nous interdisons l'emploi du compas.

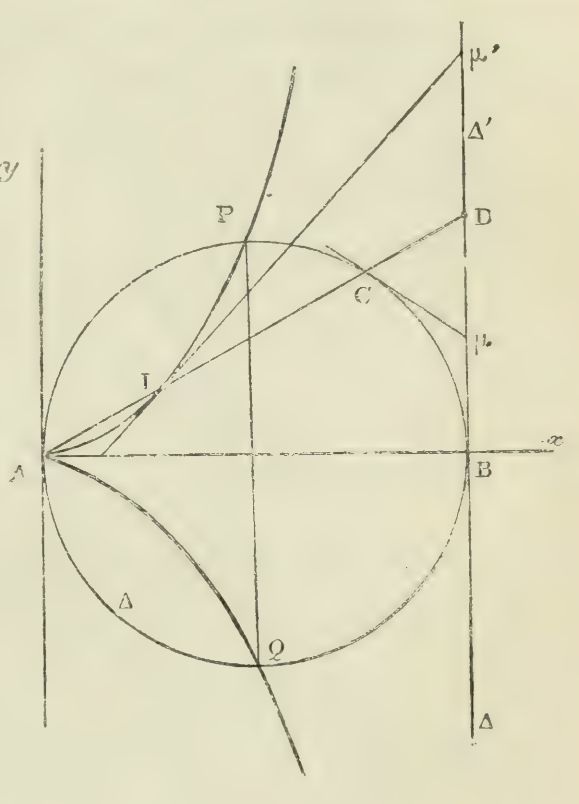


Fig. 69.

La *cissoïde oblique* donne lieu à une génération analogue et le tracé de la tangente en un point pris sur cette courbe résulte immédiatement de l'application du théorème des transversales réciproques; mais nous aurons occasion de retrouver cette courbe quand nous nous occuperons des cubiques circulaires.

(A suivre.)

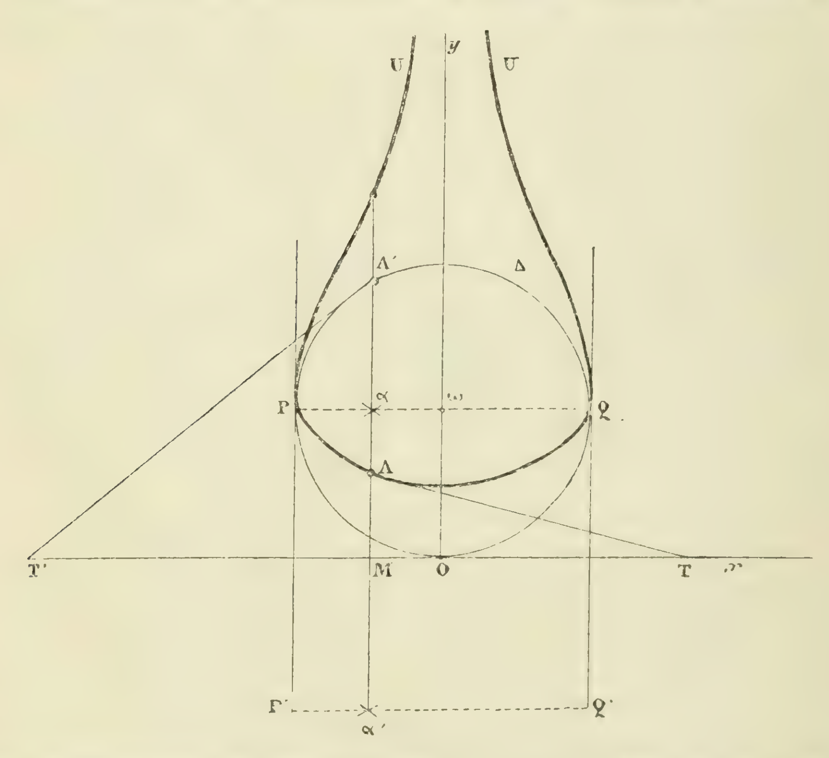
QUESTIONS D'EXAMENS

3. — *Construire, point par point, la courbe* U *qui correspond à l'équation*

$$y = \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}.$$

La discussion de cette équation prouve que la courbe a la forme générale indiquée par la figure ci-dessous.

La construction de la courbe, point par point, peut se faire



très rapidement en considérant U comme transformée d'un cercle au moyen des formules :

$$x = X, \quad yY = 1.$$

A la courbe U correspond un cercle Δ décrit du point (0, 1) comme centre avec un rayon égal à l'unité donnée. L'équation de Δ est, en effet,

$$X^2 + (Y - 1)^2 = 1.$$

A un point A′ de Δ correspond sur U un point A et l'on a :

$$MA \cdot MA' = O\omega^2.$$

D'après cela, si l'on considère les droites PQ, P′Q′ ($y = 1$, $y = -1$), les quatre points A, A′; α, α' sont conjugués harmoniques.

Cette remarque permet de construire la courbe point par point, par un tracé simple et élégant.

On peut aussi observer que les tangentes aux points A, A′ coupent l'axe ox en deux points T, T′ symétriques par rapport à M.

Cette propriété remarquable, permettant de construire U *tangente par tangente*, se reconnaît immédiatement en prenant deux points voisins sur U et les points correspondants sur Δ.

(A suivre.)

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE

(1er JUILLET 1885.)

1. — Discuter la courbe représentée par l'équation

$$(x^4 - 5x^2 + 4)y^2 - 4xy + x^2 = 0.$$

2. — Reconnaître la nature des différentes surfaces représentées par l'équation du deuxième degré

$$x^2 + y^2 + hz^2 + 2axz + 2byz + 2cz = 0$$

quand les coefficients h, a, b, c prennent toutes les valeurs possibles.

Déterminer les sections circulaires de ces surfaces.

QUESTIONS 38 ET 40 (*)

Solution par M. Théogène Alexandre, élève de Mathématiques spéciales au Lycée d'Angers.

On considère une ellipse E *rapportée à ses axes*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

par les sommets on fait passer une infinité de coniques S *et l'on*

(*) C'est par erreur que la question 40 a été proposée ; elle est identique à la question 38. On arrive immédiatement au résultat en observant que l'exercice proposé revient au suivant : *On donne une ellipse* E ; *soit* A *un point de cette courbe,* A′ *le symétrique par rapport à l'un des axes. La tan-*

imagine une tangente commune à E et à S. Le point de contact de cette droite avec S décrit un lieu géométrique; on construira ce lieu qui est une courbe du quatrième degré et l'on indiquera les points qui proviennent d'une ellipse S, ou d'une hyperbole S.

(G. L.)

L'équation de l'ellipse E étant mise sous la forme

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0, \qquad (1)$$

l'équation de l'une quelconque de ces coniques S sera

$$a^2y^2 + 2\lambda xy + b^2x^2 - a^2b^2 = 0. \qquad (2)$$

Soit une tangente à E

$$bx \cos\varphi + ay \sin\varphi - ab = 0. \qquad (3)$$

En écrivant qu'elle est tangente à (2), on a la condition

$$\lambda(\lambda - 2ab \sin\varphi \cos\varphi) = 0\,; \qquad (4)$$

éliminons la solution $\lambda = 0$ qui donnerait la conique E elle-même, il reste

$$\lambda = 2ab \sin\varphi \cos\varphi. \qquad (5)$$

Les coordonnées du point de contact de (2) et (3), en tenant compte de (5), sont

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{a\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \\ y &= \frac{b\sin\varphi}{\cos 2\varphi} \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

L'équation (2) représente une ellipse si

$$\lambda^2 - a^2b^2 < 0,$$

une hyperbole si

$$\lambda^2 - a^2b^2 > 0.$$

En tenant compte de (5) on trouve que l'on a une ellipse si

$$\sin^2 2\varphi < 1\,;$$

pour avoir une hyperbole il faudrait que

$$\sin^2 2\varphi > 1\,:$$

---

gente en A rencontre la droite qui joint A' au centre du cercle en un certain point I. Le lieu de I est la quartique qui correspond à l'équation (1).

Pour montrer l'identité de cet exercice avec la question 38, on pourra s'appuyer sur le théorème suivant, théorème bien connu et d'une démonstration très simple : *Les sécantes communes à deux coniques rencontrent une tangente commune en deux points qui forment avec les points de contact une division harmonique.* Ce théorème peut, d'ailleurs, être considéré comme constituant un cas particulier du théorème de Desargues. G. L.

donc il n'y a pas de points provenant des hyperboles S, c'est-à-dire que si on considère une hyperbole S et l'ellipse E, il n'y aura pas de système de tangentes communes réelles pour ces deux coniques.

Construisons maintenant la courbe :

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\cos 2\varphi},$$

$$y = \frac{b \sin \varphi}{\cos 2\varphi}.$$

L'équation cartésienne est

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 - a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2) = 0. \qquad (1)$$

Il y a quatre asymptotes réelles, deux à deux parallèles. qui correspondent respectivement aux équations :

$$y = \frac{b}{a}x \pm \frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$y = -\frac{b}{a}x \pm \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Il est dès lors facile de construire la courbe.

Celle-ci se compose de quatre branches hyperboliques ordinaires, inscrites dans les angles formés par les asymptotes ; ces branches ont pour sommets respectifs les sommets de l'ellipse proposée.

Nota. — Solution analogue par M. X. Barthe.

QUESTION 127

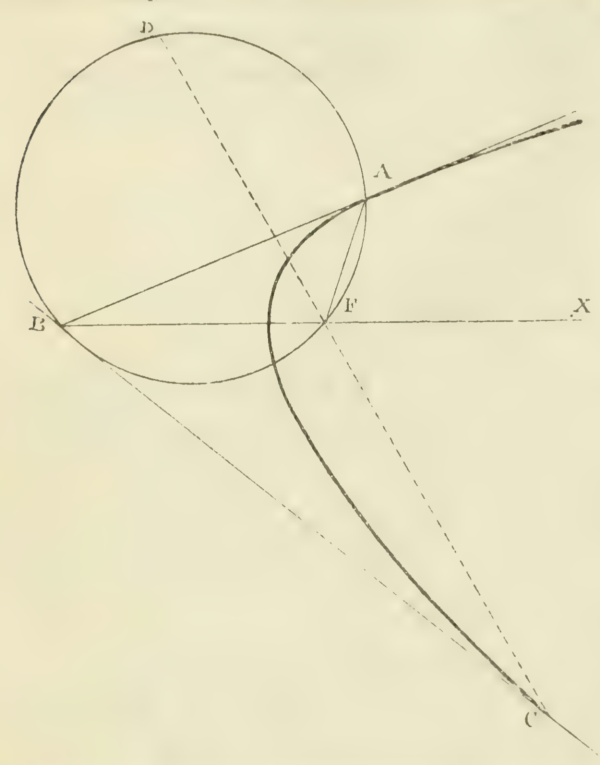
Solution par M. J. Giat, élève de Mathématiques spéciales, Lycée Saint-Louis (classe de M. Lucas).

Un cercle passe par le foyer d'une parabole et rencontre cette courbe au point A. *En ce point, on mène la tangente à la parabole, laquelle rencontre le cercle au point* B. *Au point* B *on mène la tangente au cercle. Démontrer que cette droite est tangente à la parabole.*

Dans une parabole :

1° La droite qui joint le foyer au point d'intersection de

deux tangentes, est bissectrice de l'angle sous lequel on voit du foyer leur corde de contact;



2° L'angle compris entre deux tangentes est la moitié de l'angle sous lequel est vue du foyer leur corde de contact.

Tout revient donc à démontrer ici que l'angle AFX est égal à l'angle ABC. C'est, en effet, ce qui a lieu, car ils ont pour supplément l'angle AFB.

Réciproquement. — Tout cercle tangent à BC au point B et passant par le point de contact A de la tangente BA, passe aussi par le foyer F, car ABC est la limite d'un triangle formé par trois tangentes à une parabole, et l'on sait que le cercle circonscrit à cette parabole passe par le foyer.

Nota. — Ont résolu la question : MM. Vacquant, ancien élève de Mathématiques spéciales, à Lille; Bèche, professeur à l'école normale de Tulle: F. Gascouin, élève au lycée Henri IV; Léon Clément, au lycée de Rouen; Amaury de Kerdrel, au lycée de Brest.

M. Lamotte, élève au lycée de Versailles, généralise la question proposée.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(*Suite*, voir p. 45.)

II. — *Mathématiques spéciales.*

1. Première leçon sur les déterminants.
2. Multiplication des déterminants. — Déterminants adjoints.
3. Résolution d'un système de n équations linéaires à p inconnues. Cas où les équations sont homogènes.

4. Décomposition d'une fonction homogène du second degré de n variables, en une somme de carrés de fonctions linéaires homogènes des mêmes variables. — En supposant ces fonctions linéaires indépendantes, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre des carrés se réduise à $n - p$.

5. Première leçon sur les fractions continues.

6. Fractions continues illimitées; fractions continues périodiques; développement des irrationnels du deuxième degré en fractions continues.

7. Première leçon sur les séries.

8. Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment. — Limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ pour une valeur réelle de x, quand m croît indéfiniment.

9. Définition de la fonction a^x. — Étude de cette fonction.

10. Application de la théorie des dérivées à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable. — Exemples.

11. Séries de Taylor et de Mac-Laurin. — Application au développement de arc tg x en série; calcul du nombre π.

12. Plus grand commun diviseur de deux ou de plusieurs polynômes. — Démontrer que si les polynômes u et v sont premiers entre eux, il existe un seul système de deux polynômes A et B, tel que l'on ait identiquement $Au + Bv = 1$, le degré de A étant inférieur à celui de v et le degré de B étant inférieur à celui de u.

13. Condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions entières d'une même variable admettent un diviseur commun. Application à l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques et entières.

14. Transformation des équations algébriques dans le cas où chaque racine de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle d'une ou de deux racines de l'équation donnée. — Exemples.

15. Abaissement des équations algébriques. — Exemples.

16. Règle des signes de Descartes.

17. Théorème de Rolle. — Applications.

18. Théorème de Sturm.

19. Résumer la marche à suivre pour résoudre une équation algébrique à coefficients numériques. — Méthode d'approximation de Newton.

20. Résolution de l'équation du quatrième degré. — Discussion dans le cas où les coefficients de cette équation sont des quantités réelles.

21. Résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

22. Décomposition d'une fraction rationnelle en une somme de fractions simples.

23. Connaissant cos a, calculer cos $\frac{a}{m}$; connaissant sin a, trouver sin $\frac{a}{m}$.

24. Résolution de l'équation $x^m - 1 = 0$; application au calcul des côtés des polygones réguliers.

25. Asymptotes des courbes rapportées à des axes de coordonnées rectilignes (première leçon).

26. Recherche des sécantes communes à deux coniques. — Application à la détermination du nombre réel des points réels ou imaginaires communs à ces courbes.

27. Théorie des foyers dans les courbes du second ordre (première leçon).

28. Figures polaires réciproques. — Cas où la conique directrice est un cercle. — Applications.

29. Étant donnée l'équation d'une courbe rapportée à des axes de coordonnées rectilignes, trouver l'équation générale des courbes homothétiques à

la courbe donnée, et l'équation générale des courbes semblables à la même courbe.

30. Théorème des projections. — Application à la transformation des coordonnées dans l'espace (Première leçon).

31. Equation du plan tangent à une surface en un point de cette surface. — Problèmes sur les plans tangents aux surfaces du second ordre.

32. Recherche de l'équation d'une surface définie géométriquement. — Exemples.

33. Plans diamétraux dans les surfaces du second ordre.

34. Etude algébrique de l'équation en S.

35. Sections circulaires des surfaces du second degré. — Cas où la surface est rapportée à des axes rectangulaires quelconques.

36. Mener par une droite donnée un plan tangent à un hyberpoloïde de révolution à une nappe (Géométrie descriptive).

(A suivre.)

QUESTION PROPOSÉE

191. — Si une courbe parabolique représentée par

$$y = (x - a)(x - b) \dots (x - k)$$

rencontre en A, B, ... K l'axe des abscisses, et que A′, B′, ... H′ soient les pieds des ordonnées des points pour lesquels la tangente est parallèle à cet axe on a

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \dots + \frac{1}{AK} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{AA'} + \frac{1}{AB'} \dots + \frac{1}{AH'}\right].$$

(E. Catalan.)

Une lettre de M. Genocchi que j'ai reçue quand ce numéro était déjà composé m'apprend la mort de M. S. Realis, décédé à Turin, le 9 février dernier. M. Realis, dans ces dernières années avait porté un grand intérêt à cette publication et je me propose, si les documents que j'ai demandés me sont envoyés, de consacrer dans le prochain numéro du Journal (partie élémentaire) à cet homme aimable, quelques lignes de notice nécrologique; désirant payer ainsi à sa mémoire une partie de la reconnaissance que j'ai vouée à ce savant bienveillant, pour les encouragements et les conseils qu'il m'a toujours si obligeamment donnés. G. L.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3994-6.

SUR LE POINT DE STEINER

Par M. **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

(*Suite et fin*, voir p. 51.)

7. — Avant d'aller plus loin, nous croyons utile de rappeler que le point de Steiner est : 1° le pôle trilinéaire de GK ; 2° le conjugué isogonal du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à OK ; 3° le conjugué isotomique du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à OG. Ce dernier point que nous désignons par F', est lui-même le conjugué isogonal du pôle trilinéaire F de la droite OK.

La transformée isogonale de la droite OK a pour équation

$$\frac{\sin(A_2 - A_3)}{\delta_1} + \frac{\sin(A_3 - A_1)}{\delta_2} + \frac{\sin(A_1 - A_2)}{\delta_3} = 0.$$

C'est l'hyperbole des neuf points qui a été étudiée récemment par M. Brocard (*). Cette courbe est aussi le lieu des points de concours C des droites joignant les points A_1, A_2, A_3 aux sommets C_1, C_2, C_3 de trois triangles isoscèles semblables, $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$, $A_1A_2C_3$ construits sur les côtés du triangle fondamental.

Ce lieu ayant été signalé, pour la première fois, par M. Kiepert (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 40-42), on pourrait l'appeler *hyperbole de Kiepert.*

Nous allons faire connaître quelques nouvelles propriétés de cette conique.

Le pôle d'homologie a pour coordonnées normales

$$\sin(A_2 - A_3), \quad \sin(A_3 - A_1), \quad \sin(A_1 - A_2).$$

C'est donc le conjugué isogonal de F ou le point F' à l'infini sur la direction perpendiculaire à OG. En d'autres termes,

(*) *Journal de Math. spéc.*, 1884, p. 197-209 et 1885, p. 12, 30, 58, 76, 104, 123. L'identité de l'hyperbole des neuf points avec le lieu de Kiepert n'a pas été énoncée d'une manière explicite dans ces articles, bien qu'elle résulte immédiatement des points communs A_1, A_2, A_3, H, G, D.

N.-B. — Voyez plus loin, à ce propos, une lettre de M. Brocard. G. L.

les tangentes menées par A_1, A_2, A_3 *à l'hyperbole de Kiepert forment un triangle circonscrit* $F'_1F'_2F'_3$, *tel que les droites* $A_1F'_1$, $A_2F'_2$, A_1, F'_3 *sont perpendiculaires à* OG.

La transformation par polarité trilinéaire ou par points réciproques donne les théorèmes suivants :

L'hyperbole de Kiepert est le lieu du pôle trilinéaire d'une droite qui se déplace en restant perpendiculaire à OG. *Elle est aussi le lieu du réciproque d'un point mobile sur la droite* GK.

Soit φ l'angle à la base des triangles isoscèles $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$, $A_1A_2C_3$. Le rapport des distances de C à a_2 et a_3 est égal à celui des distances de C_1 à ces côtés ou égal à

$$\sin(A_3 - \varphi) : \sin(A_2 - \varphi).$$

On en déduit facilement que les coordonnées normales de C sont proportionnelles à

$$\frac{1}{\sin(A_1 - \varphi)}, \quad \frac{1}{\sin(A_2 - \varphi)}, \quad \frac{1}{\sin(A_3 - \varphi)}.$$

Aux valeurs $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ correspondent, respectivement, les points G et H. Lorsque $\varphi = A_1$, C coïncide avec le sommet A_1 ; de là la construction suivante de la tangente en A_1 : Construire sur A_2A_3 un triangle isoscèle dont l'angle à la base est égal à A_1, et en joindre le sommet à A_1.

Les points C_1, C_2, C_3 peuvent coïncider avec les sommets du triangle de Brocard $B_1B_2B_3$; alors φ est égal à l'angle α de Brocard, de sorte que les coordonnées de D sont inversement proportionnelles à $\sin(A_1 - \alpha)$, $\sin(A_2 - \alpha)$, $\sin(A_3 - \alpha)$.

Pour obtenir les directions des asymptotes, on peut exprimer que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 sont parallèles ou que le point C est sur la droite à l'infini, ce qui donne

$$\sum \frac{\sin A_1}{\sin(A_1 - \varphi)} = 0, \quad \text{ou} \quad \sum \frac{1}{\cot\varphi - \cot A_1} = 0,$$

ou

$$3\cot^2\varphi - 2\cot\alpha\cot\varphi + 1 = 0.$$

Mais il existe aussi deux valeurs de φ, pour lesquelles les points C_1, C_2, C_3 sont en ligne droite ; elles sont données par l'équation

$$\cot^2\varphi - 2\cot\alpha\cot\varphi + 3 = 0.$$

On voit qu'elles sont complémentaires de celles qui transportent le point C à l'infini.

L'hyperbole de Kiepert coupe le cercle $A_1A_2A_3$ en un point qui est déterminé par l'équation

$$\Sigma \sin A_1 \sin (A_1 - \varphi) = 0.$$

On trouve $\operatorname{tg} \varphi = \Sigma \operatorname{cotg} A_1 = \operatorname{cotg} \alpha$, donc les coordonnées de ce point sont proportionnelles à $\sec (A_1 + \alpha)$, $\sec (A_2 + \alpha)$, $\sec (A_3 + \alpha)$. Ce point est celui qui a été désigné par N (*) et qui, sur le cercle $A_1A_2A_3$, est diamétralement opposé au point de Steiner. En effet, 1° le point d'intersection de l'hyperbole avec le cercle est le conjugué isogonal du point à l'infini sur OK ; 2° les conjugués isogonaux des extrémités d'un diamètre du cercle $A_1A_2A_3$ sont à l'infini sur deux directions rectangulaires.

Le point de rencontre de l'ellipse É avec le lieu de Kiepert est déterminé par l'équation

$$\Sigma \frac{\sin (A_1 - \varphi)}{\sin A_1} = 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg} \varphi = \frac{1}{3} \operatorname{cotg} \alpha.$$

Il est à l'intersection des droites joignant A_1, A_2, A_3 aux centres de gravité des triangles isoscèles construits sur a_1, a_2, a_3, et qui déterminent le point N.

8. — On peut généraliser la question précédente (**) en considérant trois triangles semblables quelconques $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$, $A_1A_2C_3$ et en cherchant la condition entre les angles $C_1A_2A_3 = \lambda$, $C_1A_3A_2 = \mu$, $A_2C_1A_3 = \nu$, nécessaire pour que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 concourent en un même point C. Si δ_1, δ_2, δ_3 sont les coordonnées de C, on a l'égalité

$$\frac{\delta_2}{\delta_3} = \frac{C_1A_3 \sin C_1A_3A_1}{C_1A_2 \sin C_1A_2A_1} = \frac{\sin \lambda \sin (A_3 - \mu)}{\sin \mu \sin (A_2 - \lambda)}$$

$$= \frac{\sin A_3}{\sin A_2} \cdot \frac{\operatorname{cotg} \mu - \operatorname{cotg} A_3}{\operatorname{cotg} \lambda - \operatorname{cotg} A_2}, \qquad (3)$$

(*) Nous avons proposé récemment, pour ce point, la dénomination de *point de Tarry*.

(**) Cette généralisation fait l'objet de la question 7, *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. VI, 1882, p. 24. M. Casey, à qui nous avions communiqué quelques-uns des résultats précédents, a démontré ces propositions et d'autres analogues par des procédés très remarquables. (Voir son « Treatise on the Analytical Geometry », pp. 249 et 250.)

et deux autres analogues, qui multipliées l'une par l'autre donnent

$$(\cot\lambda - \cot A_1)(\cot\lambda - \cot A_2)(\cot\lambda - \cot A_3)$$
$$= (\cot\mu - \cot A_1)(\cot\mu - \cot A_2)(\cot\mu - \cot A_3).$$

Cette équation se décompose en deux autres :

$$\cot\lambda - \cot\mu = 0, \quad \cot^2\lambda + \cot\mu\cot\lambda + \cot^2\mu$$
$$- (\cot\lambda + \cot\mu)\cot\lambda + 1 = 0,$$

dont la première correspond à la conique de Kiepert, et dont la seconde, ajoutée à l'identité

$$\cot\lambda\cot\mu + \cot\mu\cot\nu + \cot\nu\cot\lambda - 1 = 0,$$

donne

$$\cot\lambda + \cot\mu + \cot\nu = \cot\alpha.$$

On conclut, de là, que les triangles $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$, $A_1A_2C_3$ doivent avoir même angle de Brocard que le triangle fondamental $A_1A_2A_3$. Un calcul facile en coordonnées cartésiennes montre que les points C_1, C_2, C_3 décrivent trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) passant respectivement par A_1, A_2, A_3 et coupant orthogonalement les cercles dont A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 sont des rayons en grandeur et en position

Si l'on met les équations (3) sous la forme

$$\delta_2 \sin A_2 \cot\lambda - \delta_3 \sin A_2 \cot\mu - \delta_2 \cos A_2 + \delta_3 \cos A_3 = 0, \ldots$$

et qu'on les ajoute ensemble, on trouve

$$(\cot\lambda - \cot\mu)(\delta_1 \sin A_1 + \delta_2 \sin A_2 + \delta_3 \sin A_3) = 0.$$

Le second facteur de cette égalité indique que les droites A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 sont parallèles. On en déduit facilement que les centres de gravité des triangles $A_1A_2C_3$, $A_2A_3C_1$, $A_3A_1C_2$ sont en ligne droite avec G. Ces centres de gravité étant également les sommets de trois triangles semblables construits sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, nous retrouvons ici un résultat déjà signalé par M. M'Cay (*Irish Academy*, 1885) et par nous (*Mathesis*, t. II, pp. 76, 157, 186).

LE CENTRE DE LA CONIQUE DE KIEPERT

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — On sait (*) que la conique de Kiepert est celle qui, en coordonnées barycentriques, correspond à l'équation

$$(b^2 - c^2)\beta\gamma + (c^2 - a^2)\gamma\alpha + (a^2 - b^2)\alpha\beta = 0. \qquad \text{(K)}$$

La détermination du centre ζ de cette conique remarquable n'a pas encore, croyons-nous, donné lieu à une construction élégante et M. Brocard (*loc. cit.*, p. 30), après avoir donné les formules qui permettent de calculer les coordonnées de ce point ajoute : « Ces formules ne semblent pas conduire à un résultat simple. » Voici une remarque, concernant le point ζ, de laquelle résulte une solution assez élégante du problème en question.

2. — Dans une question proposée récemment (**), M. Brocard appelle l'attention sur la polaire du centre de gravité E d'un triangle ABC, relativement au cercle de Brocard.

L'équation d'une conique étant

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

on sait que la polaire d'un point α_0, β_0, γ_0 est représentée par

$$\alpha_0 f'_\alpha + \beta_0 f'_\beta + \gamma_0 f'_\gamma = 0.$$

Pour le point E, centre de gravité du triangle de référence, on a

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0;$$

l'équation de la polaire de ce point est donc

$$f'_\alpha + f'_\beta + f'_\gamma = 0.$$

En appliquant cette formule à l'égalité

$$b^2c^2\alpha^2 + a^2c^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2 - a^4\beta\gamma - b^4\alpha\gamma - c^4\alpha\beta = 0,$$

qui représente le cercle de Brocard, on a

(*) Voyez *Journal*, 1885, p. 12 : *Propriétés de l'Hyperbole des neuf points*, par M. Brocard. Voyez aussi, sur la conique de Kiepert, l'article de M. Neuberg dans le présent numéro (*Sur le point de Steiner*, p. 73).

(**) *Educational Times* (1er mars 1886), question 8485.

$$(b^2 - c^2)^2\alpha + (c^2 - a^2)^2\beta + (a^2 - b^2)^2\gamma = 0. \qquad (1)$$

Nous désignerons la droite qui correspond à cette équation par ε; c'est une droite remarquable du plan d'un triangle et la détermination du centre ζ de la conique de Kiepert découle de la connaissance de ε, comme nous allons l'indiquer.

3. — Cherchons les coordonnées (α_0, β_0, γ_0) de ζ. Le centre d'une conique étant le pôle de la droite de l'infini ($\alpha + \beta + \gamma = 0$), les coordonnées de ce point vérifient les égalités

$$f'_\alpha = f'_\beta = f'_\gamma.$$

Appliquons ces formules à l'équation (K); nous avons, après calcul,

$$\frac{\alpha_0}{(b^2 - c^2)^2} = \frac{\beta_0}{(c^2 - a^2)^2} = \frac{\gamma_0}{(a^2 - b^2)^2}. \qquad (2)$$

Il nous reste à expliquer comment, d'après les formules (1) et (2), la droite ε et le point ζ sont associés l'un à l'autre.

4. — Lorsqu'on joint un point M du plan d'un triangle ABC aux trois sommets, ces droites rencontrent les côtés en M_a, M_b, M_c; les conjugués harmoniques de ces trois points sont situés sur une droite μ; nous dirons pour rappeler cette construction que M et μ sont *harmoniquement associés*.

En représentant par α', β', γ' les coordonnées de M, l'équation de la droite harmoniquement associée est, d'après cela, représentée par

$$\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} + \frac{\gamma}{\gamma'} = 0,$$

et la droite μ^{-1}, transversale réciproque de μ, par

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

En comparant les égalités (1) et (2) on est ainsi conduit au théorème suivant :

Le centre de la conique de Kiepert est le point harmoniquement associé à la transversale réciproque de la polaire du centre de gravité du triangle de référence par rapport au cercle de Brocard.

5. — La droite ε qui, dans la construction que nous proposons, sert à déterminer le centre de la conique de Kiepert, se construit d'ailleurs assez facilement en observant : 1° qu'elle passe par le point de Steiner R; 2° qu'elle est perpendiculaire

à la droite qui joint le point de Tarry N. au centre Z du cercle de Brocard.

Le point de Steiner (R) se détermine par une construction très simple que nous indiquerons bientôt (*); le point de Tarry (N) est, sur le cercle circonscrit, diamétralement opposé; la droite NZ s'obtient en joignant N au centre de gravité (E) du triangle. De ces remarques diverses résulte le tracé de ε et par suite la détermination du point ζ.

6. — Les formules (2) conduisent encore à une remarque bien intéressante, qui m'a été communiquée par M. Neuberg. Cherchons le point ζ_0 *anti-complémentaire* de ζ, point dont les coordonnées α_0, β_0, γ_0 sont proportionnelles à $-\alpha+\beta+\gamma$, $-\beta+\alpha+\gamma$, $-\gamma+\alpha+\beta$, on trouve facilement

$$\alpha_0(b^2-c^2)=\beta_0(c^2-a^2)=\gamma_0(a^2-b^2);$$

ainsi ζ_0 est précisément le point de Steiner. Concluons donc que *le centre de la conique de Kiepert s'obtient en joignant le point de Steiner au centre de gravité, et en partageant cette droite d'une longueur moitié moindre.*

SUR UNE QUARTIQUE UNICURSALE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. — La quartique unicursale que nous avons en vue dans cette Note est celle que M. de Longchamps a envisagée dans son intéressante étude *sur les courbes parallèles et quelques autres courbes remarquables* (**) et dont il a indiqué plusieurs propriétés en émettant le vœu que la théorie de cette courbe fût poussée plus avant.

Cette quartique unicursale que M. de Longchamps désigne par la notation γ_4, et dont on trouvera la figure dans le Mémoire cité (***), possède trois axes de symétrie, trois points

(*) Dans notre étude sur le cercle Δ.

(**) *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, p. 269.

(***) *Ibidem*, 1885, p. 272.

doubles réels, trois tangentes doubles réelles. Elle est définie de la manière suivante :

On prend sur un cercle donné Δ, *à partir d'un point fixe* S, *deux arcs de sens contraires* SA *et* SB *tels que*

$$\text{arc SB} = 2 \text{ arc SA};$$

on joint les points A *et* B *par une droite, et on prend sur cette droite le point* C *tel que* BC = AB. *Le point* C, *lorsqu'on fait varier les points* A *et* B *sur le cercle* Δ, *engendre la courbe* γ_4.

M. de Longchamps a fait connaître l'équation cartésienne et l'équation polaire de la courbe γ_4 en prenant pour axe des x la droite qui joint le centre O du cercle Δ au point S, et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite menée par O. Voici ces équations

$$y^4 + y^2\left(2x^2 + 3Rx - \frac{27}{4}R^2\right) + (x - R)(x - 3R)\left(x + \frac{3R}{2}\right)^2 = 0; \qquad (1)$$

$$\rho^4 - R\rho^3 \cos 3\omega - \frac{27}{4}R^2\rho^2 + \frac{27}{4}R^4 = 0. \qquad (2)$$

R représente le rayon du cercle Δ.

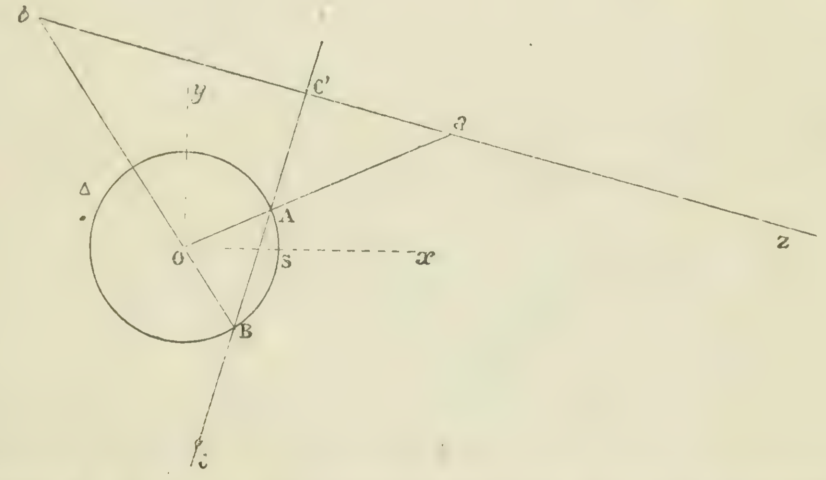
2. — Si deux rayons OA et OB d'un cercle de centre O, et de rayon R, tournent autour de ce centre avec des vitesses qui sont entre elles dans le rapport de n à m, la corde AB qui joint les extrémités de ces rayons enveloppe une épicycloïde décrite par un point du cercle de rayon $\frac{Rm}{m + n}$, roulant sur le cercle de rayon $\frac{R(n - m)}{n + m}$, qui a pour centre le point O (*).

Ici, il faut faire $n = 2, m = -1$. Cela donne pour rayon du cercle roulant $(-R)$, et pour rayon du cercle fixe 3R. Or on sait, par la théorie des roulettes, qu'un cercle de rayon

(*) Ce théorème a été démontré par M. Ph. Gilbert dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (4e année, 1880, p. 159). Dans le cas où $n = 12, m = 1$, on tombe sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre, problème qui avait été traité par M. Mannheim dans son *Cours de géométrie descriptive*. Le même problème a été résolu analytiquement par M. Brocard en 1872 dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (2e série, t. XI, p. 329).

(— R) roulant sur un cercle de rayon 3R, c'est un cercle de rayon R roulant *à l'intérieur* du cercle de rayon 3R. Par suite, *l'enveloppe de la droite* AB *est une hypocycloïde* (C') *à trois rebroussements engendrée par un cercle de rayon* R *roulant dans un cercle de rayon* 3R *et de centre* O.

Il est facile de déterminer le point où la droite AB touche cette hypocycloïde et le centre de courbure correspondant. En effet, soit C' ce point de contact. En C' élevons une perpendiculaire à AB; c'est la normale à l'hypocycloïde. Cette normale coupe aux points a et b les normales OA et OB au



cercle Δ, et on a, pour les expressions, des arcs infiniment petits d (A) et d (B) décrits simultanément par les points A et B,

$$d(\mathrm{A}) = \mathrm{A}a \,.\, \varepsilon,$$
$$d(\mathrm{B}) = \mathrm{B}b \,.\, \varepsilon,$$

ε étant l'angle de contingence de l'hypocycloïde au point C'. Comme on a évidemment

$$d(\mathrm{B}) = 2 \,.\, d(\mathrm{A}),$$

il en résulte que

$$\mathrm{B}b = 2 \,.\, \mathrm{A}a.$$

Mais les angles C'Bb et C'Aa étant égaux, les triangles C'Bb et C'Aa sont semblables. Donc

$$\mathrm{BC'} = 2\mathrm{AC'}$$

ou

$$\mathrm{AC'} = \mathrm{BA},$$

ce qui détermine le point C'.

Soit maintenant z le centre de courbure correspondant. On a

$$d \, . \, \mathrm{BA} = ba \, . \, \varepsilon,$$
$$d \, . \, \mathrm{AC}' = az \, . \, \varepsilon.$$

Par suite,

$$az = ba,$$

ce qui détermine le centre de courbure z.

Avant d'aller plus loin nous ferons une remarque au sujet de l'hypocycloïde décrite par le point C'. Supposons cette hypocycloïde tracée; elle fournira le moyen d'opérer graphiquement la trisection de l'angle. En effet, il suffira de tracer, du point O comme centre, un cercle tangent à une corde sous-tendant, dans le cercle Δ, un arc égal à l'angle à trisecter, et de mener une tangente commune à ce cercle et à l'hypocycloïde considérée.

J'arrive maintenant à la quartique γ_4.

3. — L'ingénieuse détermination de la tangente à γ_4 donnée par M. de Longchamps (§ 37 du Mémoire cité) se simplifie beaucoup par la remarque suivante (voir la figure de la page 272 du tome précédent).

Les triangles APC et AQC' étant semblables, puisque CP est parallèle à C'Q, et la longueur AC étant double de AC', on a

$$\mathrm{QA} = \frac{\mathrm{AP}}{2}.$$

Donc

$$\mathrm{PQ}' = \frac{\mathrm{AP}}{2},$$

et la construction de la tangente se réduit à ceci : *Prolonger le segment de tangente* AP *au cercle* Δ *de la moitié de sa longueur et joindre le point* Q' *ainsi obtenu au point* C.

Remarquons en outre que, si R est le point où la tangente CQ à γ_4 coupe la tangente BP au cercle Δ, le théorème des transversales donne

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} \cdot \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RP}} \cdot \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{QA}} = 1$$

ou

$$2 \cdot \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RP}} \cdot \frac{1}{3} = 1;$$

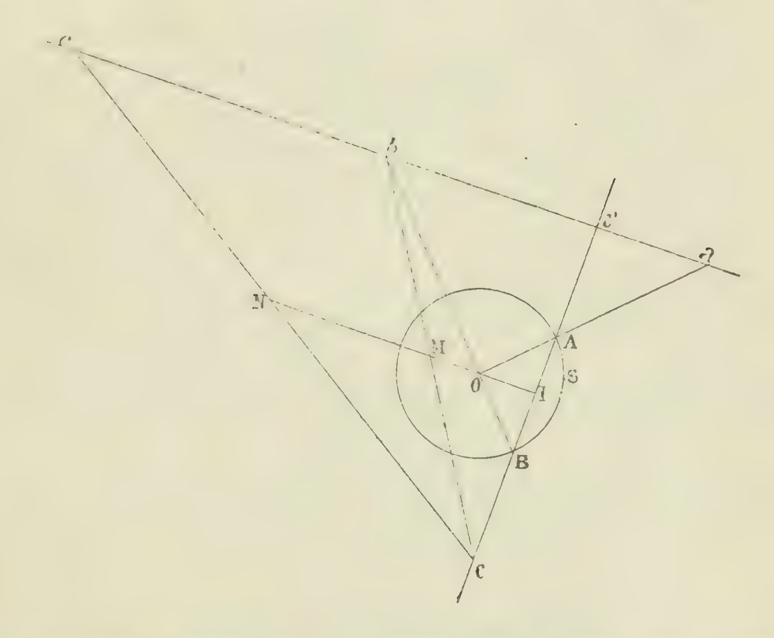
d'où l'on tire

$$\frac{RB}{RP} = \frac{3}{2},$$

et, par suite,

$$RP = 2 \, . \, PB.$$

4. — Soit Cc la normale au point C à la quartique γ_4.



Cette normale coupe en c la normale à l'hypocycloïde enveloppe de AB, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en C′ à AB. On a

$$d.AB = ab.\varepsilon$$
$$d.BC = bc.\varepsilon$$

et comme AB = BC,

$$qa = bc.$$

Du point O abaissons sur AB la perpendiculaire OI; cette droite coupe les droites Cb, Cc aux points M et N.

OI est parallèle à ac; de plus I est le milieu de CC′. Donc

$$IM = \frac{C'b}{2} = ac',$$

$$MN = \frac{bc}{2} = \frac{3 \, . \, ac'}{2}.$$

Mais les triangles OIA et $aC'A$ donnent

$$OI = \frac{ac'}{2}.$$

Donc

$$OM = IM - IO = \frac{ac'}{2} = IO,$$

$$MN = 3.IO,$$

et, par suite,

$$ON = 4IO.$$

De là ce théorème :

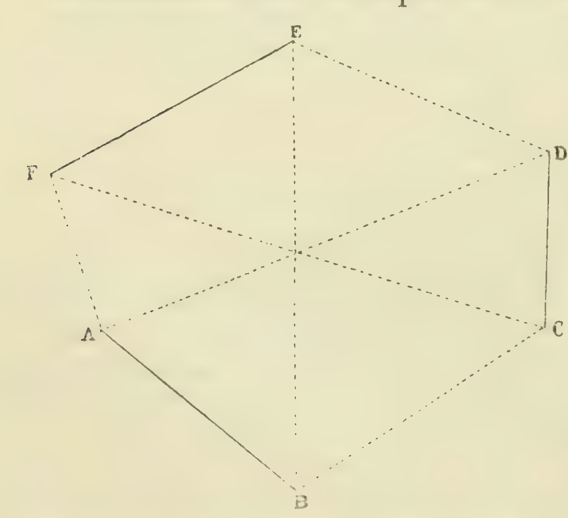
Si du centre O *on abaisse la perpendiculaire* OI *sur la droite* AB *et que l'on porte sur cette droite le segment* ON *égal au quadruple de* IO, *la droite* CN *est normale en* C *à la quartique* γ_4. Ce théorème donne une détermination simple de la normale, et, par suite, de la tangente.

(A suivre.)

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME DE BRIANCHON

Par M. **Darzens**, élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Considérons une conique et un hexagone *abcdef* qui lui est circonscrit ; il est bien évident que cette conique peut toujours être regardée comme le contour apparent d'un hyperboloïde ; et, alors, chaque côté de l'hexagone sera la projection de deux génératrices de systèmes différents de cet hyperboloïde. Cela étant, formons dans l'espace, au moyen de ces génératrices, un hexagone gauche qui se projette sui-



vant *abcdef* et dont deux côtés consécutifs sont, par conséquent, de systèmes différents.

Soit ABCDEF un tel hexagone dans lequel les génératrices d'un système sont marquées en traits pleins et celles de l'autre en traits ponctués. AB et ED, étant de systèmes différents, se rencontrent et déterminent un plan. Il en sera de même : 1° de AF associé à DC; 2° de BC associé à FE. Ces trois plans ainsi définis se coupent deux à deux suivant trois droites qui sont évidemment concourantes. Or il est facile de voir que l'intersection du plan ABED et du plan AFDC est la droite AD, qui joint deux sommets opposés de l'hexagone; il en sera de même pour les deux autres droites EB et FC et le théorème de Brianchon se trouve ainsi démontré.

Dans le cas où la conique proposée est une parabole, on doit prendre, pour reproduire le raisonnement précédent, un paraboloïde hyperbolique.

SUR UN NOUVEAU CERCLE REMARQUABLE
DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 57.)

8. Théorème. — *Le cercle* Δ *est orthogonal aux cercles décrits des milieux des côtés du triangle* ABC, *comme centres, avec les médianes correspondantes pour rayons.*

En effet si, dans l'équation

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos C - 2cx \cos B - 2cy \cos A + c^2 = 0,$$

on substitue aux coordonnées courantes celles du milieu de AB $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, on a

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab \cos C}{4}.$$

Cette expression représente bien le carré de la longueur de la médiane issue du sommet C.

La proposition en question se trouve ainsi démontrée et, en nous rappelant la définition de Δ, pour la rapprocher de la propriété précédente, nous voyons déjà que Δ *est orthogonal à six cercles* ayant pour centres les sommets ou les milieux des côtés du triangle, et pour rayons : les uns, les côtés du triangle; les autres, les médianes. Mais nous allons montrer que cette double propriété rentre dans un théorème plus général que nous allons établir.

9. Théorème. — *Si l'on considère sur un des côtés* BC *du triangle* ABC *deux points isotomiques* (*) I, I′, *le cercle* Δ *est orthogonal au cercle décrit du point* I *comme centre avec* AI′ *pour rayon.*

En effet, soit $CI = x_0$; la puissance ζ du point I est

$$\zeta = x_0{}^2 - 2cx_0 \cos B + c^2,$$

ou

$$\zeta = (x_0 - c \cos B)^2 + c^2 \sin^2 B.$$

D'ailleurs, on a

$$CI = x_0 = BI',$$

et

$$BH = c \cos B,$$

H désignant le pied de la hauteur issue de A.

Ces égalités donnent

$$x_0 - c \cos B = BI' - BH = - I'H,$$

et, par suite,

$$\zeta = \overline{I'H}^2 + c^2 \sin^2 B = \overline{I'H}^2 + \overline{AH}^2,$$

ou, finalement,

$$\zeta = \overline{AI'}^2.$$

Ainsi Δ est orthogonal au cercle décrit de I comme centre, avec AI′ pour rayon.

On observera qu'en plaçant le point I en C on a les trois cercles décrits des sommets du triangle avec les côtés correspondants pour rayons; en supposant ensuite le point I en M,

(*) J'appelle ainsi deux points symétriques par rapport au milieu du segment BC. Le terme *isotomique* a été proposé par M. Neuberg pour désigner les points que je nomme *réciproques* : cette dernière expression me paraît préférable, mais le mot de M. Neuberg s'applique remarquablement bien aux points I, I′ dont il est ici question.

milieu de BC, les deux points isotomiques se confondent et l'on retrouve les trois cercles que nous avons considérés dans le paragraphe précédent.

En résumé, le cercle Δ jouit de la propriété qui nous semble bien remarquable d'être orthogonal à un système de cercles, triplement infini, cercles se rattachant au triangle ABC par la construction simple que nous venons d'indiquer.

10. Le cercle Δ et le cercle circonscrit. — Cherchons les points communs à Δ et au cercle circonscrit.

L'équation (§ 3, p. 58) :

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

prouve que l'axe radical de Δ et du cercle circonscrit est représenté par l'égalité

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0.$$

La droite δ qui correspond à cette équation et que l'étude du cercle Δ met en évidence est une des droites remarquables du plan d'un triangle; nous allons indiquer quelques-unes de ses propriétés.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

4[illegible]. — *Sur une droite Δ, on considère deux points mobiles* A, B *décrivant sur cette droite deux divisions homographiques : trouver l'enveloppe des cercles* Γ *décrits sur* AB *comme diamètre.*

Soit O l'origine des divisions homographiques en question ; en posant

$$OA = \alpha, \qquad OB = \beta,$$

on a, par hypothèse, entre les variables α, β la relation

$$K\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = 0.$$

On doit alors, dans cette question, distinguer plusieurs cas, suivant que le paramètre K est nul ou différent de zéro, et suivant que la relation est, ou n'est pas en involution.

Premier cas. K = 0. — La relation homographique proposée est alors

$$a\alpha + b\beta + c = 0. \qquad (1)$$

Changeons l'origine des divisions et posons

$$\alpha = \alpha' + t, \qquad \beta = \beta' + t;$$

l'égalité (1) devient

$$a\alpha' + b\beta' + at + bt + c = 0.$$

Deux cas se présentent alors tout naturellement si l'on veut disposer du paramètre t de façon à simplifier l'équation homographique, et, en posant, dans cette intention,

$$t(a + b) + c = 0.$$

Ces deux cas que nous devons distinguer ici correspondent aux hypothèses :

$$a + b = 0, \qquad a + b \neq 0.$$

1° Soit d'abord $a + b = 0$; alors a et b ne sont pas nuls si l'on ne veut pas que l'égalité (1) représente une impossibilité ou une indétermination. Supposons donc $a \neq 0$, l'égalité (1) prouve que

$$\alpha - \beta = -\frac{c}{a},$$

et que, par suite, la longueur AB est constante. L'enveloppe des cercles Γ est donc constituée par l'ensemble de deux droites parallèles à AB.

2° Soit maintenant $a + b \neq 0$. Dans ce cas, on peut résoudre l'équation (2) par rapport à t; et, en posant

$$t = -\frac{c}{a + b},$$

la relation homographique proposée prend la forme réduite

$$a\alpha' + b\beta' = 0. \qquad (3)$$

Il est facile de vérifier que les cercles Γ enveloppent un système de deux droites passant par la nouvelle origine.

L'équation de Γ étant

$$x^2 + y^2 - \lambda x + \mu = 0,$$

on a

$$\alpha' + \beta' = \lambda, \qquad \alpha'\beta' = \mu. \qquad (4)$$

L'élimination de α' et de β' entre (3) et (4) donne

$$\lambda^2 ab + \mu(a - b)^2 = 0.$$

Si $a = b$, hypothèse qui correspond au cas où la relation donnée est en involution, on a $\lambda = 0$, les cercles proposés sont concentriques et ils passent doublement par les ombilics du plan.

Au contraire, si l'on suppose $a - b \neq 0$, on a

$$x^2 + y^2 - \lambda x - \frac{\lambda^2 ab}{(a-b)^2} = 0.$$

et l'enveloppe des cercles Γ est représentée par l'équation

$$x^2(a+b)^2 + 4aby^2 = 0.$$

L'enveloppe demandée est constituée par l'ensemble de deux droites passant par l'origine ; ces droites sont réelles ou imaginaires suivant que ab est négatif ou positif.

Second cas. $K \neq 0$. — Revenons maintenant au cas général et supposons K différent de zéro.

L'équation homographique est alors

$$K\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = 0,$$

et l'on doit encore distinguer deux cas, suivant que $a - b$ est nul ou différent de zéro.

1° Si $a - b = 0$, auquel cas l'équation homographique est en involution, les égalités

$$\alpha\beta + a(\alpha + \beta) + c = 0, \qquad \alpha + \beta = \lambda, \qquad \alpha\beta = \mu,$$

donnent, entre les paramètres λ et μ, la relation

$$\mu + a\lambda + c = 0.$$

L'équation générale des cercles Γ est alors

$$x^2 + y^2 - \lambda(x + a) - c = 0,$$

ils passent par deux points fixes, résultat bien connu.

2° Abordons enfin le cas général et supposons $a - b \neq 0$. Nous pouvons toujours poser $K = 1$ et prendre l'équation homographique sous la forme

$$\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = 0.$$

L'élimination de α et de β entre cette équation et les relations :

$$\alpha + \beta = \lambda, \qquad \alpha\beta = \mu,$$

donne

$$-\mu(a-b)^2 = (c + b\lambda + \mu)(c + a\lambda + \mu).$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$\frac{\mu(a-b)}{\mu + b\lambda + c} = \frac{\mu + a\lambda + c}{b - a} = t.$$

De ces proportions on tire, après calcul :

$$\lambda(a - t) = t^2 + (b - a)t - c,$$
$$\mu(a - t) = ct - bt^2.$$

L'équation générale des cercles Γ est donc

$$t^2(x + b) + t[x^2 + y^2 + x(b - a) - c] + a(x^2 + y^2) + cx = 0.$$

L'enveloppe cherchée s'obtient en exprimant que cette équation en t a ses racines égales et l'on a, finalement,

$$(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2)(a + b) + x^2 [(a + b)^2 + 2c] + 2y^2(2ab - c) + 2cx(a + b) + c^2 = 0.$$

Cette équation représente deux cercles (*). On peut s'en assurer en appliquant à cette relation le procédé que nous avons indiqué (**) pour décomposer en deux facteurs les quartiques bicirculaires, quand la décomposition est possible. On trouve ainsi que l'équation précédente peut s'écrire :

$$[x^2 + y^2 + x(a + b) + c]^2 + 4y^2(ab - c) = 0.$$

Sous cette forme on voit nettement que l'enveloppe demandée est l'ensemble de deux cercles réels, imaginaires ou coïncidents suivant le signe de la quantité $ab - c$.

En posant

$$c - ab = h^2,$$

les cercles trouvés sont représentés par

$$x^2 + y^2 + x(a + b) \pm 2hy + ab + h^2 = 0.$$

La réalité de ces cercles, sans qu'il soit nécessaire de recourir au discriminant, résulte de la forme même de cette équation qui peut s'écrire :

$$(x + a)(x + b) + (y \pm h)^2 = 0,$$

forme sous laquelle des solutions réelles sont évidentes.

Les calculs précédents sont sensiblement abrégés en prenant pour origine un des points doubles des divisions homographiques données. Mais ces points peuvent être imaginaires et, pour généraliser les résultats obtenus, il est alors nécessaire d'invoquer le principe de continuité de Poncelet.

(A suivre.)

(*) C'est par erreur que cette équation a été donnée (Kœhler, *Ex. de géom. an.*, p. 19) comme représentant une courbe du quatrième ordre se décomposant en deux cercles quand $a = b$. Elle représente toujours deux cercles ; seulement, si $a = b$, les cercles Γ passent par deux points fixes.

(**) *Journal*, 1881 ; p. 36.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Brocard.

... Je m'empresse de vous accuser réception et de vous remercier de la très intéressante remarque de M. Neuberg. L'identité de la conique de Kiepert avec l'hyperbole équilatère des neuf points m'avait entièrement échappé, bien qu'elle résultât immédiatement des équations

$$\frac{\sin(A - B)}{\gamma} + \frac{\sin(C - A)}{\beta} + \frac{\sin(B - C)}{\alpha} = 0, \quad (1)$$

et

$$(a^2 - b^2)\, ab\alpha\beta + (c^2 - a^2)\, ac\alpha\gamma + (b^2 - c^2)\, bc\beta\gamma = 0;$$

mais l'idée de les identifier ne se présente point, parce que l'on a moins l'habitude de remplacer sin (A — B), etc., par $\frac{a^2 - b^2}{c}$, que sin A par a, etc.

La remarque de M. Neuberg me semble donc nouvelle, et de nature à augmenter l'intérêt de l'étude de l'hyperbole Γ, qui joue ainsi un rôle plus important dans la géométrie du triangle. Cette hyperbole remarquable méritait donc un examen attentif, et je félicite M. Neuberg d'avoir bien voulu reprendre et compléter mes recherches sur les coniques associées au triangle.

On peut s'étonner qu'aucun géomètre n'ait eu jusqu'à ce jour l'idée de vérifier si l'équation (1) représentait une hyperbole équilatère, et cependant cette vérification était très simple et presque immédiate. A un autre point de vue, la remarque de M. Neuberg est une conséquence des principes posés par M. Mathieu dans l'étude de géométrie comparée fondée sur la transformation par droites symétriques (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 393, 481 et 529). Dans ce mode de transformation, le cercle circonscrit au triangle est la transformée de la droite de l'infini $\Sigma\alpha \sin A = 0$. Il a donc pour équation $\Sigma \frac{\sin A}{\alpha} = 0$. L'hyperbole équilatère Γ est la trans-

formée de la droite OK représentée par l'équation

$$\Sigma\alpha \sin(B - C) = o.$$

Cette hyperbole a donc pour équation $\Sigma \dfrac{\sin(B - C)}{\alpha} = o$.

Les paraboles tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième ont pour équations $a^2\alpha^2 - 4bc\beta\gamma = o$, etc. Les ellipses transformées sont donc représentées par les équations $\dfrac{a^2}{\alpha^2} - \dfrac{4bc}{\beta\gamma} = o$, ou $a^2\beta\gamma - 4bc\alpha^2 = o$, etc.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(*Suite*, voir p. 70.)

Sujets de leçons.

I. — *Mathématiques élémentaires*.

1. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres entiers. (On n'emploiera pas la décomposition en facteurs premiers.)
2. Premières leçons sur les nombres premiers.
3. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Fractions périodiques.
4. Racine carrée des nombres entiers.
5. Mesure des angles.
6. Homothétie (géométrie plane).
7. Polygones réguliers, convexes ou étoilés.
8. Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.
9. Divison harmonique. — Faisceau harmonique. — Pôle et polaire par rapport à deux droites. — Pôle et polaire par rapport à un cercle.
10. Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Axe radical de deux cercles . — Centre radical de trois cercles. — Applications.
11. Transformation par rayons vecteurs réciproques. — Applications.
12. Angles trièdres. — Trièdres supplémentaires — Conditions nécessaires. et suffisantes pour qu'on puisse construire un trièdre avec trois faces données, ou avec trois dièdres donnés.
13. Première leçon sur la mesure des volumes.
14. Figures homothétiques dans l'espace. — Cercle d'homothétie. — Axe d'homothétie. — Plan d'homothétie. — Application à un système de quatre sphères
15. Sphère tangente à quatre plans.
16. Triangles sphériques. — Triangles sphériques polaires réciproques.
17. Aire d'un fuseau, aire d'un triangle sphérique. — Théorème de Lexel.
18. Polyèdres réguliers convexes.

19. Intersection d'une droite avec une ellipse, une hyperbole, une parabole. — Tangentes à ces courbes; problèmes qui s'y rapportent.

20. Étude des sections planes d'un cône de révolution.

21. Division des polynômes.

22. Décomposition d'un trinôme du second degré en une somme ou en une différence de deux carrés. — Application à la résolution de l'équation du second degré, séparation des racines quand elles sont réelles.

23. Étude des variations de grandeur et des changements de signe de la valeur du trinôme $ax^2 + bx + c$, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. — Applications.

24. Équation bicarrée. — Transformation des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

25. Décomposition du trinôme $x^4 + px^2 + q$ en un produit de facteurs réels du second degré; application à la résolution de l'équation bicarrée.

26. Théorème sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs variables dont la somme est constante. — Applications.

27. — Maximum et minimum de la fraction $\dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

28. Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

29. Relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectiligne quelconque.

30. Vitesse dans le mouvement uniforme et dans le mouvement varié. — Étude du mouvement uniformément varié.

31. Composition des mouvements. — Composition des vitesses. — Composition de deux mouvements rectilignes et uniformément variés.

32. Réduction à deux forces d'un système de forces appliquées à un corps solide. — Conditions d'équilibre.

33. Définition et détermination de la longitude et de la latitude d'un point du globe terrestre.

34. Cartes géographiques (première leçon).

35. Éclipses de lune.

36. Méthodes des rabattements. — Des changements de plan, des rotations en géométrie descriptive. — Applications.

QUESTION 106

Solution par M. Paul BOURGAREL, à Antibes.

Si A *et* A′ *sont deux polynômes de degré* n *à coefficients réels, et si* B *et* B′ *sont deux polynômes de degré moindre que* 2n, *on ne peut avoir l'identité*

$$A^3 + B = A'^3 + B' \qquad (1)$$

sans avoir les deux suivantes :

$$A = A',$$
$$B = B'.$$

(E. AMIGUES.)

En effet, de l'identité (1) supposée vérifiée on tire

$$(A - A')(A^2 + AA' + A'^2) = B' - B. \qquad (2)$$

Je dis que si $A - A'$ est différent de zéro, cette nouvelle identité est impossible. En effet, si l'on a

$$A = ax^n + \ldots$$
$$A' = a'x^n + \ldots$$

le premier terme du polynôme

$$A^2 + AA' + A'^2$$

est

$$x^{2n}(a^2 + a'^2 + aa'),$$

et le coefficient

$$a^2 + a'^2 + aa'$$

est toujours différent de zéro. Ainsi le premier membre de l'identité (2) est un polynôme dont le degré est certainement égal ou supérieur à $2n$; tandis que le second membre est un polynôme de degré inférieur à $2n$: l'identité (2) est donc impossible si l'on n'a pas

$$A - A' = 0.$$

Il en résulte évidemment

$$B - B' = 0.$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. Léon Clément, à Rouen; Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas); Hugon, à Poligny; Taratte, élève au lycée Saint-Louis.

QUESTIONS PROPOSÉES

192. — 1° Assigner une suite régulière de n nombres triangulaires, dont la somme soit exprimée par la formule

$$S_n = \frac{n(n+1)}{3.4}[(2n+1)m^2 + (4n-1)m + 2(n-1)],$$

pour toute valeur entière de m.

NOTE. — On a, en particulier, pour $m = 0$, le résultat bien connu

$$S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{2.3}$$

$$= 0 + \frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \ldots\ldots + \frac{(n-1)n}{2}.$$

On a de même, pour $m = -2$, le résultat

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$$

$$= \frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)}{2},$$

qui rentre dans le précédent.

Pour $m = 1$, on a

$$S_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{2.3}$$

$$= \frac{1.2}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{5.6}{2} + \frac{7.8}{2} + \ldots\ldots + \frac{(2n-1).2n}{2},$$

résultat facile à vérifier.

2° Même question pour une suite de n nombres triangulaires, dont la somme soit

$$S_n = \frac{n}{3.4}\left[(2n^2+9n+13)m^2 + (4n^2+9n-1)m + 2(n^2-1)\right].$$

Note. — On a, en particulier, pour $m = 1$

$$S_n = \frac{n(n+1)(4n+5)}{2.3}$$

$$= \frac{2.3}{2} + \frac{4.5}{2} + \frac{6.7}{2} + \frac{8.9}{2} + \ldots + \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Ajoutant, à cette valeur de S_n, celle qui correspond à $m = 1$ dans la question I, on trouve

$$\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \ldots + \frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{2.3},$$

ce qui s'accorde avec le résultat relatif à $m = -2$, dans la même question I.

3° Même question, la somme de n nombres triangulaires étant exprimée par la formule

$$S_n = \frac{n}{2.3}\left[(4n^2-1)(m^2+m) + n^2 - 1\right].$$

Note. — On a pour $m = 1$,

$$S_n = \frac{n(3n^2-1)}{2} = \frac{1.2}{2} + \frac{4.5}{2} + \frac{7.8}{2} + \frac{10.11}{2} + \ldots + \frac{(3n-2)(3n-1)}{2}.$$

4° Même question, la somme proposée étant

$$S_n = \frac{n}{2.3}[(4n^2 - 1)m^2 + (4n^2 + 6n - 1)m + n^2 + 3n + 2].$$

Note. — On a, pour $m = 1$,

$$S_n = \frac{3n^2(n+1)}{2} = \frac{2.3}{2} + \frac{5.6}{2} + \frac{8.9}{2} + \frac{11.12}{2} + \ldots\ldots + \frac{(3n-1).3n}{2}.$$

5° Même question pour la somme

$$S_n = \frac{n}{2.3}[(4n^2 + 12n + 11)m^2 + (4n^2 + 6n - 1)m + n + 1]$$

Note. — On a pour $m = 1$,

$$S_n = \frac{3n(n+1)^2}{2} = \frac{3.4}{2} + \frac{6.7}{2} + \frac{9.10}{2} + \frac{12.13}{2} + \ldots\ldots + \frac{3n(3n+1)}{2}.$$

Ajoutant ensemble les valeurs que prend S_n, pour $m = 1$, dans les questions 3°, 4°, 5°, on obtient

$$\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \frac{4.5}{2} + \ldots\ldots + \frac{3n(3n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(9n^2 + 9n + 2)}{2} = \frac{3n(3n+1)(3n+2)}{2.3},$$

ainsi que cela doit être. *(S. Realis.)*

ERRATUM

Page 95 (vol. précédent), ligne 8, au lieu de $(2n - 1)A_n$, lisez $(2n + 1)A_n$.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7796-6.

SUR UNE QUARTIQUE UNICURSALE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

(*Suite*, voir p. 79.)

5. — Le centre de courbure de la courbe γ_1 répondant au point C est le point E, où CN touche son enveloppe. Nous allons déterminer ce point.

Auparavant, remarquons que les courbes (N) et (I) décrites par les points N et I sont homothétiques par rapport au point O, puisque le rapport $\frac{ON}{OI}$ est constant et égal à — 4. Il en résulte que les normales à ces courbes en N et en I sont parallèles entre elles. Or, la courbe (I) est la polaire de l'hypocycloïde (C′) par rapport au point O; la normale Ii à la courbe (I) s'obtient donc en joignant le point I au point de rencontre i des perpendiculaires respectivement élevées à OI et à C′I en O et en C′. Cette droite est évidemment parallèle à CO, puisque le point I est le milieu de CC′.

Donc, *la normale en* N *à la courbe* (N) *est parallèle au rayon vecteur* OC *du point* C.

La perpendiculaire élevée par le centre de courbure E cherché à la droite CN, c'est-à-dire la normale à l'enveloppe de la droite CN, coupe la normale Nn au point n'; la perpendiculaire Oi à ON coupe Nn au point n; la normale CN à la courbe γ_1 coupe au point c la normale C′i à l'hypocycloïde (C′).

Dès lors, ε représentant toujours l'angle de contingence de l'hypocycloïde (C′), c'est-à-dire l'angle de deux positions infiniment voisines de la droite AB, qui est aussi l'angle de deux positions infiniment voisines de la droite IN, ces deux droites étant perpendiculaires, et η désignant l'angle de deux positions infiniment voisines de la droite CN, on a

$$d\,(N) = Nn \,.\, \varepsilon = Nn' \,.\, \eta$$
$$d\,(C) = Cc \,.\, \varepsilon = CE \,.\, \eta.$$

Par suite,

$$\frac{Nn}{Nn'} = \frac{Cc}{CE}.$$

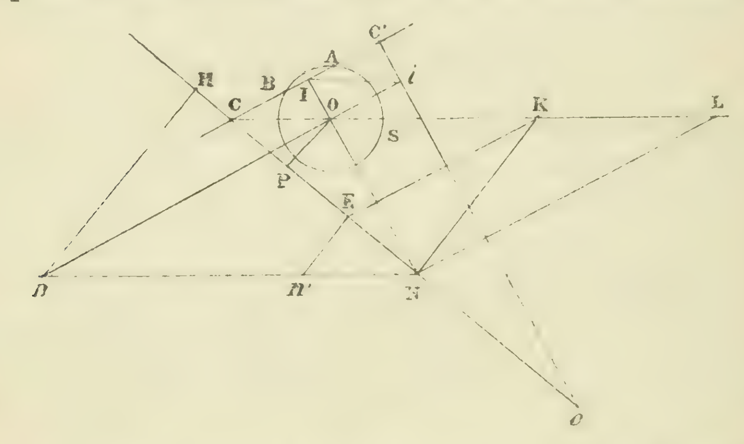
Du point n abaissons sur CN la perpendiculaire nH. Nous pourrons écrire l'égalité précédente

$$\frac{NH}{NE} = \frac{Cc}{CE},$$

ou, en changeant le signe des deux termes du premier membre,

$$\frac{HN}{EN} = \frac{Cc}{CE}.$$

Le point I étant le milieu de CC', et IN étant parallèle à C'c,



on a $Cc = 2CN$. De plus les triangles semblables ONn et IOC donnent nN $= 4$CO, ou, en projetant les segments parallèles nN et CO, en HN et CP, sur la droite CN, HN $= 4$CP. L'égalité précédente deviendra donc

$$\frac{2CP}{EN} = \frac{CN}{CE}.$$

De là on tire

$$\frac{CN}{CE} = \frac{CN + 2CP}{CE + EN} = \frac{CN + 2CP}{CN}.$$

En N, élevons à CN une perpendiculaire qui coupe CO en K, et prolongeons la droite CK de la longueur KL $= 2.$CO. Nous avons

$$\frac{CL}{CK} = \frac{CK + KL}{CK} = \frac{CK + 2CO}{CK} = \frac{CK + 2.CP}{CN}.$$

Donc,

$$\frac{CN}{CE} = \frac{CL}{CK},$$

et nous voyons que les droites LN et KE sont parallèles. Le centre de courbure E est ainsi déterminé et nous pouvons énoncer ce théorème :

Le rayon vecteur OC *du point* C *coupant au point* K *la perpendiculaire* NK *à la normale* CN, *si l'on prend sur ce vecteur le point* L *tel que* KL = 2.CO, *la droite menée par le point* K *parallèlement à la droite* NL *passe par le centre de courbure de la courbe* γ_4 *répondant au point* C.

6. — Une droite quelconque menée par le point O coupe la quartique γ_4 en quatre points dont les vecteurs sont ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4. Si ω représente l'inclinaison de la droite considérée sur la droite OS, ces quatre quantités seront les racines de l'équation (2). De cette équation on déduit que

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \frac{27}{4}R^4$$

$$\rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_3\rho_4 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \rho_2\rho_3\rho_4 = 0$$

$$\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4 = -\frac{27}{4}R^2($$

L'égalité (3) montre que *le produit des vecteurs de quatre points en ligne droite avec le pôle est constant,* remarque déjà faite par M. de Longchamps.

L'égalité (4), qui peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} = 0 \qquad (4')$$

montre que *la somme des inverses de ces vecteurs est nulle.*

L'égalité (5) montre que *la somme des produits deux à deux de ces vecteurs est constante,* et l'égalité (5) divisée par l'égalité (3), que *la somme des inverses de ces produits, augmentée de l'inverse du carré du rayon du cercle* Δ, *est nulle.*

(A suivre.)

SUR UN NOUVEAU CERCLE REMARQUABLE
DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir page 85.)

ÉTUDE DE LA DROITE δ

1° *La droite δ est la polaire du centre de gravité par rapport au cercle Δ.*

En effet, l'équation de Δ étant écrite sous la forme

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + \beta\gamma(b^2 + c^2 - a^2) + \alpha\gamma(c^2 + a^2 - b^2) + \alpha\beta(a^2 + b^2 - c^2),$$

on a

$$f'_\alpha = 2a^2\alpha + \beta(a^2 + b^2 - c^2) + \gamma(c^2 + a^2 - b^2),$$
$$f'_\beta = \alpha(a^2 + b^2 - c^2) + 2b^2\beta + \gamma(c^2 + b^2 - a^2).$$
$$f'_\gamma = \alpha(c^2 + a^2 - b^2) + \beta(b^2 + c^2 - a^2) + 2c^2\gamma,$$

et, par suite,

$$f'_\alpha + f'_\beta + f'_\gamma = 4(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma).$$

La polaire d'un point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ étant, comme l'on sait.

$$\alpha_0 f'_\alpha + \beta_0 f'_\beta + \gamma_0 f'_\gamma = 0,$$

celle du centre de gravité E s'obtiendra en faisant, dans cette égalité,

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0.$$

L'équation de la polaire de E est donc

$$f'_\alpha + f'_\beta + f'_\gamma = 0.$$

En appliquant cette relation à Δ, on a

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0,$$

équation qui représente δ.

2° *La droite δ est parallèle à la droite qui joint les réciproques des points de Brocard.*

Les points de Brocard O, O' ont pour coordonnées barycentriques

$$\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}; \quad \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2};$$

et les réciproques (*) O_0, O'_0 :

$$b^2, c^2, a^2; \; c^2, a^2, b^2.$$

La droite $O_0O'_0$ a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$\alpha(b^2c^2 - a^4) + \beta(a^2c^2 - b^4) + \gamma(b^2a^2 - c^4) = 0.$$

L'équation de δ étant

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0,$$

les droites δ et $O_0O'_0$ seront parallèles si l'on a (**)

$$\begin{vmatrix} b^2c^2 - a^4 & a^2c^2 - b^4 & b^2a^2 - c^4 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

condition visiblement vérifiée.

On peut observer, mais ceci ne se rattache pas assez intimement à l'étude que nous faisons ici pour que nous y insistions autrement, que *la droite* $O_0O'_0$ *est, par rapport à* ABC, *la transversale réciproque de la droite* G, *axe d'homologie de* ABC *et du triangle de Brocard* $A_1B_1C_1$ (***).

3° *Si l'on considère les tangentes menées au cercle circonscrit par les sommets du triangle* ABC, *ces droites, comme l'on sait, rencontrent les côtés opposés en trois points situés sur une certaine droite* δ^{-1}; *la droite* δ *est relativement à* ABC *la transversale réciproque de* δ^{-1}.

(*) Les coordonnées barycentriques de deux points réciproques $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ vérifient les égalités (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885, p. 63.)

$$\alpha'\alpha'' = \beta'\beta'' = \gamma'\gamma''.$$

Pour représenter deux points réciproques nous proposons de les désigner par M et M_0.

(**) Il faut observer que dans le système des coordonnées barycentriques la droite de l'infini est représentée par

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

(***) Les notations que nous employons ici sont celles qui correspondent à la figure connue. (V. *Journal*, 1885, p. 13.)

En effet l'équation de la tangente menée par A au cercle circonscrit est

$$\frac{\beta}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2} = 0,$$

Cette droite et les deux autres droites analogues coupent les côtés de ABC en trois points qui sont situés sur une droite δ^{-1} ayant pour équation

$$\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2} = 0.$$

Ainsi les droites δ et δ^{-1} rencontrent les côtés de ABC en des points qui sont deux à deux isotomiques ; ces droites sont donc deux transversales réciproques.

J'ai précédemment (*) indiqué que δ^{-1} était l'axe radical du cercle de Brocard et du cercle circonscrit ; d'après cela, on peut dire que *les axes radicaux du cercle circonscrit au triangle* ABC 1° *avec le cercle de Brocard,* 2° *avec le cercle* Δ, *sont deux transversales réciproques, par rapport à* ABC.

La droite δ^{-1} dont il est ici question est une de ces droites remarquables qui appartiennent à la géométrie du triangle; elle représente la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit, et M. Neuberg a proposé de la nommer *droite de Lemoine*. Ainsi, *la droite δ est la transversale réciproque de la droite de Lemoine.*

4° *La droite δ passe par le réciproque du point de Steiner.*

Le point de Steiner R (**) a des coordonnées barycentriques $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ vérifiant les égalités

$$\alpha_0 (b^2 - c^2) = \beta_0 (c^2 - a^2) = \gamma_0 (a^2 - b^2);$$

le réciproque R_0 a donc des coordonnées $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ telles que

$$\frac{\alpha_1}{b^2 - c^2} = \frac{\beta_1}{c^2 - a^2} = \frac{\gamma_1}{a^2 - b^2},$$

et l'on a bien

$$a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2) = 0.$$

(*) Voyez *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, p. 127 : *Sur l'hyperbole des neuf points*, par M. H. Brocard.

(**) Voyez *Journal* 1886, p. 7 : (*Sur le point de Steiner*, par J. Neuberg). Le point de Steiner est représenté par la lettre R sur la figure citée

En appliquant cette propriété, il faut observer que la relation

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0,$$

prouve que B_0 est à l'infini, dans la direction de δ. On peut déduire de là une construction du point de Steiner, mais celle que nous indiquons plus loin est plus rapide et plus élégante.

5° *La droite δ est harmoniquement associée au point* D, *centre d'homologie du triangle* ABC *et du triangle de Brocard* $A_1B_1C_1$.

Si l'on joint un point M aux trois sommets d'un triangle ABC, ces droites rencontrent les côtés opposés en des points M_a, M_b, M_c; si l'on prend les points μ_a, μ_b, μ_c conjugués harmoniques de ceux-ci par rapport aux côtés du triangle, ces points sont situés sur une droite Δ_M et nous dirons que M et Δ_M sont harmoniquement associés (*).

Si α_0, β_0, γ_0 désignent les coordonnées d'un point M, l'équation de la droite harmoniquement associée à ce point est, évidemment,

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{\beta}{\beta_0} + \frac{\gamma}{\gamma_0} = 0.$$

Cela posé, les coordonnées du point A_1 sont, comme on sait,

$$a^2, \qquad c^2, \qquad b^2;$$

la droite AA_1 a donc pour équation

$$\frac{\beta}{c^2} = \frac{\gamma}{b^2}$$

et cette droite passe évidemment par le point

$$\alpha = 0, \qquad \beta b^2 = \gamma c^2.$$

Imaginons donc le point dont les coordonnées α', β', γ' vérifient les égalités

$$a^2\alpha' = b^2\beta' = c^2\gamma',$$

les droites AA_1, BB_1, CC_1, concourent en ce point qui est, tout à la fois, la réciproque du point de Lemoine et aussi le centre d'homologie des triangles ABC et $A_1B_1C_1$.

6° *Les points* θ, θ' *communs au cercle circonscrit et à la droite* δ *sont deux points réciproques.*

(*) L'expression que nous adoptons ici nous paraît préférable à celles de *pôle trilinéaire* et de *polaire trilinéaire* qu'avait proposées autrefois M. Mathieu (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 399) et que M. Neuberg a reprises (*Journal* 1886, p. 8).

En effet, leurs coordonnées vérifient les égalités

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0,$$
$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0.$$

Pour reconnaître l'exactitude de la proposition énoncée il suffit de constater que ces équations s'échangent, mutuellement, en y remplaçant α, β, γ, respectivement par $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$.

Ainsi δ est dans la transformation par points réciproques la droite qui correspond au cercle circonscrit.

7° *Les points* O, O' *sont les points communs au cercle circonscrit et à un cercle décrit de l'orthocentre comme centre avec un rayon égal au diamètre du cercle circonscrit.*

Si par les sommets de ABC on mène des parallèles aux côtés opposés, on forme un triangle A''B''C''; soit ζ'' le cercle circonscrit à ce triangle.

La puissance de A par rapport à ζ'' est égale à AB''. AC''; elle est donc égale à $-a^2$. D'après cette remarque, l'équation générale des cercles étant, comme nous l'avons expliqué précédemment

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0.$$

l'équation de ζ'' s'obtient immédiatement en supposant

$$u = -a^2, \quad v = -b^2, \quad w = -c^2;$$

ce qui donne

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) + a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta = 0.$$

L'axe radical de ζ'' et du cercle ζ circonscrit à ABC correspond donc à l'équation

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0,$$

équation qui représente δ.

De cette observation résulte une détermination élégante des points remarquables O, O'; on les obtient en construisant le cercle ζ circonscrit au triangle ABC et un second cercle ayant pour centre le point de concours des hauteurs et pour rayon le diamètre du cercle ζ.

On connaît le centre de ζ''; les points O et O' étant déterminés, comme nous venons de le dire, on déduit de là une construction très simple de ce cercle. *(A suivre.)*

ÉTUDE DES POINTS A L'INFINI

DANS L'INTERSECTION DE DEUX CONIQUES

Par M. **Papelier**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Orléans.

Étant données les coordonnées homogènes d'un point d'un plan x, y, z, si $z = 0$, on dit que ce point est à l'infini dans la direction dont les paramètres sont x et y.

Je me propose, dans cette étude, de déterminer dans quel cas deux coniques ont des points communs à l'infini.

Soient les équations de deux coniques

$$f(xyz) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0 \quad (1)$$

$$f_1(xyz) = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2Dxz + 2E_1yz + F_1z^2 = 0 \quad (2)$$

J'élimine y entre ces deux équations, en supposant C et $C_1 \neq 0$, ce qu'on peut toujours admettre, j'obtiens un résultant

$$R(x.z) = N^2 - MP = 0 ; \quad (3)$$

en posant :

$$N = C(A_1x^2 + 2D_1xz + F_1z^2) - C_1(Ax^2 + 2Dxz + Fz^2),$$
$$M = 2[C(B_1x + E_1z) - C_1(Bx + Ez)],$$
$$P = 2[(Bx + Ez)(A_1x^2 + 2D_1xz + F_1z^2) - (B_1x + E_1z)(Ax^2 + 2Dxz + Fz^2)].$$

Soit x_0z_0 une solution de l'équation (3) ; si, pour cette solution, $M \neq 0$ les équations (1) et (2) ont une solution commune, et une seule,

$$y = -\frac{N}{M}.$$

Si, au contraire, $M = 0$, alors on a aussi $N = 0$ $P = 0$, les équations (1) et (2) ont deux racines communes en y, et on sait que ce cas ne peut se présenter que si x_0z_0 est au moins une racine double de l'équation (3).

Dans tous les cas si y_0 est une solution commune aux deux équations (1) et (2), le point $x_0y_0z_0$ est un point commun aux deux courbes, et on démontre sans peine que les deux coniques ont toujours quatre points communs distincts ou confondus.

Pour que l'un de ces points s'éloigne à l'infini il faudra que $z_0 = 0$, cela revient à dire que le résultant $R(x, z)$ devra contenir z en facteur.

Nous allons chercher à quelles conditions géométriques doivent satisfaire les deux coniques pour qu'il en soit ainsi.

I. — *Les deux coniques n'ont qu'un seul point commun à l'infini.*

Il faut et il suffit que le coefficient de x^4 dans $R(x, z)$ soit nul ou que l'on ait

$$(CA_1 - AC_1)^2 - 4(CB_1 - BC_1)(BA_1 - AB_1) = 0.$$

Cette condition exprime que les deux coniques ont une direction asymptotique commune.

M est ici différent de o : car si $M = 0$, on a $CB_1 - BC_1 = 0$ et il est facile de voir que dans ce cas le résultant contient z^2 en facteur.

Cette direction est nécessairement réelle; son coefficient angulaire est

$$\frac{y}{x} = -\frac{CA_1 - AC_1}{CB_1 - BC_1}.$$

Les deux coniques ne peuvent être que :

Deux hyperboles ayant une asymptote parallèle.

Ou une hyperbole et une parabole, l'axe de la parabole étant parallèle à une asymptote de l'hyperbole.

Le point commun à l'infini est dans la direction de la direction asymptotique commune.

II. — *Les deux coniques ont deux points communs à l'infini.*

D'après ce qui précède nos deux coniques doivent avoir déjà une direction asymptotique commune.

1° Je suppose d'abord qu'elles n'aient qu'une seule direction asymptotique commune ; cette direction est alors réelle; je prends l'axe des x parallèle à cette direction : cela revient à faire $A = 0$, $A_1 = 0$; le résultant s'abaisse au troisième degré en x, et j'écris que le coefficient de x^3z est nul ; j'obtiens

$$(CB_1 - BC_1)(BD_1 - B_1D) = 0.$$

Or $CB_1 - BC_1 \neq 0$, puisque je suppose qu'il n'y a qu'une seule direction asymptotique commune; il reste

$$BD_1 - B_1D = 0.$$

Je dis que B et B_1 sont $\neq o$; en effet, si $B = o$, on doit avoir : soit $B_1 = o$, et alors les deux directions asymptotiques sont communes; soit $D = o$, et alors la conique (1) se compose de deux droites parallèles (hypothèse que j'écarte); ma condition peut alors s'écrire

$$\frac{D}{B} = \frac{D_1}{B_1}.$$

Mes deux coniques sont deux hyperboles et l'asymptote parallèle à l'axe des x est la même.

Ainsi, dans ce cas, nous avons un point double à l'infini dans la direction de l'asymptote commune.

2° Si maintenant mes deux coniques ont mêmes directions asymptotiques, le résultant est encore du deuxième degré en x; on a deux points distincts à l'infini dans les directions asymptotiques.

En résumé, pour que l'intersection de deux coniques présente deux points à l'infini, il faut que ces deux coniques soient :

Deux hyperboles ayant une asymptote commune,

Ou deux hyperboles ayant les asymptotes parallèles,

Ou encore deux paraboles d'axes parallèles,

Ou enfin deux ellipses homothétiques.

III. — *Les deux coniques ont trois points communs à l'infini.*

1° Je suppose encore comme précédemment que les deux coniques n'aient qu'une seule direction asymptotique commune, alors elles doivent déjà avoir une asymptote commune; je prends cette asymptote pour axe des x, cela revient à faire $A = A_1 = D = D_1 = o$.

J'écris que le coefficient de x^2z^2 est nul dans $R(x, z)$ et j'obtiens

$$(CB_1 - C_1B)(BF_1 - B_1F) = o,$$

ou comme

$$CB_1 - C_1B \neq o,$$
$$BF_1 - B_1F = o,$$
$$\frac{F}{B} = \frac{F_1}{B_1}.$$

Faisons $B = B_1$, il vient alors $F = F_1$, les équations des deux coniques deviennent

$$Cy^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$C_1y^2 + 2Bxy + 2E_1yz + F_1z^2 = 0\,;$$

elles ont un point triple à l'infini dans la direction de l'asymptote commune; on dit que cette droite est une asymptote d'*osculation.*

Si x et x_1 désignent les abscisses d'un point de chaque courbe

$$x - x_1 = -\frac{E - E_1}{B_1}z - \frac{C - C_1}{B}y,$$

pour des valeurs suffisamment petites de y, $x - x_1$ a un signe constant, celui de $\dfrac{-E + E_1}{B_1}$, ce qui indique la position des deux courbes par rapport à l'asymptote commune.

On remarquera aussi que le produit des longueurs géométriques des deux axes est le même pour les deux courbes; ce qui peut servir à caractériser l'osculation à l'infini.

2° Supposons maintenant que les deux coniques aient mêmes directions asymptotiques; alors je puis supposer $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, le résultant se réduit au 2e degré de x et j'écris que le coefficient de x^2z^2 est nul.

$$C(D - D_1)^2 + 2B(E_1 - E)(D_1 - D) + A(E_1 - E)^2 = 0.$$

Pour interpréter aisément cette condition, je remarque que les deux courbes ayant mêmes directions asymptotiques sont du même genre; et je suppose trois cas.

a. — Les deux coniques sont deux hyperboles.

Je puis supposer $A = 0$, ma condition devient

$$(D - D_1)[C(D - D_1) - 2B(E - E_1)] = 0,$$

ce qui donne l'une des deux conditions

$$D - D_1 = 0,$$

ou

$$2B(E - E_1) = C(D - D_1).$$

La première exprime que l'asymptote parallèle à Ox est la même dans les deux hyperboles; la deuxième, que l'asymptote non parallèle à Ox est la même.

Dans ce cas on a un point double à l'infini dans la direction de l'asymptote commune et un point simple dans l'autre direction asymptotique.

b. — Les deux courbes sont deux paraboles.

Je peux supposer $A = 0$, $B = 0$: la condition se réduit à

$$D - D_1 = 0.$$

Les deux courbes ont alors pour équation

$$Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + F^2 = 0,$$
$$Cy^2 + 2Dxz + 2E_1yz + F_1z^2 = 0.$$

Cela montre que les deux paraboles sont égales, ont leurs axes parallèles, et tournent leur concavité dans le même sens ; elles ont un point triple è l'infini dans la direction de l'axe.

c. — Les deux courbes sont deux ellipses.

La condition

$$C(D_1 - D)^2 + 2B(E_1 - E)(D_1 - D) + A(E - E_1)^2 = 0$$

ne peut être vérifiée que par

$$E = E_1,$$
$$D = D_1 ;$$

mais dans ce cas le coefficient de xz^3 s'annule dans $R(x, z)$.

En résumé, pour que deux coniques aient trois points communs à l'infini, il faut qu'elles soient suivant les cas :

Deux hyperboles ayant une asymptote commune d'osculation ;

Deux hyperboles ayant une asymptote commune et l'autre direction asymptotique commune ;

Deux paraboles égales, d'axes parallèles, tournant leur convexité dans le même sens.

IV. — *Les deux coniques ont quatre points communs à l'infini.*

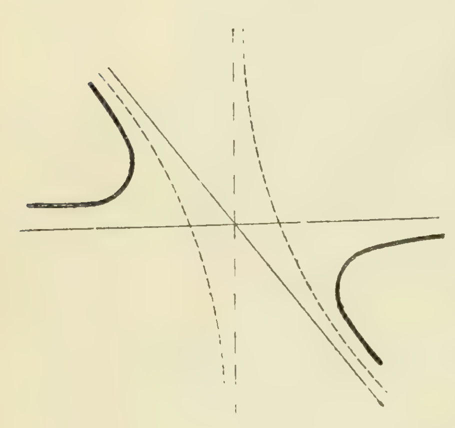
1° Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule direction asymptotique commune, alors les deux hyperboles auront une asymptote d'osculation, nous pouvons supposer $A = A_1 = 0$, $B = B_1$, $F = F_1$, les équations deviennent

$$Cy^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$C_1y^2 + 2Bxy + 2E_1yz + Fz^2 = 0.$$

J'écris que le coefficient de x^2z^3 est nul. J'obtiens alors

$$4BF(C - C_1)(E - E_1) = 0.$$

et comme $$BF(C - C_1) \neq 0,$$
il reste $$E - E_1 = 0,$$
nos deux courbes deviennent
$$Cy^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$C_1y^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$
elles ont un point quadruple à l'infini dans la direction de l'asymptote commune. L'asymptote est dite de surosculation. Les deux courbes ont même sens, et le produit des longueurs géométriques des axes est le même; ces deux propriétés caractérisent la surosculation à l'infini.



2° Supposons que les 2 directions asymptotes soient les mêmes :
$$A = A_1, \quad B = B_1, \quad C = C_1.$$

a. — Les deux courbes sont deux hyperboles.

Elles auront alors une asymptote commune, je la prends pour axe des x, et les équations peuvent s'écrire :
$$Cy^2 + 2Bxy + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$Cy^2 + 2Bxy + 2E_1yz + F_1z^2 = 0.$$

J'écris que le coefficient de xz^3 est nul, j'obtiens
$$(E - E_1)(F - F_1) = 0;$$
d'où $E - E_1 = 0$: la deuxième asymptote est commune.
$F - F_1 = 0$: l'axe de x est asymptote d'osculation.

b. — Les deux courbes sont deux paraboles.

Les équations s'écrivent :
$$Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$Cy^2 + 2Dxz + 2E_1yz + F_1z^2 = 0;$$
on trouve en écrivant que le coefficient de xz^3 est nul :
$$E - E_1 = 0.$$

Les deux paraboles ont même axe, tout en satisfaisant aux conditions précédentes (III, 2° *b*).

c. — Les deux courbes sont deux ellipses.

On doit avoir $E = E_1$ $D = D_1$, elles sont homothétiques et concentriques.

En résumé pour que deux coniques aient quatre points communs à l'infini il faut qu'elles soient :

Deux hyperboles ayant une asymptote de surosculation ;

Deux hyperboles ayant une asymptote d'osculation et l'autre direction asymptotique commune ;

Deux hyperboles ayant les asymptotes communes ;

Deux paraboles égales, ayant même axe et la concavité dans le même sens ;

Deux ellipses homothétiques et concentriques.

QUESTIONS D'EXAMENS

5. — *Déterminer l'asymptote de la courbe représentée par l'équation*

$$\rho = \frac{\sin \omega}{e^{\omega^2} - 1}$$

Pour $\omega = 0$, ρ prend la forme $\frac{0}{0}$.

Mais il est facile de voir que ρ est infini pour $\omega = 0$.

En effet, on a $\sin \omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{6} + \dots$

et $$\omega^2 = 1 + \frac{\omega^2}{1} + \frac{\omega^4}{1 . 2} + \dots$$

On a donc $$\rho = \frac{1 - \frac{\omega^2}{6} + \dots}{\frac{\omega}{1} + \frac{\omega^3}{1 . 2} + \dots}$$

et l'on voit bien que ρ croît indéfiniment quand ω tend vers zéro.

Pour déterminer l'asymptote on observe que

$$\rho \sin \omega = \frac{\sin \omega}{\omega} \; \frac{1 - \frac{\omega^2}{6} \dots}{1 + \frac{\omega^2}{2} \dots},$$

on a donc $$\lim \rho \sin \omega = 1.$$

L'asymptote a pour équation $y = 1$.

6 *. — *Reconnaître que l'équation*

$$x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz(x + y + z) = 1,$$

représente une surface de révolution.

On peut observer que l'équation précédente peut s'écrire

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(xy + xz + yz)^2 = 1$$

et l'on sait que toute équation de la forme

$$f(x^2 + y^2 + z^2, \quad xy + xz + yz) = 0.$$

représente une surface de révolution (*C. M. S.*, t. III, p. 117).

SUR LA QUESTION 75

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION

Il s'agit de démontrer que *le nombre entier*

$$\frac{(\sqrt{2} + 1)^{2n-1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$$

est la somme de deux carrés entiers.

Cette question a été également proposée par M. Catalan dans les *Nouvelles Annales* (*) et dans *Mathesis* (**). Elle est susceptible d'une généralisation intéressante qui a été signalée par M. Catalan lui-même, et qui fait l'objet de la question 290 proposée dans *Mathesis* et résolue dans ce recueil (1886, p. 65). Nous ferons connaître ici cette généralisation qui entraîne la solution immédiate de la question proposée.

Considérons l'équation

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0$$

dont les racines α, β, sont données par les formules

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \beta = a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Posons

$$V_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta};$$

nous en déduisons

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques;* question 1453, résolue t. II. 1883, à la page 476.

(**) *Mathesis*, question 250, résolue t. VI, 1886, p. 62.

$$(V_n)^2(\alpha - \beta)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n, \qquad (1)$$

et

$$(V_{n-1})^2(\alpha - \beta)^2 = \alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2} - 2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}. \qquad (2)$$

D'ailleurs, nous avons

$$\alpha\beta = - b^2$$

et, par suite,

$$\alpha^n\beta^n = (-1)^n b^{2n}, \qquad \alpha^{n-1}\beta^{n-1} = (-1)^{n-1} b^{2n-2}.$$

Ces égalités donnent

$$\alpha^n\beta^n + b^2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} = b^{2n}\left[(-1)^n + (-1)^{n-1}\right],$$

ou

$$\alpha^n\beta^n + b^2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} = 0.$$

Cette remarque étant faite, multiplions les deux membres de (2) par b^2 et ajoutons ensuite cette égalité avec (1); il vient

$$(\alpha^n - \beta^n)^2 + b^2(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2 = \alpha^{2n-1}\left(\alpha + \frac{b^2}{\alpha}\right) + \beta^{2n-1}\left(\beta + \frac{b^2}{\beta}\right).$$

D'autre part, nous avons aussi

$$\alpha + \frac{b^2}{\beta} = 0, \quad \beta + \frac{b^2}{\alpha} = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha + \frac{b^2}{\alpha} = -\left(\beta + \frac{b^2}{\beta}\right) = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nous obtenons ainsi l'identité

$$(\alpha^n - \beta^n)^2 + b^2(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2 = (\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1})\, 2\sqrt{a^2 + b^2},$$

dans laquelle on remplacera : α, par $a + \sqrt{a^2 + b^2}$; β, par $a - \sqrt{a^2 + b^2}$.

En observant que

$$\alpha - \beta = 2\sqrt{a^2 + b^2},$$

nous avons, finalement,

$$\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 + b^2\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)^2 = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha - \beta},$$

ou

$$\text{(A)} \qquad (V_n)^2 + (bV_{n-1})^2 = V_{2n-1}.$$

D'ailleurs, les fonctions V_n vérifient la relation de récurrence évidente

$$V_n = 2aV_{n-1} + b^2V_{n-2}$$

avec les conditions initiales

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 1.$$

Ainsi V_2 est un nombre entier, si nous supposons, bien entendu, que a et b désignent des nombres entiers. Nous voyons alors que V_3, V_4, ... sont des nombres entiers et la formule (A) prouve que *la fonction* V_{2n-1} *est toujours la somme de deux carrés.*

Ce théorème général comprend, comme cas particulier, la démonstration du théorème proposé par M. Catalan. En supposant $a = 1$, $b^2 = 1$, nous avons

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad -\beta = \sqrt{2} - 1, \quad \alpha - \beta = 2\sqrt{2}$$

et, par conséquent,

$$V_{2n-1} = \frac{(1 + \sqrt{2})^{2n-1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}.$$

La formule (A) prouve bien que V_{2n-1} est une somme de deux carrés. (*). G. L.

QUESTION 100

Solution par M. J. T..., élève de Mathématiques spéciales.

On donne une circonférence fixe dont le centre est C *et un point* O *dans son plan. Par le point* O *on mène une tangente* OA *au cercle* C. *Par un point* B *pris sur cette droite* OA *on mène une perpendiculaire à* OA *et une parallèle* BD *à la droite* OC, D *désignant l'un des points où cette parallèle rencontre le cercle* C. *Enfin du point* O *comme centre, avec* OD *pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe en* M *et* M′ *la perpendiculaire élevée à* OA *en* B. *On demande d'étudier le lieu des points* M *et* M′ *quand le point* B *se déplace sur la tangente* OA.

Je prends pour axe des x la tangente OA et pour axe des y la perpendiculaire en O à cette droite. Soient c, a les coordonnées du point C, l'équation du cercle qui a ce point

(*) Nous avons reçu une solution de la question 75 de M. Navel, maître répétiteur à Bar-le-Duc ; solution analogue à celle qui a été publiée dans les *Nouvelles annales* et une autre solution présentant des développements intéressants de M. Jean-Baptiste Marsano, professeur à Gênes.

pour centre est

$$(x-a)^2+(y-c)^2=c^2.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point D de ce cercle; pour avoir le lieu, j'ai à éliminer x_1, y_1 entre les équations

$$(x_1-a)^2+(y_1-c)^2=c^2, \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \qquad (2)$$

$$-y_1=\frac{c}{a}(x-x_1). \qquad (3)$$

Je puis remplacer la seconde équation par une autre, obtenue en retranchant (1) de (2); ceci donne

$$2ax_1+2cy_1=a^2+x^2+y^2. \qquad (4)$$

Tirant x_1 et y_1 des équations (3) et (4) et portant dans (1). j'ai, après simplifications,

$$(x^2+y^2-a^2)^2=4c^2y^2,$$

ou

$$x^2+(y\pm c)^2=a^2+c^2$$

Le lieu se compose donc de deux cercles, ayant OC pour rayon et pour centres deux points ω et ω' situés sur l'axe des y à des distances de l'origine égales à c.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Marchis, élève au lycée de Rouen ; Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas) ; E. Fesquet, élève au lycée de Nîmes; Ferval, au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay); Paul Bourgarel, à Antibes.

Cette question est proposée en exercice dans le *Manuel des candidats à l'Ecole Polytechnique*, de M. Catalan (p. 369); elle se résout aussi très simplement par des considérations géométriques. G. L.

QUESTION 135

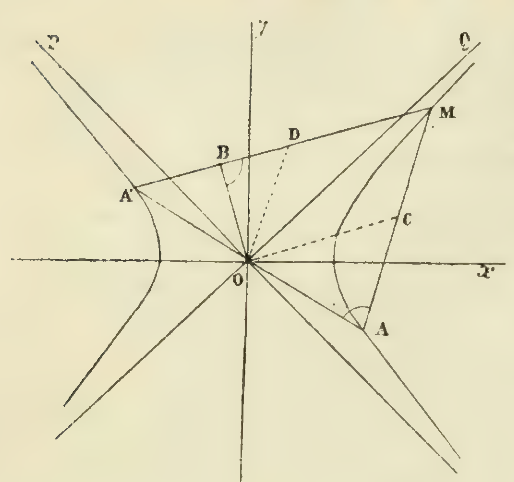
Solution par M. F. Michel, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée de Montpellier.

Si l'on joint un point M *quelconque d'une hyperbole équilatère aux deux extrémités* A *et* A' *d'un diamètre, les cordes conjuguées à ce diamètre sont des antiparallèles de* AA' *dans le triangle* AMA'.

(Em. Lemoine.)

Soit OB le diamètre conjugué de AA'. Il suffit de démontrer l'égalité des angles MBO, MAO.

Les cordes supplémentaires MA, MA′ sont parallèles à deux diamètres conjugués OC, OD; le quadrilatère DOCM est un parallélogramme; par suite les angles A′DO et OCA sont égaux.



D'autre part, dans une hyperbole équilatère, les asymptotes sont les bissectrices des angles de deux diamètres conjugués; on a donc les égalités suivantes :

$$\widehat{BOQ} = \widehat{QOA},$$
$$\widehat{DOQ} = \widehat{QOC}.$$

En retranchant, membre à membre, il vient

$$\widehat{DOB} = \widehat{COA}.$$

Les triangles BDO et OCA ont donc deux angles égaux; les troisièmes le sont aussi, et l'on a

$$\widehat{MBO} = \widehat{MAO} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Solutions analogues par MM. Caronnet, élève de mathématiques spéciales au collège Chaptal; Léon Clément et Lucien Marchis au lycée de Rouen. Solutions analytiques par MM. Giat, élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas); Henri Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

QUESTION 136

Solution par M. Hugon, à Poligny.

Enveloppe des coniques qui ont un diamètre $AA' = 2a$, *donné en grandeur et en position, et le conjugué, donné en grandeur seulement.* (Em. Lemoine.)

Soit OB une position du diamètre conjugué à AA′ et soit $OB = b$.

Si l'on rapportait la conique à ces deux diamètres, son équation serait

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Faisons une transformation de coordonnées, de manière à amener l'axe OY dans la position oy perpendiculaire à AB.

En désignant par θ l'angle variable des deux diamètres OA et OB, il faut remplacer, dans l'équation (1) : X par $x - y$; $\cot \theta$ et Y, par $\frac{y}{\sin \theta}$, ce qui donne

$$\frac{(x - y \cot \theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \theta} - 1 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{(x - y \cot \theta)^2}{a^2} + \frac{y^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{b^2 \sin^2 \theta} - 1 = 0,$$

ou encore

$$\frac{(x - y \cot \theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cot^2 \theta + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Développons et ordonnons par rapport à $\cot \theta$:

$$y^2 \cot^2 \theta\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{2xy \cot \theta}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe, il suffit d'exprimer que cette équation a une racine double en $\cot \theta$, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Le lieu est une ellipse de centre O, et dont les axes coïncident avec les axes de coordonnées; leurs longueurs sont $\sqrt{a^2 + b^2}$ et b.

Ont résolu la même question : MM. Léon Clément, au lycée de Rouen; Valabregue, au lycée de Montpellier; Lucien Marchis, au lycée de Rouen; Taratte, au lycée Saint-Louis; P. Fabre, au lycée Henri IV; Voignier, au lycée de Nancy; Giat, au lycée Saint-Louis.

QUESTION 146

Solution par M. Amaury de Kerdrel, à Brest.

On considère la courbe Γ *qui correspond à l'équation*

$$ay^2 = x^3.$$

Ayant pris sur l'axe de cette courbe un point P, *sur* OP *comme diamètre* (O *étant le point de rebroussement*), *on décrit un cercle* Δ

qui rencontre Γ *en un point* M ; *la tangente à* Γ *en ce point* M *rencontre* Δ *en* I. *Vérifier que le lieu décrit par ce point* I *est la courbe unicursale qui correspond aux formules*

$$\frac{x}{a} = \frac{t^4}{4 + 9t^2} \quad et \quad -\frac{y}{a} = \frac{t^3(2 + 3t^2)}{4 + 9t^2}.$$

Soient $x_0 y_0$ les coordonnées du point I; xy les coordonnées du point M. Les coordonnées de ce point vérifient:

1° L'équation de la tangente au point M à Γ qui est:

$$2ayy_0 - 3x_0^3 x + x_0^2 = 0 \qquad (1)$$

et 2°

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0, \qquad (2)$$

(2α étant l'abscisse du point P).

Mais $x_0 y_0$ satisfont aux équations :

$$ay_0^2 = x_0^3. \qquad (3)$$

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 = 0. \qquad (4)$$

Soit
$$\frac{y_0}{x_0} = t,$$

on aura
$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{x_0^2}{ay_0}$$

et
$$t^3 = \frac{x_0^3}{ay_0}.$$

Mais

$$y_0 = at^3, \quad x_0 = at^2;$$

en vertu de ces relations l'équation (1) devient

$$2y - 3tx + at^3 = 0. \qquad (1)'$$

Éliminons d'autre part α entre les équations (2) et (4); nous aurons

$$x_0(x^2 + y^2) \cdot x(x_0{}^2 + y_0{}^2) = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - ax(t^2 + t^4) = 0. \qquad (\Delta)$$

Nous sommes donc ramenés à chercher le second point d'intersection du cercle Δ avec la droite (1′); le premier point étant M. Résolvons ces deux équations par rapport à x, nous avons

$$4x^2 + (3tx - at^3)^2 - 4ax(t^2 + t^4) = 0$$

ou

$$(4 + 9t^2)x^2 - (10at^4 + 4at^2)x + a^2t^6 = 0.$$

On a donc

$$xx_0 = \frac{a^2t^6}{4+9t^2},$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{t^4}{4+9t^2},$$

et, par suite.

$$-\frac{y}{a} = \frac{t^3(2+3t^2)}{4+9t^2}.$$

A ces équations correspond une unicursale ayant la forme d'une branche parabolique doublement infléchie; l'axe ox est, pour des raisons évidentes, un axe de symétrie de cette courbe.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Henri Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay) ; Taratte, élève au lycée Saint-Louis; Hugon, à Poligny; Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas).

QUESTIONS PROPOSÉES

193. — On considère l'hyperbole H

$$xy - 2\beta x - 2\alpha y + 2\alpha\beta = 0, \quad \text{(Axes rect.)}$$

et l'on demande :

1° Le lieu des centres des coniques ζ qui touchent les axes ox, oy et qui, en outre, sont doublement tangentes à H.

Ce lieu se compose d'une droite Δ et d'une hyperbole équilatère K.

2° Soient U les coniques du réseau ζ qui ont leur centre sur K. Trouver le lieu des projections de O sur la droite qui, pour une conique U, joint ses points de contact avec les axes; et aussi le lieu des projections de O sur les cordes de contact de U avec H.

3° On propose enfin ces deux dernières questions pour les coniques V du réseau ζ qui ont leurs centres sur Δ.

(G. L.)

194. — On considère une ellipse Γ; soient F l'un de ses foyers, Δ la directrice correspondante, C le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur Δ; par un point I on mène à Γ deux tangentes qui rencontrent Δ aux points A et B.

1° Trouver le lieu du point I sachant que C est le milieu de AB :

Ce lieu est la perpendiculaire élevée à FC, au point F;

2° Trouver le lieu du point I sachant que AFB est un angle droit :

Ce lieu est une conique φ, ayant pour foyer F, pour directrice Δ, et dont l'excentricité est égale à $e\sqrt{2}$, e désignant celle de Γ;

3° Trouver l'enveloppe de φ, quand on suppose que les ellipses Γ sont variables, mais restent homofocales:

Cette enveloppe est un cercle;

4° Trouver l'enveloppe des coniques φ, quand on suppose que les ellipses Γ varient, mais en conservant sur FC les mêmes sommets.

Ce lieu est une quartique unicursale; on indiquera les trois points doubles de cette courbe. *(G. L.)*

ERRATA

Pages 51 et 52. — *Lire* ellipse E *au lieu de* ellipse ε.

Page 52, lignes 18 et 19. — *Lire* tel que les perpendiculaires menées sur les droites NA_1, NA_2, NA_3 par les points A_1, A_2, A_3 ou A_3, A_1, A_2 ou A_2, A_3, A_1 concourent, etc.

Page 75, lignes 18, 19, 20. — Cette conclusion suppose la relation $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}\operatorname{cotg}\alpha$, tandis qu'on a $\operatorname{tg}\varphi = 3\operatorname{tg}\alpha$. Donc les triangles isoscèles correspondants au point en question ont une hauteur triple de celle des triangles $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$.

Page 79, ligne 17. — *Lire* prolongeant *au lieu de* partageant.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 9462-6.

SUR UNE QUARTIQUE UNICURSALE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

(*Fin*, voir p. 97.)

7. — Reprenons la formule (3). Si l'on se reporte à la première transformation générale étudiée dans mon Mémoire *sur les transformations centrales des courbes planes* (*), transformation que j'ai appelée *l'inversion généralisée*, on voit que *la quartique γ_4 est anallagmatique par rapport à son point central pour l'inversion d'indice 4.*

En vertu de la formule (8) du Mémoire en question, on voit que *la somme des cotangentes des angles sous lesquels une droite issue de O coupe la quartique γ_4, est nulle.*

Or, dans un intéressant Mémoire publié récemment (**) et intitulé : *Application géométrique d'un théorème de Jacobi*, M. G. Humbert a obtenu comme conséquence de son remarquable théorème I, cette proposition : *La somme des cotangentes des angles d'intersection d'une droite et d'une courbe algébrique reste fixe, quand la droite se déplace parallèlement à elle-même.*

Ce théorème, rapproché du précédent, donne celui-ci qui constitue une curieuse propriété de la courbe γ_4 :

La somme des cotangentes des angles sous lesquels la quartique γ_4 est coupée par une droite quelconque est nulle.

De là, ce corollaire :

Si deux des angles d'intersection d'une droite et de la quartique γ_4 sont supplémentaires, il en est de même des deux autres.

Ce corollaire n'est plus applicable lorsque l'un des couples d'angles comprend un angle nul et l'autre égal à π, c'est-à-

(*) *Mathesis*, t. V, 1884, p. 73 et 97. — J'ai déjà eu l'occasion de citer ce Mémoire dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1885, p. 267) ; mais l'indication bibliographique donnée en cet endroit est erronée. Il faut la rétablir d'après l'indication actuelle.

(**) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. 1, 1885 p. 347.

dire lorsque la droite est tangente à γ_4, parce qu'alors deux des cotangentes sont infinies; il y a indétermination.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les angles d'intersection de la courbe γ_4 avec une droite donnée passant par le pôle O; R_1, R_2, R_3, R_4 les rayons de courbure correspondants ; N_1, N_2, N_3, N_4 les longueurs correspondantes des normales limitées à la perpendiculaire élevée à la droite considérée par le point O.

La formule (9) de mon Mémoire *Sur les transformations centrales* donne

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N_i}{R_i} - 1\right) = 0.$$

8. — Si nous envisageons maintenant la formule (4′) nous voyons que l'on a, en vertu de la formule (22) du Mémoire cité,

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{\cot \alpha_i}{\rho_i} = 0,$$

c'est-à-dire que *la somme des inverses des sous-tangentes est nulle.* On voit que ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Si quatre points de la quartique γ_4 sont sur une droite D *passant par le pôle* O, *les tangentes en ces quatre points coupent la perpendiculaire élevée en* O, *à la droite* D, *en des points dont le centre harmonique, relativement au point* O, *est rejeté à l'infini.*

Enfin la formule (23) du même Mémoire donne

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{R_i \sin^3 \alpha_i} = 0.$$

La somme des inverses des produits des rayons de courbure par les cubes des sinus des angles d'intersection correspondants, est nulle.

SUR LA SÉPARATION DES RACINES
DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Par M. Paul **Giraud**, ancien élève de l'École Polytechnique,
boursier d'Agrégation à Paris.

---

1. Théorème connu servant de lemme. — Soient :

$$f(x) = 0$$

une équation de degré m,

$$f'(x) = 0$$

l'équation dérivée, q_1 et R_1 le quotient et le reste de la division de f par f'.

Les racines de l'équation $q_1 R_1 = 0$ séparent les racines de l'équation $f(x) = 0$, si q_1 n'est pas un facteur de $f(x)$.

En effet, on a :

$$f(x) = q_1 f'(x) + R_1$$

ou

$$\frac{1}{q_1} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{q_1^2}\,\frac{q_1 R_1}{f(x)}.$$

Soit a une racine de $f(x) = 0$; $\frac{1}{q}$ est fini pour $x = a \pm \varepsilon$, ε tendant vers 0.

Pour $x = a - \varepsilon$, $\frac{f'}{f}$ croît indéfiniment par des valeurs négatives.

Pour $x = a + \varepsilon$, $\frac{f'}{f}$ croît indéfiniment et est > 0.

Donc $\frac{q_1 R_1}{f(x)}$ croît indéfiniment par des valeurs positives pour $x = a - \varepsilon$, négatives pour $x = a + \varepsilon$. On peut donc répéter sur $q_1 R_1$ les raisonnements faits sur $f'(x)$, dans le théorème de Rolle.

2. — Conservons les notations précédentes, et soient q_2 et R_2 le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par le polynôme R_1, de degré m-2 ; si q_1 et q_2 sont premiers avec $f(x)$, les racines de l'équation $q_1 q_2 R_2 = 0$ séparent les racines de l'équation $f(x) = 0$.

En effet, on a

$$f(x) = q_2 R_1 + R_2$$

identité qu'on peut écrire, en la multipliant par $\dfrac{q_1}{q_2 f}$,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{q_1 R_1}{f(x)} + \frac{1}{(q_2)^2} \frac{q_1 q_2 R_2}{f(x)} \quad 1.$$

En répétant le raisonnement qui précède, puisque $\dfrac{q_1 R_1}{f(x)}$ croît indéfiniment par des valeurs positives pour $x = a - \varepsilon$, et négatives pour $x = a + \varepsilon$; $\dfrac{q_1}{q_2}$ restant fini d'après les hypothèses faites, on voit que $\dfrac{q_1 q_2 R_2}{f(x)}$ croît indéfiniment par des valeurs négatives pour $x = a - \varepsilon$ et positives pour $x = \alpha + \varepsilon$. Les racines de $q_1 q_2 R_2 = 0$ séparent donc celles de la proposée.

Or q_1 est du premier degré, q_2 du deuxième, R_2 du degré $m - 3$. Si les m racines de $q_1 q_2 R_2 = 0$ sont réelles, il y en aura certainement une qui sera plus petite ou plus grande que les racines de $f(x) = 0$. Il en résulte une application évidente à l'équation du cinquième degré.

On peut facilement généraliser le raisonnement précédent; divisant f par R_2, on aura, pour séparer les racines, à résoudre quatre équations : une du premier degré, une du deuxième, une du troisième, une du degré $m - 4$; et ainsi de suite.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

TOUTE ÉQUATION ALGÉBRIQUE A UNE RACINE

Par M **Porchon**, professeur au lycée de Versailles.

Lemme. — *Soit* F (ρ, φ) *une fonction réelle, continue et à détermination unique, des variables réelles* ρ *et* φ (*), *les racines*

(*) Nous supposons que F soit une fonction proprement dite, c'est-à-dire qu'elle ne reste pas constante si, ρ par exemple conservant une valeur fixe, φ varie entre deux limites séparées par un intervalle fini.

de l'équation en φ, $F(\rho, \varphi) = 0$ *sont des fonctions continues de* ρ; *de plus, lorsque* ρ *varie d'une manière continue, ces racines ne peuvent disparaître que par couples, et en devenant d'abord égales.*

En effet, ρ ayant reçu une valeur fixe R, si l'on fait croître φ d'une limite à une autre, la fonction F peut s'annuler pour certaines valeurs de φ. Nous désignerons ces valeurs (pour éviter toute considération d'ordre de multiplicité) comme racines de première ou de deuxième espèce, suivant que, φ passant par ces valeurs, F change ou ne change pas de signe.

Soit Φ une racine de première espèce. Alors ε et ε' désignant des quantités positives suffisamment petites, $F(R, \varphi - \varepsilon)$ et $F(R, \varphi + \varepsilon')$ ont des valeurs de signes contraires. Si maintenant on donne à R un accroissement quelconque, suffisamment petit, $F(R + h, \Phi - \varepsilon)$ et $F(R + h, \Phi + \varepsilon')$ auront les mêmes signes respectivement que $F(R, \Phi - \varepsilon)$ et $F(R, \Phi + \varepsilon')$. Donc la fonction a encore une racine comprise entre $\Phi - \varepsilon$ et $\Phi + \varepsilon'$. D'ailleurs elle n'en a qu'une dans cet intervalle, si ε et ε' sont assez petits pour que la fonction soit constamment croissante ou décroissante entre les limites (*). Puisque ε et ε' peuvent être pris aussi petits que l'on veut, la fonction $F(R + h, \varphi)$ a une racine, et une seule, aussi voisine que l'on veut de Φ, pourvu que h soit assez petit. On voit par là que, si $F(R, \varphi)$ n'a que des racines de première espèce, elles varient d'une manière continue et restent en même nombre lorsque ρ varie très peu, à partir de R.

Si, ρ variant, F perd ou acquiert des racines, il faut que cela arrive pour certaines valeurs déterminées R' de ρ, telles que, si l'on fait cette variable successivement un peu plus grande et un peu plus petite que R', le nombre des racines ne soit plus le même. Les valeurs cherchées R' ne peuvent se trouver que parmi celles qui donnent à F des racines de deuxième espèce.

(*) Il suffit pour cela que la dérivée de F par rapport à φ ne change pas de signe, ce qui est possible, puisqu'elle ne passe pas par un minimum.

Soit R' une valeur de ρ telle que $F(R' + h, \varphi)$ et $F(R' - h', \varphi)$ n'aient pas le même nombre de racines, h et h' étant de petites quantités positives, nous savons que $F(R', \varphi)$ a une racine de deuxième espèce Φ. Donc $F(R', \Phi - \varepsilon'$ et $F(R', \Phi' + \varepsilon')$ sont de même signe, et h étant assez petit, il en est de même de $F(R' + h, \Phi' - \varepsilon)$ et $F(R' + h, \Phi' + \varepsilon)$. On en conclut que la fonction $F(R' + h, \varphi)$ a un nombre pair ou nul de racines de première espèce entre $\Phi' - \varepsilon$ et $\Phi' + \varepsilon'$. Mais il en est de même de la fonction $F(R' - h', \varphi)$, h' étant assez petit. Donc le nombre des racines de première espèce comprises entre $\Phi' - \varepsilon$ et $\Phi' + \varepsilon'$ qui se perdent ou s'acquièrent lorsque ρ varie de $R' + h$ à $R' - h'$ est pair. D'ailleurs en faisant tendre vers zéro $\varepsilon, \varepsilon', h$ et h', on voit que ces racines tendent vers Φ', ce qui démontre la seconde partie du lemme.

Nous abordons maintenant la démonstration du théorème de d'Alembert.

(A suivre.)

SUR UN NOUVEAU CERCLE REMARQUABLE
DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Fin*, voir page 100.)

LES FIGURES COMPLÉMENTAIRES ET ANTI-COMPLÉMENTAIRES

11. Théorème. — *La droite complémentaire de δ est l'axe radical qui est commun au cercle circonscrit, au cercle conjugué et au cercle d'Euler.*

Mais avant d'établir les démonstrations de ce théorème, nous devons fixer d'abord quelques définitions nécessaires.

12. Définitions. — Lorsqu'un point M a pour coordonnées p, q, r, il existe un point M' dont les coordonnées sont $q + r$,

$r + p$, $p + q$; ces deux points M et M', ainsi associés, ont été appelés par M. Émil. Hain *des points complémentaires* (*).

Mais pour que cette définition fasse correspondre à un point donné M un point bien déterminé M', il est nécessaire de préciser le système de coordonnées que l'on considère. En prenant, comme nous le faisons dans cette note, des coordonnées barycentriques, on voit que les deux points M et M' sont situés en ligne droite avec le centre de gravité E et que l'on a

$$ME = 2EM'.$$

C'est ce point M' déduit du point M, en prolongeant ME d'une longueur moitié moindre, point bien déterminé que nous appellerons point complémentaire barycentrique de M.

Par une extension naturelle, on peut appeler *figures complémentaires barycentriques*, relativement à un triangle ABC, deux figures F, F' qui sont homothétiques par rapport au centre de gravité; le rapport d'homothétie étant égal à 2.

On doit encore observer qu'il n'y a pas de réciprocité entre les points M et M' et, pour bien les distinguer l'un de l'autre, on peut dire que M' étant complémentaire de M, M est *anti-complémentaire barycentrique* de M'. D'après cela, pour avoir le point anti-complémentaire de M dans le système de coordonnées barycentriques, il faut prolonger ME d'une longueur double.

Les formules

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q} = \frac{\gamma}{r}, \quad \frac{\alpha'}{q+r} = \frac{\beta'}{p+r} = \frac{\gamma'}{p+q},$$

donnent, entre les coordonnées de deux points complémentaires M, M', les relations :

$$\frac{\alpha'}{\beta+\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma+\alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha+\beta} = \frac{1}{2}. \qquad (A)$$

Dans ces égalités α, β, γ représentent les coordonnées barycentriques absolues d'un point M; α', β', γ' celles du complémentaire.

Si l'on désigne par α'', β'', γ'' les coordonnées du point M''

(*) *Archiv der Mathematik und Physik* von J.-A Grunert, 1885; p. 21 (*Ueber complementare Punkte* von Emil Hain).
Voyez aussi *Journal* (Partie élémentaire), p. 131.

anti-complémentaire de M, on a, au contraire,

$$\frac{\alpha''}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\beta''}{\gamma+\alpha-\beta}=\frac{\gamma''}{\alpha+\beta-\gamma}=1. \quad (B)$$

Les formules (B) et (A) permettent de trouver la complémentaire et l'anti-complémentaire d'une figure donnée, et la proposition énoncée se vérifie immédiatement.

En effet, l'équation du cercle conjugué est

$$\alpha^2(b^2+c^2-a^2)+\beta^2(a^2+c^2-b^2)+\gamma^2(a^2+b^2-c^2)=0.$$

ou :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left\{\alpha\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\beta\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right.$$
$$\left.+\gamma\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right\}-a^2\beta\gamma-b^2\gamma\alpha-c^2\alpha\beta=0.$$

L'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit est donc représenté par l'équation

$$\alpha(b^2+c^2-a^2)+\beta(a^2+c^2-b^2)+\gamma(a^2+b^2-c^2)=0.$$

Or, si l'on considère la droite δ et si l'on cherche la figure complémentaire de cette droite, les formules de transformation indiquées plus haut donnent précisément cette dernière équation.

Cette proposition rentre d'ailleurs dans le théorème plus général que nous allons démontrer tout à l'heure en établissant que le cercle Δ a pour figure complémentaire le cercle conjugué au triangle.

13. Construction de la droite δ. — Les propriétés diverses que nous venons d'exposer permettent, de bien des façons, de construire δ; mais voici un théorème élémentaire, duquel résulte pour δ une construction particulièrement simple.

14. Théorème. — *Si du point* A, *sommet d'un triangle* ABC, *avec* BC *pour rayon, on décrit un cercle* Δ_a, *l'axe radical de* Δ_a *avec le cercle circonscrit* Δ *coupe la parallèle menée par* A, *parallèlement à* BC *en un point* A″; *ce point et les deux autres points analogues* B″, C″ *sont situés sur une droite. Cette droite est précisément l'axe radical* δ *de* Δ *et du cercle circonscrit.*

Les puissances respectives des sommets A, B, C, relativement

au cercle Δ_a sont :

$$-a^2, \qquad c^2 - a^2, \qquad b^2 - a^2.$$

L'équation de Δ_a est donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left\{-a^2\alpha + (c^2 - a^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma\right\} - \zeta = 0,$$

en posant

$$\zeta = a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta.$$

L'axe radical de Δ_a et du cercle circonscrit ($\zeta = 0$) a donc pour équation

$$-a^2\alpha + (c^2 - a^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma = 0.$$

D'autre part, la parallèle menée par A au côté BC est représentée par

$$\beta + \gamma = 0.$$

Les coordonnées du point A″ sont donc

$$\frac{a^2\alpha''}{b^2 - c^2} = -\beta'' = \gamma'',$$

et l'on voit qu'elles vérifient bien l'équation

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0.$$

Ainsi, les trois points A″, B″, C″ sont situés sur δ.

La construction qui est la conséquence de cette propriété est des plus pratiques, il est facile de s'en rendre compte.

Les cercles Δ_a, Δ_b, Δ_c, que nous avons imaginés au début de cette étude et que nous retrouvons ici, se coupent deux à deux, pour des raisons évidentes, sur le cercle Δ_ω. On obtient ainsi, et avec une vérification précieuse, trois points A_0, B_0, C_0 sur Δ_ω. Il y a plus, la droite AA_0 est parallèle à BC et c'est justement cette droite qui, par son intersection avec B_0C_0, détermine A″. On comprend, d'après cela, que les points A_0, B_0, C_0, peuvent être obtenus avec une grande précision puisque, pour chacun d'eux, trois cercles (Δ_ω, Δ_b, Δ_c pour A_0) et une droite (la parallèle à BC menée par A) concourent pour déterminer leur position.

15. Construction du point de Steiner et du poin de Tarry. — La considération du triangle $A_0B_0C_0$ conduit encore à une construction très simple du point de Steiner (*).

(*) Voyez l'étude de M. Neuberg : *Sur le point de Steiner*, Journal 1886, p. 6 et celle *sur le point de Tarry*, Mathesis, 1886, p. 5.

En effet, l'équation de B_0C_0, axe radical des cercles Δ_a et du cercle circonscrit est, comme nous l'avons observé au paragraphe précédent,

$$-a^2\alpha + (c^2 - a^2)\beta + (b^2 - a^2)\gamma = 0.$$

Cette droite coupe le côté BC ($\alpha = 0$) en un point A_1 dont les coordonnées sont :

$$\alpha_1 = 0, \qquad (c^2 - a^2)\beta_1 + (b^2 - a^2)\gamma_1 = 0.$$

On conclut de là que AA_1 passe par le point N dont les coordonnées sont proportionnelles à :

$$\frac{1}{b^2 - c^2}, \qquad \frac{1}{c^2 - a^2}, \qquad \frac{1}{a^2 - b^2}.$$

On a, de la sorte, trois droites AA_1, BB_1, CC_1, qui sont concourantes en N. Ce point, situé sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, est le point de Steiner.

Le point de Tarry étant, sur le cercle circonscrit, diamétralement opposé au point de Steiner; la construction de l'un, détermine celle de l'autre.

16. Le cercle Δ et le cercle conjugué. — *Le cercle Δ est la figure anti-complémentaire du cercle conjugué. En d'autres termes : les deux figures sont homothétiques inverses, le centre de gravité* E *est le centre de l'homothétie et le rapport d'homothétie est égal à* 2.

Prenons le cercle conjugué dont l'équation est

$$\frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{2}[\alpha'(b^2 + c^2 - a^2) + \beta'(c^2 + a^2 - b^2) \quad (\Delta')$$
$$+ \gamma'(a^2 + b^2 - c^2)] - \zeta' = 0,$$

et cherchons la figure anti-complémentaire. Les formules de transformation sont

$$\frac{\alpha'}{\beta + \gamma} = \frac{\beta'}{\gamma + \alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha + \beta};$$

nous avons donc

$$(\alpha + \beta + \gamma)[2a^2\alpha + 2b^2\beta + 2c^2\gamma] - a^2(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)\ldots = 0,$$

ou
$$(\alpha + \beta + \gamma)(2a^2\alpha + 2b^2\beta + 2c^2\gamma)$$
$$- (\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - \zeta = 0,$$

ou, enfin,

$$(\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - \zeta = 0.$$

Nous retrouvons bien l'équation de Δ.

17. Remarque. — On déduit de ce rapprochement entre le cercle Δ et le cercle conjugué au triangle une construction assez curieuse de ce dernier cercle et peut-être cette observation n'a-t-elle pas été faite encore.

Le centre du cercle conjugué coïncide avec l'orthocentre, la seule difficulté réside dans la détermination du rayon ou, ce qui revient au même, dans la construction d'un point du cercle.

L'observation que nous avons en vue porte sur ce fait que : *Si par le centre de gravité* E *du triangle on mène dans le cercle circonscrit les deux transversales* $\theta E\tau$, $\theta' E\tau'$ *telles que*

$$\theta E = 2E\tau, \qquad \theta' E = 2E\tau',$$

les points τ, τ' *appartiennent au cercle conjugué; de plus, celui-ci est tangent aux droites* $\theta\tau$, $\theta'\tau'$.

Si nous cherchons, en effet, la polaire du centre de gravité E par rapport au cercle Δ, nous trouvons, comme nous l'avons déjà observé, la droite δ; ainsi $E\theta$, $E\theta'$ sont deux tangentes à Δ. D'autre part le cercle conjugué Δ' étant la figure complémentaire de Δ, en prolongeant θE d'une longueur moitié moindre on doit obtenir un point de Δ'; il reste à montrer que ce point est placé justement sur le cercle circonscrit.

Cherchons la polaire de E par rapport au cercle conjugué; l'équation (Δ') donne

$$f'_\alpha + f'_\beta + f'_\gamma = 3\left(\alpha\frac{b^2+c^2-a^2}{2} + \beta\frac{a^2+c^2-b^2}{2} + \gamma\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)$$

$$+ (\alpha+\beta+\gamma)\frac{(a^2+b^2+c^2)}{2} - a^2\gamma - b^2\gamma - c^2\beta - c^2\alpha - a^2\beta - b^2\alpha,$$

ou, en simplifiant,

$$\alpha(b^2+c^2-a^2) + \beta(a^2+c^2-b^2) + \gamma(a^2+b^2-c^2) = 0.$$

Cette équation représente précisément, et comme le prouve l'équation (Δ'), l'axe radical de Δ' avec le cercle circonscrit.

De là résulte évidemment la justification de la remarque énoncée.

18. Théorème. — *Le cercle* Δ *n'est autre chose que le cercle conjugué au triangle obtenu en menant par les sommets de* ABC *des parallèles à ses côtés.*

En effet, appelons A″B″C″ les sommets du triangle obtenu

en effectuant la construction que nous venons d'imaginer; A″B″C″ est la figure anti-complémentaire de ABC; par suite le cercle conjugué à ABC a pour transformé le cercle conjugué à A″B″C″.

On vérifie d'ailleurs directement cette proposition en observant que les cordonnées de C″ sont proportionnelles à : 1, 1 et — 1.

Or l'équation

$$f = (\alpha + \beta + \gamma)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0,$$

donne

$$f'_\alpha + f'_\beta - f'_\gamma = a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) + (\alpha + \beta + \gamma)(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$- b^2\gamma - c^2\beta - c^2\alpha - a^2\gamma + a^2\beta + b^2\alpha,$$

ou

$$f'_\alpha + f'_\beta - f'_\gamma = 2(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha + \beta);$$

la polaire de C″ est donc la droite qui correspond à l'équation

$$\alpha + \beta = 0,$$

c'est la droite A″B″.

Le triangle A″B″C″ est donc auto-polaire au cercle Δ.

On peut dire aussi, si l'on préfère, que *le cercle conjugué d'un triangle est le cercle* Δ *du triangle* A′B′C′ *obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle.*

19. Cercles complémentaires et anti-complémentaires. — Ces résultats nous conduisent, par une pente naturelle, à la recherche du cercle qui est le complémentaire ou l'anti-complémentaire d'un cercle donné U.

1° Soit

$$(\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

l'équation de U; la figure complémentaire U′ s'obtient en transformant cette équation, les formules de transformation étant

$$\frac{\alpha}{-\alpha' + \beta' + \gamma'} = \frac{\beta}{\alpha' - \beta' + \gamma'} = \frac{\gamma}{\alpha' + \beta' - \gamma'}.$$

D'après cela, l'équation de U′ est

$$(\alpha' + \beta' + \gamma')(u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma') - a^2\beta'\gamma' - b^2\alpha'\gamma' - c^2\alpha'\beta' = 0,$$

en posant :

$$4u' = v + w - u + b^2 + c^2 - a^2,$$
$$4v' = w + u - v + c^2 + a^2 - b^2,$$
$$4w' = u + v - w + a^2 + b^2 - c^2.$$

Par exemple; si l'on cherche le complémentaire du cercle circonscrit, on doit supposer $u = v = w = 0$ et l'on a

$$\frac{(\alpha' + \beta' + \gamma')}{4}[\alpha'(b^2 + c^2 - a^2) + \beta'(c^2 + a^2 - b^2) + \gamma'(a^2 + b^2 - c^2)]$$
$$- a^2\beta'\gamma' - b^2\alpha'\gamma' - c^2\alpha'\beta' = 0 ;$$

cette équation représente bien le cercle d'Euler.

2° Pour avoir le cercle U″ anti-complémentaire de U, il faut employer les formules de transformation suivantes:

$$\frac{\alpha}{\beta'' + \gamma''} = \frac{\beta}{\alpha'' + \gamma''} = \frac{\gamma}{\alpha'' + \beta''},$$

lesquelles donnent, pour l'équation de U″,

$$(\alpha'' + \beta'' + \gamma'')(u''\alpha + v''\beta + w''\gamma) - a^2\beta''\gamma'' - b^2\alpha''\gamma'' - c^2\alpha''\beta'' = 0;$$

en posant

$$u'' = 2v + 2w - a^2,$$
$$v'' = 2w + 2u - b^2,$$
$$w'' = 2u + 2v - c^2.$$

Par exemple, au cercle circonscrit à ABC correspond le cercle circonscrit au triangle A″B″C″ et, en supposant dans les formules $u = v = w = 0$, on trouve pour celui-ci l'équation

$$(\alpha'' + \beta'' + \gamma'')(- a^2\alpha'' - b^2\beta'' - c^2\gamma'') - a^2\beta''\gamma'' - b^2\alpha''\gamma''$$
$$- c^2\alpha''\beta'' = 0.$$

résultat évident à priori, lorsqu'on se reporte à la signification des paramètres u, v, w.

Parmi les conséquences qui découlent de ce résultat, on peut signaler la suivante.

20. Théorème. — *Le cercle circonscrit au triangle* ABC, *le cercle* Δ *correspondant à ce triangle et le cercle circonscrit au triangle* A″B″C″, *obtenu en menant par les sommets de* ABC *des parallèles à ses côtés, ont le même axe radical.*

De ce théorème résulte encore une construction très simple de la droite δ.

21. Remarque. — Nous voulons borner aux résultats

précédents l'étude du cercle Δ; mais il est superflu d'ajouter que cette étude pourrait être poussée beaucoup plus loin sans perdre ce caractère de simplicité qui rend si particulièrement attrayante la géométrie du triangle. Il nous resterait notamment à montrer comment se comporte Δ avec les autres cercles remarquables du triangle et, d'une façon générale, avec les éléments, points, droites, cercles, etc... associés d'une certaine façon au triangle. Mais cette étude partielle de Δ que nous venons de faire, suffira, pensons-nous, à révéler l'intérêt qui s'attachera peut-être à ce cercle remarquable et à la droite δ que nous avons mise en lumière dans ce travail.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 61.)

LA DUPLICATION DU CUBE

94. Résumé historique de la question. — Le problème de la duplication du cube est celui qui correspond à l'équation

$$x^3 = 2a^3.$$

Dans cette égalité, a est une ligne donnée; x représente une longueur inconnue et que l'on propose de construire.

Ce problème est insoluble avec la règle et le compas, pour des raisons qui sont connues de tous ceux qui sont initiés aux premiers principes des vérités mathématiques, et toute discussion sur ce point a cessé depuis longtemps.

Hippocrate de Chio (*) (vers 450 av. J.-C.) observa que si l'on pouvait déterminer deux lignes x, y telles que

$$a, x, y, 2a$$

(*) Ou de *Chios* suivant l'orthographe adoptée par M. Maximilien Marie. (*Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, t. I, p. 25.)

soient quatre termes consécutifs d'une progression géométrique, le second terme de cette suite serait le côté cherché.

En effet, les égalités

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = 2ax, \qquad (1)$$

donnent bien

$$x^3 = 2a^3.$$

Le problème de la duplication du cube devint, après cette remarque, *le problème de deux moyennes proportionnelles*. Mais, comme on l'a justement fait observer (*), « la difficulté n'était que déguisée ; elle n'avait fait que changer de forme ».

Pappus (**) a présenté une solution de ce problème ; c'est cette solution que nous allons reproduire en lui ajoutant le perfectionnement que Dioclès y apporta, en introduisant la cissoïde dans la construction qu'avait indiquée Pappus. Nous donnerons ensuite d'autres solutions du présent problème.

95. La solution de Dioclès. — Construisons d'abord un triangle rectangle CAB, en prenant

$$AB = 2a, \qquad AC = a;$$

puis, du point A comme centre avec un rayon égal à $2a$ décrivons le cercle Δ et menons enfin par le point O une transversale OQ de telle façon que l'on ait

$$IM = MP;$$

nous allons montrer que AM est égal au troisième terme y de la progression géométrique imaginée par Hippocrate.

Fig. 70.

Posons $AM = y$; nous avons $SM = 2a + y$, $MR = 2a - y$, et, par suite,

$$MP.OM = 4a^2 - y^2. \qquad (2)$$

(*) *Aperçu historique*, p. 6. — Ch. Bossut, *Essai sur l'Histoire générale des Mathématiques*, p. 35.

(**) *Collections Mathématiques:* lib. 8, prop. XI.

D'autre part, le triangle OMA et la transversale ICB donnent

$$\frac{IM}{OI} \cdot \frac{CA}{CM} \cdot \frac{BO}{BA} = 1,$$

ou

$$2MP.a = (OM - MP)(y - a).$$

Cette égalité peut s'écrire

$$MP(a + y) = OM(y - a),$$

on a donc

$$MP.OM.(a + y) = \overline{OM}^2(y - a). \quad (3)$$

Des égalités (2) et (3), on déduit

$$(4a^2 - y^2)(a + y) = (4a^2 + y^2)(y - a)$$

ou, tout calcul fait,

$$y^3 = 4a^3.$$

D'ailleurs les relations (1) donnent précisément $y^3 = 4a^3$; y représente donc bien le troisième terme de la progression d'Hippocrate.

Pour mener, comme le proposait Pappus, une transversale OQ telle que MP = MI, Dioclès, observant que OI est alors égal à PQ, imagina de construire le lieu du point I, quand on suppose que, la transversale OPQ tournant autour du point O, on prend constamment OI = PQ. C'est ainsi que la cissoïde s'est présentée pour donner la solution de ce problème de la duplication du cube.

Mais la cissoïde n'est pas, si l'on veut nous passer le mot, la seule *duplicatrice*; l'on conçoit bien, en effet, que toutes les cubiques peuvent, plus ou moins simplement, jouer le même rôle et servir à la solution de ce problème. Il s'en faut même de beaucoup que la cissoïde soit la courbe qui se prête le mieux à cette solution, comme nous allons le montrer.

96. Exemple d'une cubique duplicatrice. — Considérons deux droites rectangulaires Δ, Δ', un point fixe O, et soit effectuée la construction (1, 2, 3, *fig.* 71) dans laquelle les angles OAB, CBI sont droits. Cherchons le lieu décrit par le point I.

Posons

$$OC = d, \quad OI = \rho, \quad AOC = \omega,$$

et nous avons

$$OA = \frac{d}{\cos \omega}, \quad CB = d \operatorname{tg}^2 \omega, \quad AI = \frac{d \operatorname{tg}^2 \omega}{\cos \omega}$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{d(1 + \operatorname{tg}^2 \omega)}{\cos \omega}$$

ou, plus simplement,

$$\rho = \frac{d}{\cos^3 \omega}.$$

En coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit

$$x^3 = d(x^2 + y^2).$$

La courbe Γ qui correspond à cette équation affecte la forme générale qu'indique la figure. Elle est constituée, abstraction faite du point double isolé O, par une seule branche parabolique doublement infléchie et tournant sa concavité vers la droite Δ. On peut aussi vérifier que l'inflexion de la branche a lieu pour $\omega = 30°$, ce qui permet de déterminer ce point très facilement et cette remarque trouve son utilité dans le tracé de la courbe. Nous déterminerons tout à l'heure la tangente en un de ses points ; montrons d'abord comment elle peut servir de duplicatrice.

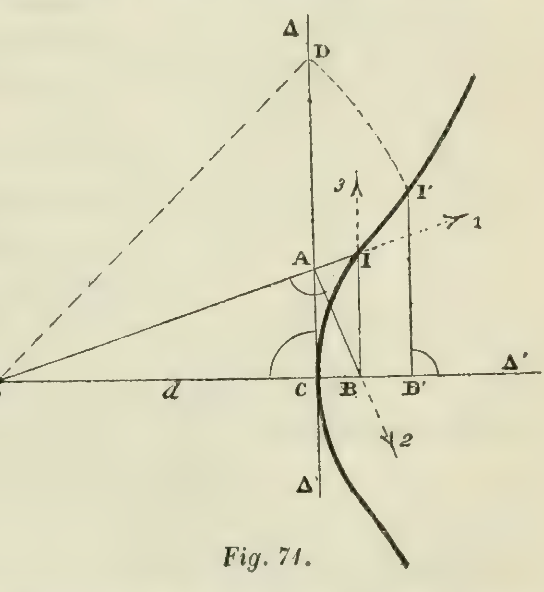


Fig. 71.

Du point O comme centre, avec un rayon égal à $d\sqrt{2}$, décrivons un arc de cercle qui coupe Γ au point I'. Nous aurons

$$x^3 = d(d\sqrt{2})^2$$

ou

$$x^3 = 2d^3.$$

Ainsi OB' est le côté du cube qui, en volume, serait le double du cube dont le côté est égal à OC.

Le tracé de la tangente à Γ, en un point pris sur cette courbe, se fait très simplement par la remarque suivante.

Soit I un point de la courbe; désignons par ρ et α les coordonnées de ce point. L'équation connue de la tangente à une courbe, dans le système des coordonnées polaires, donne, dans cet exemple et après calcul fait,

$$\frac{d}{\rho} = \cos^2 \alpha \left\{ \cos \omega (\cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha) - \sin \omega \sin^2 \alpha \right\}.$$

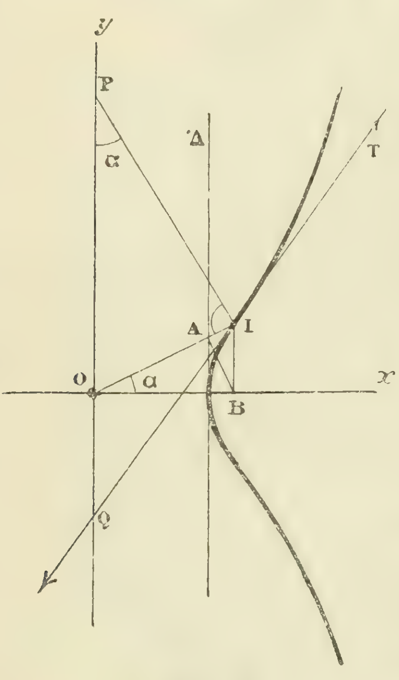


Fig. 72.

Parmi les solutions évidentes de cette égalité, on peut distinguer la suivante :

$$\omega = 90^\circ, \quad \frac{d}{\rho_0} = -2\cos^3 \alpha \sin \alpha\ ;$$

ρ_0 désignant la distance à l'origine du point où la tangente cherchée rencontre OI.

On a d'ailleurs

$$OI = \frac{d}{\cos^3 \alpha}, \qquad \text{et} \qquad OP = \frac{OI}{\sin \alpha}$$

et, par conséquent,

$$OQ = \rho_0 = -\frac{OP}{2}.$$

On obtient donc la tangente IQ en prenant $OQ = \dfrac{PO}{2}$.

Sur la figure nous avons appliqué cette construction générale à la tangente inflexionnelle et, à cet effet, nous avons pris l'angle α égal à 30°.

Nous aurons d'ailleurs occasion de signaler plus loin d'autres cubiques qui se prêtent d'une façon commode à la solution du problème qui nous occupe et dont le tracé s'effectue avec la règle et l'équerre; mais voici, pour quitter ce sujet incident, deux solutions qui nous paraissent intéressantes et qui n'exigent que le tracé des courbes simples : le cercle, l'hyperbole équilatère ou la parbole.

97. Solution du problème de la duplication du cube par un arc de cercle et un arc d'hyperbole équilatère. — Prenons un angle droit yox et un point M; de M, abaissons les perpendiculaires MP et MQ, puis joignons PQ. Cette droite rencontre la perpendiculaire élevée à OM, au point M, en un certain point M'.

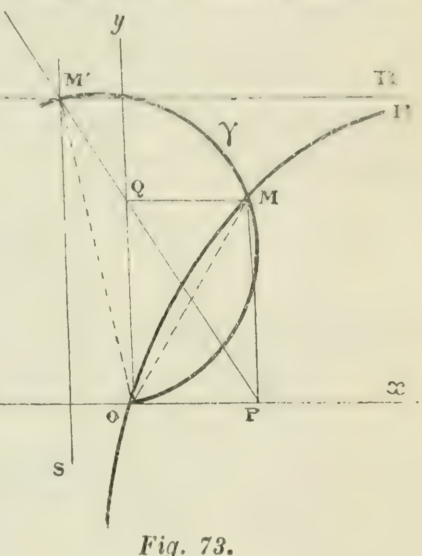


Fig. 73.

Soient x, y les coordonnées de M; x', y' celles de M'; nous avons d'abord

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 1; \qquad (1)$$

d'autre part, l'équation de MM' donne

$$y(y' - y) + x(x' - x) = 0. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent par combinaison

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{y^3}{x^3}.$$

Le problème général, celui qui se propose de *construire un cube qui soit à un cube donné dans un rapport donné*, trouve dans cette relation une des solutions les plus simples, si nous ne nous trompons, qu'il comporte.

Toute la question revient évidemment à celle-ci: étant donné le point M', trouver le point correspondant M. Or le point M appartient: 1° au cercle γ décrit sur OM' comme diamètre *(éq. 2)*, 2° à une hyperbole équilatère H ayant pour asymptotes les droites M'R, M'S menées par M', parallèlement aux axes, et passant par l'origine *(éq. 1)*.

98. Duplication du cube au moyen de deux arcs de paraboles. — Nous donnerons encore, pour terminer cette digression, une solution du problème de la duplication du cube au moyen de deux arcs de parabole.

Prenons un rectangle OAMB, projetons le sommet M sur AB en M'. Nous avons

$$\frac{\mathrm{M'A}}{\mathrm{M'B}} = \frac{\overline{\mathrm{MA}}^2}{\overline{\mathrm{MB}}^2}, \quad \overline{\mathrm{M'A}}^2 = \mathrm{AM.AR}, \quad \overline{\mathrm{M'B}}^2 = \mathrm{BS.BM},$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{M'Q}}{\mathrm{M'T}} = \left(\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}\right)^3.$$

Comme nous l'avons observé au paragraphe précédent, le problème revient, d'après cela, à déterminer le point M, connaissant M'. Or, lorsqu'on fait tourner autour de M' les deux droites rectangulaires AB et M'M, les relations :

$$\overline{\mathrm{M'S}}^2 = \mathrm{MS.BS}, \quad \overline{\mathrm{M'R}}^2 = \mathrm{MR.AR},$$

prouvent que l'on peut considérer M comme appartenant aux deux paraboles P, P' lesquelles se construisent point par point au moyen de la règle et de l'équerre, comme l'indique la figure, la construction relative au point M pouvant se reproduire pour tous les autres points de P et de P'.

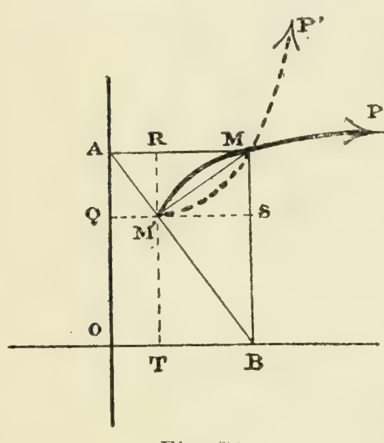


Fig. 74.

On voit que cette construction réalise, avec la généralisation convenable, l'idée arithmétique qui avait conduit Hippocrate au problème des deux moyennes proportionnelles.

(A suivre.)

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

7*. — *Démontrer que le parallélipipède de Binet a un volume constant.*

Considérons un hyperboloïde à une nappe H, et trois génératrices quelconques G, G', G'' de cette surface, mais appartenant au même système. Si par chacune de ces droites on mène des plans parallèles aux deux autres, on détermine ainsi un parallélipipède qui paraît avoir été

imaginé, pour la première fois, par Binet (*Journal de l'École Polytechnique*, 16ᵉ cahier). La proposition énoncée exprime que le volume de ce parallélipipède est constant, quelles que soient les génératrices de même système G, G′, G″.

On sait que si l'on prend pour axes de coordonnées les parallèles aux arêtes du parallélipipède menées par le centre de cette figure, l'équation de H_1 peut s'écrire

$$myz + nxz + pxy + mnp = 0,$$

ou encore

$$\frac{yz}{np} + \frac{xz}{mp} + \frac{xy}{nm} + 1 = 0,$$

$2m$, $2n$, $2p$ désignant les longueurs des arêtes du parallélipipède.

D'ailleurs, si l'on désigne par λ, μ, ν les angles des faces de ce parallélipipède, on sait aussi que son volume V est donné par la formule

$$V = 8mnp\sqrt{\Delta_0},$$

en posant

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, un changement d'axes, effectué sans que l'origine soit déplacée, fait que

$$\frac{yz}{np} + \frac{xz}{mp} + \frac{xy}{mn} + 1$$

devient

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1\,;$$

les nouveaux axes sont rectangulaires ; et a, b, c désignent les longueurs des axes de l'hyperboloïde.

Dans la notation ordinaire, la fonction $\frac{\Delta}{\Delta_0}$ jouissant de la propriété de l'invariance, on a donc

$$\frac{\left(\frac{1}{m^2n^2p^2}\right)}{\Delta_0} = \frac{1}{a^2b^2c^2},$$

ou

$$abc = mnp\sqrt{\Delta_0}.$$

Cette égalité prouve que *le parallélipipède de Binet a un volume égal à celui du parallélipipède construit avec trois diamètres conjugués quelconques.*

Ce théorème remarquable est, croyons-nous, connu depuis longtemps; il fait l'objet de la question 1531, proposée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1885, p. 248). La démonstration précédente nous a été verbalement communiquée par M. Ed. Lucas.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Brocard.

... La quartique trinodale γ_4 que vous avez étudiée aux §§ 31-39 de votre Mémoire sur les courbes parallèles et sur laquelle M. d'Ocagne vous a communiqué d'intéressantes et nouvelles remarques, a déjà été rencontrée dans d'autres recherches. Elle est en effet le lieu géométrique qui répond à la question 22 de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. I, 1874-1875.

Étant donnés trois points fixes, trouver le lieu d'un quatrième point tel que les axes des deux paraboles passant par ces quatre points forment entre eux un angle donné. (Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1874.)

Voir aussi les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, 1875, p. 172-175.

La solution de la question 22 a été très savamment exposée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* par M. Philippin (p. 124-132), puis par MM. Saltel et Dewulf (p. 196-198)...

BIBLIOGRAPHIE

Sur l'histoire des sciences mathématiques et physiques, de M. Maximilien Marie (*Bibliotheca Mathematica*, 1886, nos 1, 2). Extrait de trois lettres adressées à M. G. Eneström, par B. Boncompagni (Stockholm). — Dans cette petite brochure le prince B. Boncompagni, dont la profonde érudition et le grand amour des sciences sont connus de tous ceux qui, à un titre ou à un autre, s'occupent de mathématiques, relève plusieurs erreurs qui ont échappé à M. Maximilien Marie. Nous n'avons pas à prendre ici parti entre M. Maximilien Marie et le prince Boncompagni dans les délicates questions historiques pour lesquelles notre compétence est absolument nulle. Nous estimons pourtant que les inexactitudes révélées par le savant auteur de la brochure que nous signalons à nos lecteurs, bien que du plus haut intérêt, ne détruisent pas le très grand mérite de l'ouvrage de M. Marie. Il nous semble qu'il n'est que juste de reconnaître que, dans une œuvre aussi délicate et aussi considérable que celle qu'a entreprise M. Marie en publiant cette histoire des sciences mathématiques et physiques, des erreurs, même assez nombreuses, sont inhérentes à un pareil travail et je suis sûr que M. Marie, le premier, saura le plus grand gré à son contradicteur de les lui avoir indiquées.

Nous rappelons à ce propos qu'un extrait de cet ouvrage a paru dans ce journal (*), il y a deux ans. Il devait être suivi d'une analyse que feu Vazeille, notre collaborateur à cette époque, se promettait d'écrire. Mais, comme je l'ai rappelé dans la notice nécrologique que je lui ai consacrée, Vazeille était pour la rédaction des articles plein de bonnes intentions qui malheureusement aboutissaient rarement (**).

G. L.

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1884, p. 92.

(**) Les neuf premiers volumes de l'ouvrage en question ont été déjà publiés et sont en vente à la librairie Gauthier-Villars. trois volumes restent encore à paraître et compléteront cette grande et importante publication; avec le neuvième volume commence la treizième période, de Lagrange à Laplace.

QUESTIONS PROPOSÉES

195. — On considère des hyperboles équilatères H qui ont pour centre un point fixe O et qui passent par un autre point fixe A.

Trouver le lieu décrit par les sommets réels de H.

Ce lieu est une lemniscate de Bernoulli.

On propose, après avoir reconnu ce fait par le calcul, de l'établir géométriquement en prenant pour base de cette démonstration géométrique la propriété suivante :

Le produit des distances d'un foyer F *d'une hyperbole équilatère à deux points* A, A' *de la courbe, diamétralement opposés, est égal au carré de* $\frac{AA'}{2}$.

On établira d'abord géométriquement cette relation.

(G. L.)

196. — Circonscrire à une ellipse un quadrilatère ou un triangle inscrits à un cercle concentrique. Faire voir que le problème est impossible ou indéterminé, et chercher la valeur du rayon pour laquelle il est indéterminé.

Mêmes problèmes quand le centre du cercle est confondu avec l'un des foyers. (*Amigues.*)

197. — Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes est égale à K.

Distinguer s'il y a lieu les arcs qui correspondent à des centres d'ellipses. (*Amigues.*)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12170-6.

SUR QUELQUES DÉCOMPOSITIONS EN CARRÉS

Par M. **Édouard Lucas.**

Si l'on désigne par a et b les deux racines de l'équation $x^2 = Px - Q$, et si l'on pose

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n,$$

on sait que U_n et V_n sont entiers, si P et Q sont entiers, car on a les formules de récurrence

$$U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n,$$
$$V_{n+2} = PV_{n+1} - QV_n.$$

Désignons par Δ l'expression $(a - b)^2 = P^2 - 4Q$, il est facile de vérifier les formules suivantes

$$U_{2n+1} = U_{n+1}^2 - QU_n^2, \qquad (1)$$
$$V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n, \qquad (2)$$
$$V_{2n} = \Delta U_n^2 + 2Q^n. \qquad (3)$$

De la formule (1) que j'ai publiée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. III, p. 405), il résulte immédiatement ces deux théorèmes.

I. — La fonction numérique U_{2n+1} est une somme de deux carrés, si le produit $Q = ab$ est égal en signe contraire au carré d'un nombre entier.

Pour $P = 2$, $Q = -1$, on a la proposition de M. Catalan.

II. — La fonction numérique U_{2n+1} est décomposable en un produit de deux facteurs, si le produit $Q = ab$ est le carré d'un nombre entier.

Les deux facteurs sont

$$U_{n+1} + U_n\sqrt{Q} \quad \text{et} \quad U_{n+1} - U_n\sqrt{Q};$$

exemple $P = 4$, $Q = 1$.

De la formule (2) on déduit de même :

III. — Lorsque le produit $Q = ab$ est le double d'un carré négatif, la fonction numérique V_{4n+2} est une somme de deux carrés.

(*) Voir le *Journal de Mathématiques spéciales*, p. 113.

IV. — Lorsque le produit $Q = ab$ est le double d'un carré positif, la fonction numérique V_{4n+2} est le produit de deux nombres entiers.

Par exemple, pour $a = 2$, $b = 1$, on a la formule de M. Lelasseur

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1).$$

La formule (3) donne encore :

V. — Lorsque le discriminant $\Delta = (a - b)^2$ est le double d'un carré, la fonction numérique $\frac{1}{2} V_{4n}$ est une somme de deux carrés.

VI. — Lorsque Δ est le double d'un carré négatif, la fonction $\frac{1}{2} V_{4n}$ est décomposable en un produit de deux facteurs entiers.

VII. — Lorsque le produit $Q\Delta$ est le double d'un carré, la fonction $\frac{1}{2} V_{4n+2}$ est une somme de deux carrés.

VIII. — Lorsque le produit $Q\Delta$ est le double d'un carré négatif, la fonction $\frac{1}{2} V_{4n+2}$ est le produit de deux nombres entiers.

Ainsi, dans l'exemple choisi par M. Catalan, pour $P = 2$, $Q = -1$, $\Delta = 2\sqrt{2}$, on a

$$\frac{1}{2} V_{4n+2} = (2\, U_{n+1} + 1)(2\, U_{n+1} - 1).$$

Les formules

$$\frac{U_{3n}}{U_n} = \Delta\, U_n^2 + 3Q^n, \qquad \frac{V_{3n}}{V_n} = \Delta\, U_n^2 + Q^n,$$

$$\frac{U_{3n}}{V_n} = V_n^2 - Q^n, \qquad \frac{V_{3n}}{V_n} = V_n^2 - 3\, Q^n,$$

donnent lieu à un grand nombre de théorèmes du même genre.

Enfin, si l'on se sert de la formule de Gauss (*Disquisitiones*, sect. VI),

$$+\frac{z^p - 1}{z - 1} = Y^2 \pm p\, Z^2,$$

on a ce théorème général : Si Δ est égal au produit d'un nombre premier p de la forme $4q + 3$ par un carré positif ou négatif, les quotients

$$\frac{4U_{pn}}{pU_n} \text{ et } \frac{4V_{pn}}{pV_n}$$

sont, quelle que soit la valeur entière de n, égaux à une somme de deux carrés, dans le premier cas, et à une différence de deux carrés, dans le second.

Au moyen de tous ces théorèmes, et d'autres analogues, on peut démontrer d'un très grand nombre de manières que tout nombre entier est la somme de quatre carrés.

NOTE SUR LA STROPHOIDE

Par M. **Lebel**, maître répétiteur au Lycée de Nice.

1. — Par un point P pris sur une strophoïde, on mène des tangentes PM_1 PM_2 à la courbe, et l'on joint M_1M_2. Le triangle M_1PM_2 ainsi formé jouit de plusieurs propriétés assez remarquables.

Désignons par :

θ le	coefficient	angulaire de	OP
t_1	—	—	OM_1
t_2	—	—	OM_2
t_3	—	—	ON
m_1	—	—	PM_1
m_2	—	—	PM_2
μ	—	—	M_1M_2

Nous allons calculer les relations qui existent entre ces divers coefficients angulaires.

2. — Soit

$$(x^2 + y^2)x - a(y^2 - x^2) = 0.$$

l'équation de la strophoïde et

$$ux + vy - 1 = 0, \qquad (1)$$

celle d'une droite. L'équation du faisceau de droites joignant

l'origine aux points d'intersection de cette droite avec la courbe est

$$(x^2 + y^2)x - a(y^2 - x^2)(ux + vy) = 0$$

ou

$$(1 + au)x^3 + avx^2y + (1 - au)xy^2 - avy^3 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires de ces droites sera

$$t^3 - \frac{1 - au}{av}t^2 - t - \frac{1 + au}{av} = 0. \qquad (2)$$

Si $t't''t'''$ sont les racines de cette équation, nous avons donc les relations

$$t' + t'' + t''' = \frac{1 - au}{av}, \qquad (3)$$

$$t''t''' + t'''t' + t't'' = -1, \qquad (4)$$

$$t't''t''' = \frac{1 + au}{av}. \qquad (5)$$

Considérons la droite PM_1. L'équation (2) relative à cette droite admet t comme racine double, et comme troisième racine θ. La relation (4) devient

$$t_1^2 + 2\theta t_1 + 1 = 0.$$

Les coefficients angulaires t_1 et t_2 sont les racines de l'équation

$$t^2 + 2\theta t + 1 = 0. \qquad (6)$$

On a donc

$$t_1 + t_2 = -2\theta \qquad (7)$$

$$t_1 t_2 = 1. \qquad (8)$$

Cette dernière relation permet déjà d'énoncer une propriété des points M_1M_2. Soient x_1 et x_2 leurs abscisses :

$$x_1 = a\frac{t_1^2 - 1}{t_1^2 + 1}, \quad x_2 = a\frac{t_2^2 - 1}{t_2^2 + 1}.$$

La relation (8) montre que

$$x_1 = -x_2.$$

Ainsi, *les points* M_1 *et* M_2 *sont équidistants de* Oy.

3. — Réciproquement, si deux points M_1, M_2 sont équidistants de Oy, et situés de part et d'autre de Ox, les coefficients correspondants t_1, t_2 vérifiant la relation (8), *les tangentes menées en ces deux points à la strophoïde vont se rencontrer sur la courbe.*

En effet, calculons le coefficient angulaire t' de la droite OP

P étant le point de rencontre de la tangente en M_1 avec la strophoïde. Il suffit de faire dans l'équation (4) $t'' = t''' = t_1$

$$2t_1t' + t_1^2 + 1 = 0,$$

$$t' = -\frac{1}{2}\left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right).$$

Cette expression est une fonction symétrique de t_1 et $\frac{1}{t_1}$, elle reste donc la même lorsqu'on change t_1 en t_2.

Les tangentes en M_1 et M_2 rencontrent la courbe au même point.

4. — Considérons maintenant l'équation (1) comme représentant la droite PM_1. Les relations (3) et (5) permettent de calculer le coefficient angulaire $-\frac{u}{v}$ de cette droite. Retranchons membre à membre (3) et (5), nous avons

$$-2\frac{u}{v} = t' + t'' + t''' - t't''t''',$$

$$m_1 = \frac{1}{2}(\theta + 2t_1 - \theta t_1^2). \tag{9}$$

Mais on tire de (6)

$$t_1^2 = -(2\theta t_1 + 1).$$

Substituant, il vient

$$m_1 = \frac{1}{2}(\theta + 2t_1 + 2\theta^2 t_1 + \theta),$$

ou

$$m_1 = (\theta^2 + 1)t_1 + \theta. \tag{10}$$

De même

$$m_2 = (\theta^2 + 1)t_2 + \theta. \tag{11}$$

Si l'équation (1) représente M_1M_2; t_1, t_2, t_3 sont racines de l'équation (2), et en vertu de la relation (4) nous avons

$$(t_1 + t_2)t_3 + t_1t_3 + 1 = 0$$
$$-2\theta t_3 + 2 = 0,$$

$$t_3 = \frac{1}{\theta}. \tag{1}$$

Nous voyons, par cette relation, que *les points* P *et* N *sont équidistants de* Oy *et jouissent de la même propriété que les points* M_1 *et* M_2.

5. — De (9) on déduit le coefficient angulaire μ en y remplaçant t', t'', t''' respectivement par t_1, t_2, t_3 :

$$\mu = \frac{1}{2}\left(-2\theta + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}\right),$$

$$\mu = -\theta. \tag{13}$$

Nous pouvons faire ici deux remarques :

Les droites OP, M_1M_2 *sont également inclinées sur* Ox.

Les droites ON, M_1M_2 *sont rectangulaires.*

La dernière permet de trouver l'enveloppe de M_1M_2 lorsque le point P décrit la strophoïde.

Cette enveloppe est la podaire négative de la strophoïde par rapport à son point double, c'est-à-dire une parabole ayant pour axe Ox, pour directrice Oy, et pour sommet le point A.

6. — Partant des relations établies, nous allons démontrer que *le point double de la strophoïde est le centre du cercle inscrit au triangle* M_1PM_2.

1° *La droite* OP *est bissectrice de l'angle* M_1PM_2.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que les droites PM_1, PM_2, OP et la perpendiculaire à OP forment un faisceau harmonique, c'est-à-dire que l'on a

$$(m_1 + m_2)\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right) - 2\,(m_1 m_2 - 1) = 0.$$

$$-2\theta^2(\theta^2 - 1) - 2\,[(\theta^2 - 1)^2 - 2\theta^2(\theta^2 + 1) + \theta^2 - 1] = 0,$$

$$-2\,\theta^2(\theta^2 - 1) + 2\,(\theta^4 - \theta^2) = 0 :$$

ce qui est évident.

2° *La droite* OM_1 *est bissectrice de l'angle* M_2M_1P.

On le démontre de la même manière en montrant que M_1M_2, PM_1, OM_1 et la perpendiculaire à OM_1 forment un faisceau harmonique. Il faut alors vérifier que

$$(m_1 + \mu)\left(t_1 - \frac{1}{t}\right) - 2\,(m_1\mu - 1) = 0.$$

$$(\theta^2 + 1)(t_1^2 - 1) + 2\,[(\theta^2 + 1)\,\theta t_1 + \theta^2 + 1] = 0.$$

$$-2\theta t_1 - 2 + 2\,(\theta t_1 + 1) = 0,$$

identité évidente.

La même propriété existe évidemment pour OM_2.

La proposition énoncée est donc démontrée.

(A suivre.)

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 53.)

LES TRANSFORMATIONS CENTRALES

44. Considérations générales sur les transformations centrales. — J'aborde maintenant quelques exemples de transformations centrales, mais en me préoccupant uniquement du point que j'ai eu particulièrement en vue dans cette note; c'est-à-dire du tracé par points et par tangentes des courbes qui sont transformées d'une courbe donnée, suivant une certaine loi géométrique.

Soient deux points m, M, supposés mobiles dans un plan, ou dans l'espace, et tellement placés que la droite mM passe constamment par un point fixe O. Si m décrit un lieu géométrique γ; M, de son côté, décrit un autre lieu géométrique Γ; en supposant toutefois que les distances

$$Om = u, \qquad OM = U,$$

vérifient une certaine relation

$$f(u,U) = 0. \qquad (A)$$

Les deux courbes γ, Γ se correspondent ainsi l'une à l'autre; c'est ce qu'on nomme une transformation centrale.

Pour nous borner ici aux transformations centrales effectuées dans un plan, nous ferons observer qu'on peut distinguer celles-ci en deux genres suivant que la formule (A) renferme, ou non, l'angle ω, inclinaison du rayon vecteur OmM sur l'axe polaire. La transformation par rayons vecteurs réciproques, et aussi celle qui engendre les courbes conchoïdales, sont des exemples de transformations centrales du premier genre; *la transformation réciproque* que nous avons étudiée ici (*) et dans laquelle le segment mM est constam-

(*) Voyez *Journal*, 1882, p. 49.

ment vu d'un certain point fixe sous un angle droit, rentre dans le second genre.

Dans l'un ou l'autre de ces deux genres, on distingue naturellement *les transformations unicursales* et celles, plus générales, qui sont caractérisées par deux nombres entiers positifs, p et q. La formule (A) fait d'ailleurs connaître ces deux paramètres ; p et q désignant le plus grand exposant qui, dans cette formule, affecte respectivement les lettres u, U. Lorsqu'on a $p = 1$ et $q = 1$, la transformation est unicursale ; on peut lui donner aussi le nom de *transformation uniforme*. Enfin, si la formule (A) est symétrique par rapport aux lettres u et U, on dit que *la transformation considérée est involutive*.

45. Application générale des transversales réciproques aux transformations centrales. — L'application que nous voulons mettre ici en lumière et qui a toute la généralité possible, vise, bien entendu, le tracé des tangentes.

Imaginons deux courbes γ et Γ transformées l'une de l'autre comme nous venons de l'expliquer dans le paragraphe précédent. En conservant les notations adoptées posons :

$$O\mu = OM - Om = U - u,$$

et considérons la courbe G lieu du point μ, courbe qui se trouve ainsi adjointe à γ et à Γ.

En prenant deux rayons vecteurs infiniment voisins ($o\mu m$M, $o\mu' m'$M'), si les points o, μ, m, M se succèdent dans l'ordre des lettres qui les représentent, les droites $\mu\mu'$, mm' sont deux transversales réciproques du triangle OMM'. En passant à la limite, on reconnaît que la connaissance des tangentes à deux des courbes γ, Γ, G entraîne celle de la tangente à la troisième. Cette conclusion n'est pas infirmée par la disposition des quatre points o, μ, m, M; le tracé de la tangente inconnue est seulement modifié d'après la situation respective de ces points, de telle sorte, que le principe des transversales réciproques soit toujours vérifié.

Dans l'exposition précédente on reconnaîtra sans doute une application nouvelle de cette idée de *dépendance corrélative*

dont Poncelet a montré toute la puissance dans sa théorie des polaires réciproques, idée aujourd'hui classique, et qui, prise dans son sens le plus étendu, peut se formuler ainsi : *d'une propriété connue appartenant à une fig.* f, *déduire une propriété nouvelle pour la fig.* F, *transformée de la proposée.* L'évidence même du principe que nous avons posé tout à l'heure, la simplicité excessive de la construction à laquelle il conduit, laquelle, suivant la disposition des points considérés, consiste à prendre le symétrique d'un point par rapport à un autre point, ou à mener par un point donné une droite partagée par deux autres en deux parties égales, n'ôtent rien, bien au contraire, à son utilité; et ce n'est pas, croyons-nous, exagérer le service que les transversales réciproques sont appelées à rendre dans leurs applications au tracé des tangentes, que de dire qu'elles ont vraiment doublé le nombre des cas où l'on peut, avec la plus grande élégance, déterminer la construction de la tangente. Mais sans insister sur ces réflexions générales, nous voulons seulement nous attacher à quelques exemples particulièrement simples de transformations centrales.

46. — Voici un premier exemple qui prend son origine dans les idées précédentes quand on applique celles-ci à la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Prenons une courbe γ et un point fixe O; par ce point menons un rayon vecteur rencontrant γ en m, puis déterminons le point M sur le prolongement de Om et de telle sorte que

$$Om.mM = k^2,$$

le point M décrit une certaine courbe Γ et nous voulons déterminer la tangente à Γ en ce point M.

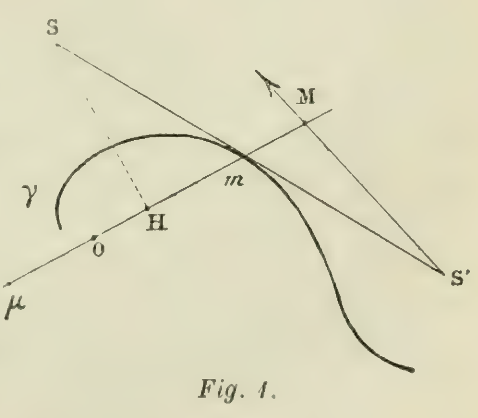


Fig. 1.

A cet effet, observons qu'en prenant $O\mu = mM$, nous avons

$$O\mu.Om = k^2;$$

d'après une propriété connue la tangente au lieu décrit par μ coupe la tangente SS′ en un point S qui appartient à la perpendiculaire élevée au milieu H de μm.

Le point S étant déterminé, il suffit de prendre le symétrique S′, par rapport à m; le principe des transversales réciproques prouve que S′M est la tangente demandée.

Cette construction subsiste si le segment mM a, comme dans la *fig.* 2 une direction contraire à celle du rayon vecteur Om ; il faut seulement bien observer que *le segment* Oμ a, dans un cas comme dans l'autre, *la direction du segment* Mm.

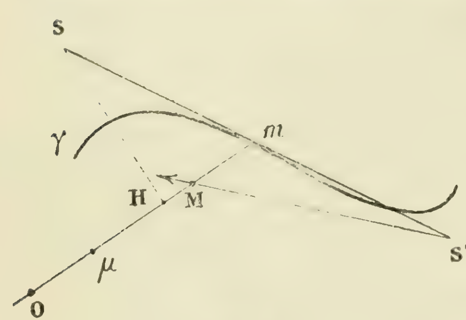


Fig. 2.

Cette transformation des figures planes, en posant, comme nous l'avons fait plus haut,

$$Om = u, \quad OM = U,$$

correspond à la formule

$$u(U - u) = \pm k^2, \qquad (1)$$

qu'on peut encore écrire

$$U = u \pm \frac{k^2}{u}\cdot$$

Adoptons le signe — (ce qui correspond, comme le montre la formule (1), au cas où le segment mM est porté dans la direction mO) et supposons que la courbe γ soit une circonférence passant par le pôle O, le lieu décrit par M, la transformée du cercle en d'autres termes, est une cubique circulaire. La cissoïde et la strophoïde ordinaires peuvent, en particulier, être engendrées de cette façon.

En prenant pour γ une droite quelconque, on trouve encore pour la transformée une cubique circulaire ; et l'on arrive ainsi, par transformation du cercle ou de la droite, à une élégante construction pour le tracé des tangentes aux cubiques circulaires unicursales ayant un axe de symétrie.

47. — Considérons maintenant deux courbes quelconques f, φ et sur le rayon vecteur qui tourne autour du pôle O pre-

nons à chaque instant

$$BC \cdot AB = k^2 ;$$

il s'agit de mener la tangente au lieu décrit par C.

Soit

$$OP = AB, \qquad OQ = BC ;$$

nous avons donc

$$OP \cdot OQ = k^2,$$

par suite, les tangentes θ, θ' aux courbes décrites par les points P et Q se coupent sur la perpendiculaire élevée au milieu de PQ. La tangente θ se détermine par le principe des transversales réciproques appliqué aux points (O, P, A, B). Connaissant θ, nous en déduisons θ' ; pour achever la construction il suffit d'appliquer de nouveau le principe rappelé aux quatre points (O, Q, B, C).

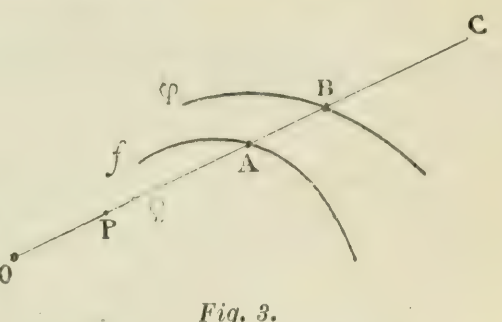


Fig. 3.

En remplaçant les courbes f et φ par des droites ou des circonférences passant par le pôle, on obtient différentes courbes dont la discussion est très facile, vu la génération si simple qui leur a donné naissance. Par exemple, en prenant deux cercles passant par le pôle et tangents entre eux, on retrouve encore une génération des cubiques circulaires à axe de symétrie.

(A suivre.)

STÉRÉOTOMIE : MUR CYLINDRIQUE

Par M. **Songaylo.**

1. — Un mur de soutènement a la forme d'un prisme droit, dont la base est un trapèze birectangle ABCD' *(fig. 1)*. Il est divisé en voussoirs par des joints composés de deux parties planes : l'une EF perpendiculaire au plan de la face en talus du mur, l'autre FG horizontale. Lorsque deux murs ainsi formés se rencontrent, on raccorde leurs faces exté-

rieures à l'aide d'une surface cylindrique, dont la trace horizontale est un arc de cercle et dont les génératrices sont parallèles à l'intersection des plans inclinés qui terminent ces murs. La partie qui raccorde les deux murs droits porte le nom de mur cylindrique.

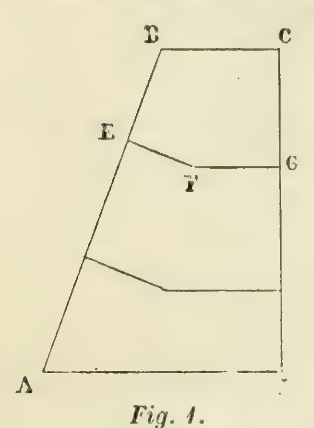


Fig. 1.

Pour exécuter l'épure de l'appareil d'un mur cylindrique, on est donc conduit au problème suivant :

On donne : un plan $P\alpha P'$ perpendiculaire au plan vertical ; dans ce plan, une horizontale ab, $a'b'$ et une droite quelconque bc, $b'c'$; puis, à l'extérieur du plan, un cercle horizontal bd, $b'd'$, tangent à ab, $a'b'$. Ce cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à bc, $b'c'$. On propose de construire la trace, sur un plan horizontal H' de la *normalie* au cylindre suivant le cercle bd, $b'd'$ (*fig.* 2).

Le tracé s'effectue très simplement à l'aide du théorème nouveau qui suit :

2. Théorème. — *Quand un cylindre admet des plans cycliques, la* NORMALIE *de cette surface, suivant l'une de ses sections circulaires, a pour trace, sur un plan parallèle à celui de la section, une conchoïde de Nicomède.*

Soit o, o' le centre du cercle donné (*fig.* 2) ; la normale au cylindre en un point quelconque f, f' de ce cercle a pour projection horizontale of ; il en résulte que la normalie est un conoïde qui a pour directrices le cercle donné et la verticale menée par son centre o, o', dont le plan directeur est perpendiculaire à la direction des génératrices du cylindre. Faisons passer ce plan directeur par le point o, o' et construisons sa trace R, H', sur le plan horizontal H', à l'aide de l'une ($o\omega$, $o'\omega'$) de ses lignes de front.

Cherchons maintenant la projection horizontale du point de la trace de la normalie sur H' qui répond à la normale au cylindre en f, f''. Pour ce but, menons par o, o' une parallèle à cette normale ; sa projection horizontale se confond avec

fo et sa trace sur le plan H′ se projette en μ. Il en résulte que le point demandé s'obtient en prenant

$$fm = o\mu;$$

on en conclut que l'on a

$$\mu m = of;$$

mais *of* est le rayon du cercle donné; donc le lieu de *m* est

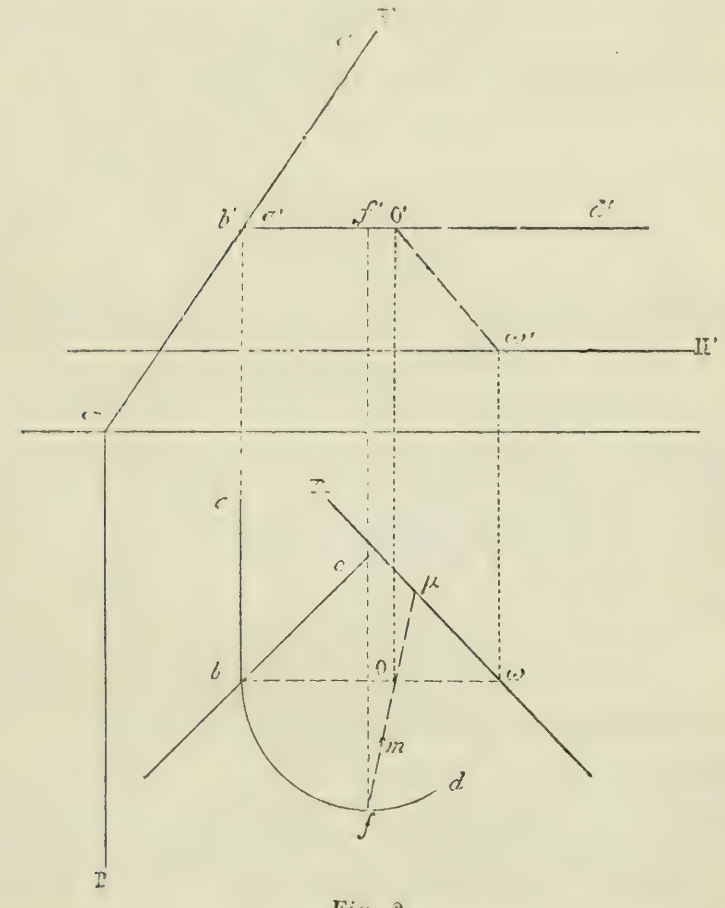


Fig. 2.

la conchoïde de la droite R, dont les divergentes ont pour centre de rayonnement le centre *o* du cercle *bd* et pour longueur constante le rayon de ce cercle.

En terminant, observons que le théorème conduit à une méthode simple de transformation par projection gauche de la conchoïde de Nicomède en cercle; ce qui permet d'appliquer à la conchoïde la méthode de transmutation des figures.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 134.)

CHAPITRE IX

LA STROPHOÏDE, LA TRISECTRICE DE MAC-LAURIN ET LES CUBIQUES CIRCULAIRES UNICURSALES

99. — J'arrive maintenant au tracé de la strophoïde et je dois rappeler d'abord la définition de cette courbe. On sait qu'étant données deux droites, Δ, Δ' se coupant au point B, et sur celle-ci un point fixe A ; si l'on mène par A une transversale rencontrant Δ en C sur laquelle on prend, à chaque instant,

$$CI = CI' = CB,$$

le lieu du point I, ou du point I', est une courbe du troisième degré, présentant au point C un nœud droit; cette courbe est la *strophoïde*.

Lorsque les droites Δ, Δ' sont rectangulaires, la cubique est symétrique par rapport à Δ' ; elle prend le nom de strophoïde droite ; dans l'hypothèse contraire, on a une strophoïde oblique.

Mais cette génération, point par point, exige l'emploi du compas et nous voulons indiquer comment on peut construire la strophoïde avec la règle et l'équerre. Seulement, pour éviter certaines longueurs et des répétitions sans intérêt, nous aborderons immédiatement le tracé des cubiques circulaires unicursales, en indiquant les conditions spéciales que doit réaliser la figure pour que la construction signalée conduise au cas de la strophoïde ou à celui de la trisectrice de

Mac-Laurin, courbes remarquables que nous avons plus particulièrement en vue dans ce chapitre.

100. — Le problème en question comporte naturellement une infinité de solutions; nous nous bornerons à exposer celles qui, parmi tous les tracés que nous avons imaginés, nous ont paru résoudre le problème qui nous occupe d'une façon simple.

Imaginons une droite Δ et trois points en ligne droite O, O′, O″; O′ étant situé sur Δ; puis effectuons la construction indiquée (1, 2, 3). Nous obtenons ainsi un point I; cherchons le lieu décrit par ce point.

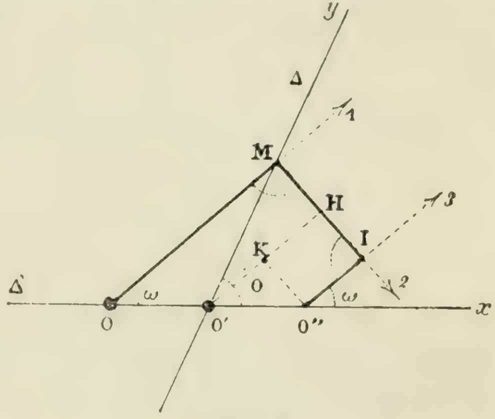


Fig. 75.

Ayant posé:

$$O''I = \rho,$$
$$IO''x = \omega,$$
$$OO' = d,$$
$$O'O'' = d';$$

nous avons

$$O'M = d\,\frac{\sin \omega}{\sin(\theta - \omega)}$$

D'autre part

$$\rho = O'H - O'K = O'M \cos(\theta - \omega) - d' \cos \omega,$$

par suite

$$\rho = d\,\frac{\sin \omega \cos(\theta - \omega)}{\sin(\theta - \omega)} - d' \cos \omega.$$

En convertissant cette équation en coordonnées cartésiennes, on a pour le lieu du point I

$$(x \sin \theta - y \cos \theta)(x^2 + y^2) = \sin \theta\,(dy^2 - d'x^2) + (d + d')xy \cos \theta. \qquad (A)$$

A cette équation correspond une cubique passant par les ombilics du plan et présentant en O″ un point double; en d'autres termes, ce lieu est une cubique circulaire unicursale.

Si le point O′ se trouve placé au milieu de OO″, c'est-à-dire si l'on suppose $d = d'$, les tangentes au point double, d'après l'équation (A), sont rectangulaires et le lieu décrit par I est une strophoïde.

Il est d'ailleurs bien facile de le vérifier. En effet, joignons O'I et menons O''A parallèle à Δ ; puis observons que la perpendiculaire abaissée de O' sur MI tombant au milieu de ce segment, le triangle MOI' est isoscèle. D'après cette remarque nous pouvons dire que les angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ sont égaux et il en résulte que le triangle O''AI est isoscèle. Le lieu du point I est donc une strophoïde ; la strophoïde est droite lorsque Δ est perpendiculaire sur OO'O''.

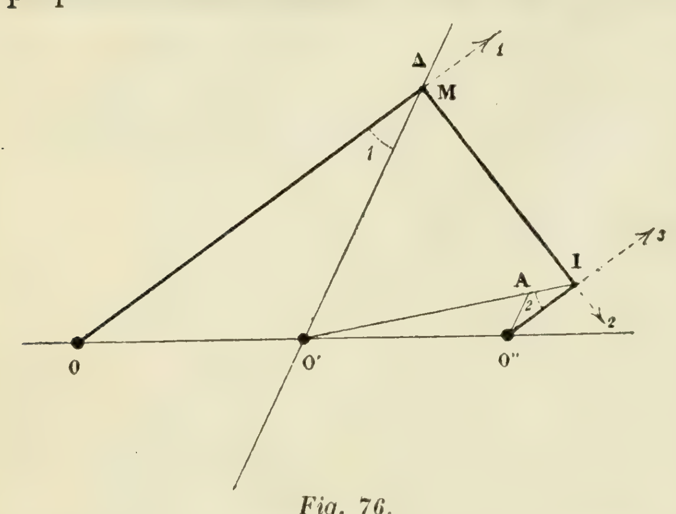


Fig. 76.

(*A suivre.*)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Ed. Lucas.

... On peut ajouter à la propriété relative au parallélipipède de Binet (p. 140) celle-ci :

La somme des carrés des diagonales des faces partant d'un sommet du parallélipipède, diminuée de la somme des carrés des arêtes partant du même sommet est constante.

Ce théorème peut s'établir par une démonstration analogue à celle qui a été donnée *(loco cit.)* pour reconnaître que le volume du parallélipipède de Binet est constant.

QUESTIONS DIVERSES D'EXAMENS

8. — *Déterminer le volume d'un ellipsoïde dont les axes sont* a, b, c.

« La décomposition d'un volume en cylindres infiniment minces à bases parallèles peut s'appliquer à tous les cas; mais il arrive le plus ordinairement que l'expression de la section qui sert de base à l'un de ces cylindres, au lieu d'être connue *à priori*, doit elle-même être déterminée par une intégration préalable (*). » Cette méthode générale dont le principe est exposé dans ces quelques lignes conduit en effet aux intégrales doubles et à la formule

$$V = \int\int z dx dy.$$

On trouvera dans l'ouvrage de M. Bertrand (*loco cit.*, pp. 423 et 424) deux démonstrations pour établir la formule connue, relative à l'ellipsoïde,

$$V = \frac{4}{3}\pi abc\ ;$$

mais ces démonstrations, exigeant des notions supérieures d'analyse, ne peuvent servir à résoudre l'exercice proposé.

Il arrive, dans le cas considéré, que l'on sait justement déterminer *à priori* l'aire de la section plane qui sert de base à la couche cylindrique infiniment petite.

Coupons, en effet, l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

par un plan parallèle au plan des xy ; l'ellipse de section a pour axes

$$a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \qquad \text{et} \qquad b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

L'aire de cette courbe est donc

$$\pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

(*) Bertrand (*Calcul intégral*, p. 412).

et nous pouvons écrire

$$dv = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz.$$

Nous déduisons de là

$$v = \pi abz - \frac{\pi ab}{c^2}\int z^2dz$$

ou

$$v = \pi abz - \frac{\pi ab}{3c^2} z^3.$$

La constante d'intégration est nulle si nous voulons compter le volume de l'ellipsoïde à partir du plan xoy.

Pour $z = c$, nous obtenons le demi-volume de l'ellipsoïde

$$v' = \pi abc - \frac{\pi abc}{3} = \frac{2}{3}\pi abc.$$

Le volume total est donc égal à $\frac{4}{3}\pi abc$.

Remarque. — On peut varier cet exercice en proposant, comme on l'a fait, de *calculer le poids d'un ellipsoïde plein d'un liquide dont la densité varie, en restant proportionnelle à une fonction entière de la côte* z.

On doit alors écrire

$$dP = \varphi(z)dv$$

ou

$$dP = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\varphi(z)dz$$

et finalement

$$\frac{1}{2}P = \int_0^c \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\varphi(z)dz,$$

intégrale qui se trouve immédiatement, puisque $\varphi(z)$ est une fonction entière.

Voici une autre application de la méthode précédente.

Une droite de longueur constante glissant sur deux droites fixes rectangulaires Δ, Δ' non situées dans un même plan, engendre une surface dont l'équation est

$$\frac{x^2}{(c+z)^2} + \frac{y^2}{(c-z)^2} = \operatorname{tg}^2\gamma.$$

Dans cette équation $2c$ désigne la plus courte distance de Δ et de Δ', γ l'inclinaison de la génératrice mobile sur oz; γ est, pour des raisons évidentes, un angle constant. Les

axes adoptés sont les axes naturels de cette question; oz est la perpendiculaire commune, l'origine est au milieu de cette droite et les axes ox, oy sont parallèles à Δ et à Δ'.

On a dans cet exemple :

$$v = 2\pi \operatorname{tg}^2 \gamma \int_0^c (c^2 - z^2)\, dz = \frac{4}{3} \pi c^3 \operatorname{tg}^2 \gamma,$$

d'où l'on conclut (Catalan, *Cours d'analyse*, p. 648) que *le volume du corps considéré est les $\frac{2}{3}$ du cylindre de même base et de même hauteur.*

9. — *La série*

$$\frac{1}{l2.l2} + \frac{1}{l3.l3} + \cdots \frac{1}{ln.ln} \cdots \qquad \text{(A)}$$

est divergente.

1re Solution. On peut observer que l'égalité

$$u_n = \frac{1}{l(n+1).l(n+1)}$$

donne

$$nu_n = \frac{n}{l(n+1).l(n+1)},$$

ou

$$nu_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{l(n+1).l(n+1)}.$$

Il est facile de reconnaître, par des procédes divers, que

$$\lim \frac{x}{(lx)^2} = \infty, \text{ pour } x = \infty.$$

On peut, par exemple, observer que

$$\frac{x}{(lx)^2} = \left(\frac{\sqrt{x}}{lx}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{lx}\right).$$

En posant

$$x = X^2$$

on a

$$\frac{\sqrt{x}}{lx} = \frac{X}{2lX},$$

et l'on sait que pour $X = \infty$, le rapport $\frac{X}{lX}$ est infini lui-même.

Revenant à la série proposée, il est donc démontré que lim (nu_n) est infini; la série est, par suite, divergente.

2e Solution. Comparons la série (A) à la série de M. Bertrand (*)

$$\frac{1}{2l2} + \frac{1}{3l3} + \dots + \frac{1}{nln} + \dots$$

Cette série est divergente et on démontre, comme l'on sait, cette divergence, en observant que l'on a

$$\frac{1}{2l2} + \left(\frac{1}{3l3} + \frac{1}{4l4}\right) + \left(\frac{1}{5l5} + \dots + \frac{1}{8l8}\right) + \dots$$
$$> \frac{1}{2l2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots\right)$$

Ainsi la série (A), *a fortiori*, est divergente.

La divergence de la série de M. Bertrand peut aussi se démontrer immédiatement en s'appuyant sur le théorème suivant :

La série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ *est convergente ou divergente en même temps que la série* $2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \dots$

10. — *Décomposer en fractions simples l'expression*

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2(x^2-1)}.$$

On sait que l'on a

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{C'x+D'}{x^2+1}.$$

En multipliant les deux membres de cette identité, successivement par $x - 1$ et $x + 1$, puis faisant $x = 1$, et ensuite $x = -1$, on trouve immédiatement

$$A = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{8}.$$

(*) Cette série, avec plusieurs autres,

$$\frac{1}{2LL2} + \frac{1}{3LL3} + \dots \text{etc} \dots$$

ont été étudiées par M. Bertrand (*J. de Liouville*, t. VIII). Voyez aussi le *Traité élémentaire des séries* de M. Catalan et ses *Mélanges mathématiques*. Dans cet ouvrage, que la Société royale des Sciences de Liège, à son grand honneur, réédite en ce moment, M. Catalan prouve qu'en supposant $n = 2^{1000}$, *nombre de 302 chiffres!* la somme S_n est inférieure à 11. Résultat bien curieux et qui prouve la divergence extrêmement lente de la série de M. Bertrand.

La seule difficulté *matérielle* porte sur la détermination des coefficients C, D; C′, D′.

En observant que l'on a

$$f(x) + f(-x) = 0,$$

on trouve d'abord que

$$\frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{C'x + D'}{x^2+1} + \frac{D - Cx}{(x^2+1)^2} + \frac{D' - C'x}{x^2+1} = 0.$$

Cette égalité prouve que D et D′ sont nuls; il ne reste plus qu'à déterminer C et C′.

En multipliant par x les deux membres de l'identité :

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{\frac{1}{8}}{x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{x+1} + \frac{Cx}{(x^2+1)^2} + \frac{C'x}{x^2+1},$$

et en faisant $x = \infty$, on trouve $C' = -\frac{1}{4}$. Enfin, pour déterminer C, on multiplie par $(x^2-1)^2$ et l'on fait $x^2 = -1$; on trouve alors $C = -\frac{1}{2}$. Le résultat final est

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{\frac{1}{8}}{x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{x+1} - \frac{\frac{x}{4}}{x^2+1} - \frac{\frac{x}{2}}{(x^2+1)^2}.$$

Les artifices de calcul employés dans cette solution ont surtout pour but, en même temps qu'ils abrègent les calculs ordinaires, de montrer la force d'une identité et les ressources variées qu'elle présente.

11. — *Construire la courbe* Γ *qui correspond à l'équation*

$$\rho^3 \sin 3\omega = 1.$$

L'équation cartésienne étant

$$y(3x^2 - y^2) = 1,$$

on voit que Γ est une cubique formée de trois branches hyperboliques ordinaires asymptotes respectivement : 1° à l'axe ox; 2° aux droites, qui, menées par l'origine, font avec ox des angles égaux à $\pm 60°$.

Γ peut se construire, point par point, en cherchant ses intersections avec les cordes parallèles à ox.

Γ peut aussi se construire tangente par tangente, en observant que l'angle V formé par la demi-tangente positive

au point M, pris sur Γ, avec le prolongement du rayon vecteur oM est lié à l'angle $\omega = \mathrm{M}ox$, par la formule

$$\mathrm{V} + \omega = \pi.$$

On élève une perpendiculaire au milieu de oM, elle rencontre ox en K; la tangente en M passe par K′ symétrique de K par rapport au pied de l'ordonnée qui correspond au point M.

Remarque. — La courbe Γ considérée ci-dessus représente un cas particulier des courbes qui correspondent à l'équation

$$\rho^n \sin n\omega = 1,$$

et ces courbes sont les transformées par rayons vecteurs réciproques des *spirales sinussoïdes.*

Ces spirales, comme l'a fait observer M. Brocard dans ce journal (*), ont fait l'objet de recherches diverses dont on trouvera la nomenclature en se reportant à l'endroit cité.

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (1885)

Cours préparatoires.

I. Trouver le lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites rectangulaires OX, OY, la première en un point fixe A, la deuxième en un point variable B.

II. Une droite de longueur constante AB glisse dans un angle XOY de manière que ses extrémités décrivent respectivement les côtés de l'angle; trouver la position de la droite pour laquelle la surface du triangle AOB a une grandeur déterminée.

Places d'élèves externes.

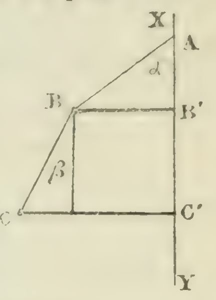
I. Deux vases cylindriques ayant deux bases dont les surfaces sont S et S′ sont mis en communication par un orifice placé à la partie inférieure. Cet orifice a une section σ et la vitesse d'écoulement de l'eau par cet orifice est égale à $\sqrt{2g(z-z')}$, en désignant par z et z' les hauteurs du liquide dans les deux vases au-dessus du plan commun de leurs bases ce qui revient à dire que pendant un élément de temps dt, il s'écoule un volume d'eau, $\sigma \times \sqrt{2g(z-z')} \times dt$. La différence primitive entre les hauteurs de l'eau dans les deux vases étant H, on demande après combien de temps le niveau du liquide dans les deux vases sera devenu le même.

(*) *Journal de math. spéc.*, 1885, pp. 257-258. Voyez aussi, au sujet de ces courbes, une note de M. du Chatenet, *Nouvelles Annales*, mai 1886, p. 223.

II. Dans un triangle on donne deux côtés $a = 2250^m$, $b = 3147^m$ et le rayon du cercle circonscrit $R = 1988^m$. On demande de calculer le troisième côté, les angles et la surface du triangle.

Mécanique.

Un axe vertical XY animé d'un mouvement de rotation uniforme ω porte un système de tiges articulées ABC mobiles dans un plan vertica passant par l'axe et entraîné dans son mouvement de rotation. Deux boules assimilables à des points matériels de masses m et m' sont attachées aux tiges B et C. On demande : 1° d'établir les équations qui déterminent la position d'équilibre du système pour une valeur donnée de ω ; 2° de trouver la valeur de ω pour laquelle la distance CC′ de la boule m' à l'ax serait double de BB′, distance de m au même axe, en supposant $m = m'$. On prendra pour inconnus les angles α et β que font AB et BC avec la verticale; les masses des tiges AB, BC sont supposées négligeal les.



ÉCOLE NORMALE (1886)

Mathématiques.

16 juin 1886. — On considère les courbes du troisième degré C, représentées par l'équation

$$x^2y + a^2x = \lambda,$$

où λ désigne un paramètre variable.

On demande de démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce tangentes à une droite quelconque D du plan, ayant pour équation

$$y = mx + p,$$

et de calculer les coordonnées des deux points de contact M et M′. Distinguer les droites D, pour lesquelles ces deux points sont réels, des droites pour lesquelles ils sont imaginaires. Examiner pour quelles positions de la droite D les deux points M et M′ viennent se confondre en un seul, et trouver, dans ce cas, le lieu décrit par le point de contact.

Connaissant les coordonnées (α, β) d'un point de contact M d'une courbe C avec une droite D, trouver les coordonnées (α', β')du second point de contact M′ situé sur D. Construire la courbe décrite par le point M′ lorsque le point M décrit la ligne droite

$$\beta = \alpha - 2a.$$

CONCOURS GÉNÉRAL (1886).

I. — Étant donnée une surface du second ordre S et deux points A, B; on mène par B une sécante qui rencontre la surface S aux points C. C′ et le plan polaire du point A au point D.

Soient M et M′ les points où la droite AD rencontre les plans, qui touchent la surface S aux points C et C′.

La sécante BD tournant autour du point B, on demande le lieu décrit par les points M et M'.

II. Ce lieu se compose de deux surfaces du second ordre dont l'une est indépendante de la position occupée par le point B dans l'espace et dont l'autre Σ dépend de la position de ce point.

Chercher ce que devient Σ quand, dans la construction qui donne les points de cette surface, on fait jouer au point A le rôle du point B et inversement.

III. Le point A restant fixe, déterminer les positions occupées par le point B quand la surface Σ n'a pas un centre unique à distance finie.

QUESTIONS PROPOSÉES

198. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy et une droite D, on considère un angle mobile dont le sommet décrit la droite D et dont les côtés j et j' enveloppent respectivement des coniques C et C' ayant chacune le point O pour foyer et la droite D pour directrice. Démontrer que les droites qui joignent les points d'intersection des droites j et j' avec les axes Ox et Oy enveloppent des coniques bitangentes aux coniques C et C'. *(D'Ocagne.)*

199. — Sur les trois côtés d'un triangle, et en leurs milieux, on leur élève des perpendiculaires; si l'on porte sur ces perpendiculaires des longueurs proportionnelles à ces côtés et que l'on joigne les extrémités de ces segments respectivement aux sommets opposés du triangle, les trois lignes ainsi obtenues sont concourantes en un point M.

1° Démontrer que le lieu du point M quand k varie, est une hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC.

2° Déterminer la valeur de k pour laquelle les trois droites précédentes sont parallèles. *(Boutin.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13838-6.

SUR UNE CUBIQUE REMARQUABLE

DU PLAN D'UN TRIANGLE

Par M. **Kœhler.**

Pour faciliter la lecture de cette note, je rappellerai d'abord quelques théorèmes relatifs à la génération des cubiques :

1° *Étant donnés un faisceau de coniques passant par quatre points* a, b, c, d *et le faisceau des polaires d'un point* p, *le lieu des points d'intersection des coniques et de leurs polaires est une cubique passant par* a, b, c, d, p *et par le point de concours* p′ *des polaires de* p.

Cela résulte immédiatement de ce que les deux faisceaux sont en correspondance anharmonique, suivant l'expression de Chasles.

2° *Les droites* pa, pb, pc, pd *sont les tangentes à la cubique en* a, b, c, d, *et la droite* pp′ *est la tangente en* p, *ou, en d'autres termes,* p′ *est le tangentiel de* p.

En effet, pour trouver les points de la courbe situés sur une transversale quelconque menée par *p*, il suffit évidemment de construire les deux coniques du faisceau qui touchent cette transversale; les points cherchés sont les deux points de contact, c'est-à-dire les points doubles de l'involution déterminée sur la transversale par le faisceau (*abcd*). Si la transversale passe en *a*, les deux points doubles se confondent avec ce point, et la transversale devient tangente. On voit ensuite que la conique *abcdp* touche en *p* la droite *pp′*; il en est de même pour la cubique.

3° *Les points de concours* f, g, h *des couples de droites* (ac, bd), (ab, cd), (ad, bc) *appartiennent aussi à la cubique, et les tangentes en ces points sont les droites* p′f, p′g, p′h.

Car les couples de droites (*ac, bd*)... sont des coniques du faisceau et les polaires de *p* sont *p′f, p′g, p′h*; d'ailleurs

chacune de ces polaires coupe la conique correspondante en deux points confondus. On a ainsi le faisceau des quatre tangentes menées à la cubique du point p' ; ce sont les droites $p'f$, $p'g$, $p'h$, $p'p$. Il est évident que la tangente en p' n'est autre chose que la tangente à la conique $pfghp'$ et c'est en même temps la polaire de p par rapport à la conique $abcdp'$. Les deux coniques $abcdp$, $pfghp'$ sont, par rapport à la cubique, les premières polaires de p, p' (*).

Ces préliminaires étant posés, je considère un triangle ABC, et, pour me conformer aux notations adoptés dans plusieurs

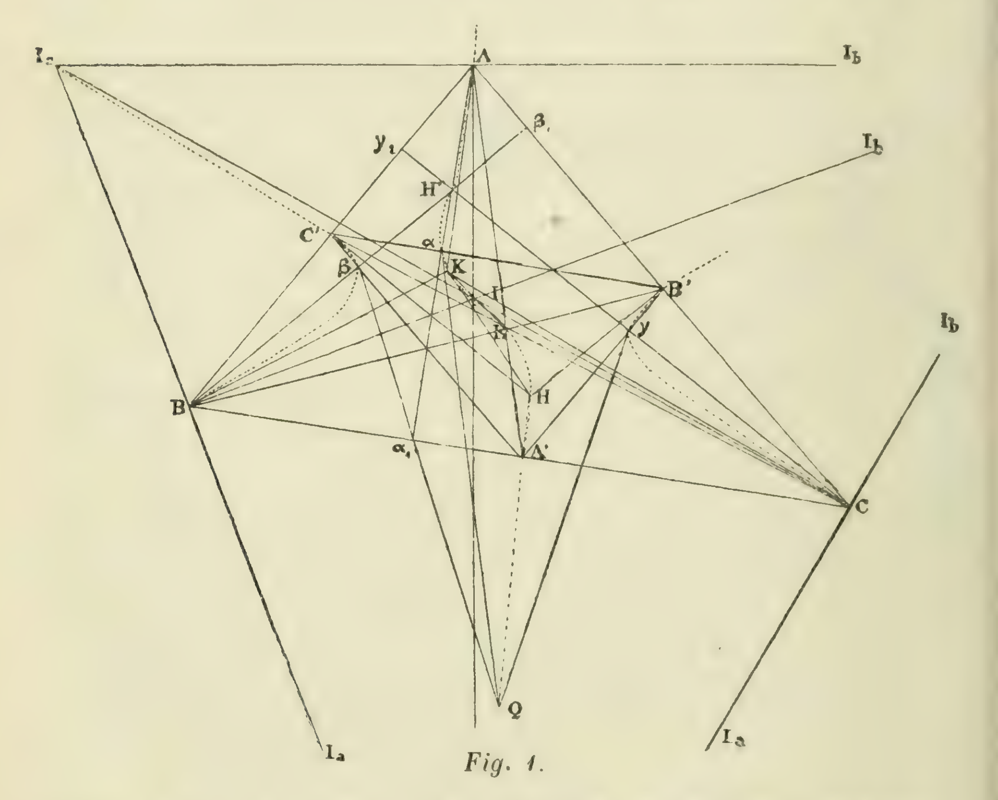


Fig. 1.

articles de ce Journal par M. Brocard et d'autres géomètres, je désignerai par les lettres E, H, H', K le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le point de Lemoine. Soient, en outre, A', B', C' les milieux des côtés BC, CA, AB ; α_1, β_1, γ_1 les pieds des hauteurs, α, β, γ

(*) Pour plus de détails à ce sujet, voir mon *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre* (*Nouvelles Annales*, t. XI, 1872.)

leurs milieux; enfin I, I_a, I_b, I_c les centres du cercle inscrit et des trois cercles exinscrits.

L'application des principes rappelés ci-dessus permet de reconnaître que les dix-sept points A, B, C, A', B', C', α, β, γ, E, H, H', K, I, I_a, I_b, I_c, appartiennent à une même cubique. Cette propriété et plusieurs autres peuvent être mises en évidence en engendrant la cubique dont il s'agit de trois manières différentes.

Premier mode de génération. — Je considère la cubique engendrée par les intersections du faisceau de coniques déterminé par les sommets du triangle et par le centre de gravité E, avec les polaires du point de Lemoine K par rapport à ces coniques (*fig. 1*). Le point de concours des polaires de K est le centre H du cercle circonscrit. En effet, la polaire de K par rapport à la conique formée du couple de droites (AC, BE) est la droite HB' passant par le milieu B' de CA et perpendiculaire à ce côté, puisque la heuteur $B\beta_1$ du triangle est partagée en deux parties égales par B'K, B'E, B'C, d'après une propriété bien connue du point de Lemoine ; autrement dit, la perpendiculaire B'H à AC est conjuguée harmonique de B'K par rapport aux droites B'C, B'B qui constituent la conique. De même C'H, A'H sont les polaires de K par rapport aux couples (AB, CE), (BC, AE).

On conclut de ces remarques que la cubique engendrée par les deux faisceaux passe en A, B, C, E, H, K que la tangente en K est la droite KH, et que les tangentes en A, B, C, sont les médianes antiparallèles. La courbe passe aussi par les milieux A', B', C' des côtés, et les tangentes en ces points sont A'H, B'H, C'H ; elle coupe donc normalement les côtés en leurs milieux.

A la conique du faisceau (ABCE) qui touche EK en E correspond la polaire HEH' ; mais cette conique n'est autre chose que l'hyperbole des neuf points signalée par MM. Kiepert et Brocard ; on sait que le point K est le pôle de la droite HEH' par rapport à cette hyperbole équilatère (voir *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, p. 31). Donc l'orthocentre H'

est un point de la cubique. Je démontrerai ce fait un peu plus loin d'une autre manière.

Deuxième mode de génération. — Je construis la cubique engendrée par le faisceau des coniques $(II_aI_bI_c)$ et par le faisceau des polaires du point E.

Il est facile de voir que les deux bissectrices de l'angle A sont conjuguées harmoniques par rapport à la médiane AA′ et à la médiane antiparallèle AK. D'après cela, les polaires de E par rapport aux coniques du faisceau qui sont constituées par les trois couples de bissectrices des angles A, B, C, sont précisément les médianes antiparallèles, et K est le point de concours de toutes les polaires. Ainsi la nouvelle cubique passe en A, B, C, E, K; les tangentes en A, B, C sont AK, BK, CK, comme pour la première; la tangente en E est EK, enfin la tangente en K est la tangente à la conique du faisceau qui passe par ce point K; c'est donc KH. Nous avons ainsi deux cubiques ayant cinq points communs avec les mêmes tangentes, et par suite, elles coïncident. Ajoutons que les tangentes aux points I, I_a, I_b, I_c sont les droites EI, EI_a, ...

Troisième mode de génération. — Je prends pour base du faisceau de coniques (A′B′C′K) et pour pôle le point H. Les tangentes en A′, B′, C′, K à la cubique ainsi obtenue seront encore les roites A′H, B′H, C′H, KE. La tangente en H à la cubique donnée par le premier mode de génération, est la tangente à la conique HA′B′C′K; d'après le mode de génération actuel, c'est la polaire de H par rapport à cette même conique; ainsi les deux tangentes coïncident.

Les deux cubiques ont encore cinq points communs et cinq tangentes communes en ces points, et elles se confondent.

Les milieux α, β, γ des hauteurs du triangle appartiennent à la cubique, car ce sont les points de concours des couples de droites (B′C′, A′K), (C′A″, B′K), (A′B′, C′K) qui font partie du faisceau de coniques (A′B′C′K). Les tangentes en ces points sont les droites qui les joignent au point de concours Q des polaires de H par rapport à toutes les coniques de ce faisceau. Ce point Q, facile à construire avec la règle seule,

est le tangentiel de H; ses distances aux côtés du triangle sont proportionnelles à

$$\frac{\cos A \sin B \sin C}{\cos A - \cos B \cos C}, \quad \frac{\cos B \sin C \sin A}{\cos B - \cos C \cos A}, \quad \frac{\cos C \sin A \sin B}{\cos C - \cos A \cos B}.$$

J'ai dis plus haut que la cubique passait par l'orthocentre H', et je me suis appuyé sur ce que la droite HEH' est la polaire de K par rapport à l'hyperbole des neuf points. Voici comment on peut arriver directement au même résultat, en partant du troisième mode de génération que j'ai considéré.

Les points de la courbe situés sur la transversale HEH'

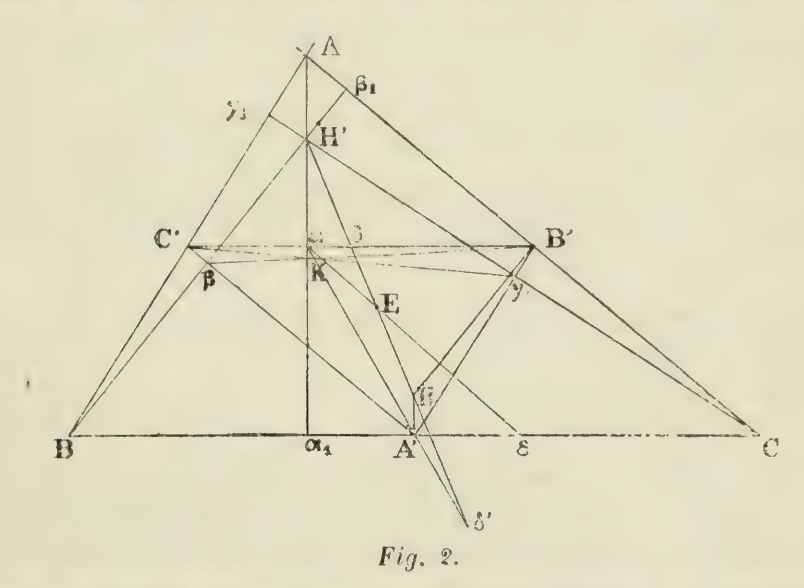


Fig. 2.

sont les points de contact des deux coniques du faisceau (A'B'C'K) qui touchent cette transversale, ou les points doubles de l'involution déterminée par les coniques du faisceau. Soit en particulier la conique (B'C', A'Kα) qui rencontre la transversale en δ, δ'; *(fig. 2)* il est aisé de voir que EH' divise harmoniquement le segment $\delta\delta'$. En effet, prolongeons αE jusqu'à la rencontre de BC en ε; on aura $\alpha_1 A' = A'\varepsilon$, car $\varepsilon C = 2C'\alpha = B\alpha_1$, et, comme A' est le milieu de BC, ce point est aussi le milieu de $\alpha_1\varepsilon$. Il résulte de là que le faisceau de rayons $\alpha(E\delta\alpha_1 A')$ est harmonique, puisque la parallèle au rayon $\alpha\delta$ menée par A' est divisée en deux parties égales par αE, $\alpha\alpha_1$; les quatre points E, δ, H', δ' où le faisceau $\alpha(E\delta\alpha_1 A')$ coupe la droite HEH' sont donc harmoniques.

De même les points E, H′ divisent harmoniquement les segments déterminés sur HEH′ par les deux autres couples de droites (C′A′, B′β), (A′B′, C′γ) qui font partie du faisceau de coniques (A′B′C′K). Donc enfin E, H′ sont les points doubles de l'involution, et ils appartiennent tous deux à la cubique.

En résumant tout ce qui précède, on peut énoncer les théorèmes suivants :

1° *Les sommets d'un triangle, les milieux des côtés, les milieux des hauteurs, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, l'orthocentre, le point de Lemoine, les centres des quatre cercles tangents aux côtés sont situés sur une même cubique;*

2° *Les tangentes à la courbe aux sommets du triangle sont les médianes antiparallèles.*

3° *Les tangentes aux points* I, I_a, I_b, I_c *se coupent au centre de gravité.*

4° *Le point de Lemoine est le tangentiel du centre de gravité; le centre du cercle circonscrit est le tangentiel du point de Lemoine.*

5° *Les tangentes aux points* A′, B′, C′, *milieux des côtés, sont les perpendiculaires aux côtés.*

6° *Les tangentes aux points* α, β, γ, *milieux des hauteurs, passent par le tangentiel* Q *du centre du cercle circonscrit, dix-huitième point de la courbe dont j'ai indiqué la construction.*

J'ai signalé dans mes *Exercices de géométrie analytique* (p. 195, 196), la cubique dont je viens de présenter une étude sommaire, et qui pourrait être appelée *cubique des dix-sept points*. Son équation en coordonnées trilinéaires est

$$bcx(y^2 - z^2) + cay(z^2 - x^2) + abz(x^2 - y^2) = 0$$

a, b, c étant les longueurs des côtés du triangle.

Si de chaque point de la courbe, comme centre, on décrit deux coniques, l'une circonscrite, l'autre inscrite au triangle, les normales à la conique circonscrite, aux trois sommets, se coupent en un même point, et il en est de même pour les normales à la conique inscrite aux points où elle touche les côtés; de plus, les axes des deux coniques inscrite et circonscrite ont les mêmes directions. Enfin, le lieu des points de concours des normales est une autre cubique qui coupe la première aux neuf points A, B, C, H, H′, I, I_a, I_b, I_c.

Nota. — La cubique en question a été également rencontrée par M. Vigarié qui en avait fait l'objet d'une question qu'il comptait proposer dans ce journal. Depuis, M. Vigarié a trouvé une origine, relativement ancienne, à cette cubique remarquable. Thomson a proposé sa recherche dans l'*Educational Times* (août 1864). Elle a été reprise dans les *Nouvelles Annales* (1865, p. 141). et résolue (*loc. cit.* p. 469). Thomson n'indique pas que la cubique en question passe par le centre du cercle circonscrit et par le point de Lemoine, mais il signale tous les autres points.

Pour la seconde cubique signalée à la fin du présent article le lecteur pourra consulter une note bibliographique placée à la suite de la solution de la question 114, solution publiée dans le présent numéro. G. L.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

TOUTE ÉQUATION ALGÉBRIQUE A UNE RACINE

Par M. **Porchon**, professeur au Lycée de Versailles.

(*Suite*, voir p. 154.)

Démonstration du théorème de d'Alembert. — Considérons maintenant une équation algébrique de degré m, à coefficients réels ou imaginaires, et que nous écrirons en mettant en évidence le module et l'argument de chaque coefficient,

$$x^m + A_{m-1}(\cos\alpha_{m-1} + i\sin\alpha_{m-1})x^{m-1}\ldots$$
$$+ A_0(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0) = 0. \qquad (1)$$

Posons $x = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ρ désignant une quantité positive et φ un arc réel. L'équation devient

$$\rho^m\cos m\varphi + A_{m-1}\rho^{m-1}\cos[\alpha_{m-1} + (m-1)\varphi]\ldots$$
$$+ A_0\cos\alpha_0 \qquad (2)$$
$$i + \{\rho^m\sin m\varphi + A_{m-1}\rho^{m-1}\sin[\alpha_{m-1} + (m-1)\varphi]\ldots$$
$$+ A_0\sin\alpha_0\} = 0,$$

Nous désignerons la partie réelle et le coefficient de i respectivement par $F(\rho, \varphi)$, $G(\rho, \varphi)$, en sorte que l'équation

s'écrira

$$F(\rho, \varphi) + iG(\rho, \varphi) = 0. \qquad (3)$$

Il est clair que les fonctions F et G sont continues. Lorsque ρ a une valeur suffisamment grande, chacune de ces fonctions prend le signe de son premier terme, pourvu qu'il ne soit pas nul. Le premier terme de F, et par suite F change de signe quand on substitue à φ deux valeurs de forme $(2K + 1)\dfrac{\pi}{2m} \pm \omega$, K désignant un nombre entier, et ω une quantité réelle très petite. Il en est de même de G quand on substitue $2K\dfrac{\pi}{2m} \pm \omega$. Donc F et G respectivement ont au moins une racine de première espèce dans chaque petit intervalle compris entre les deux substitutions. Cela fait pour chacune $2m$ racines comprises entre zéro et 2π, limites auxquelles on peut se borner, puisque l'on tombe sur des arcs ayant pour différence une circonférence lorsqu'on donne à K deux valeurs différant de $2m$.

Mais, quel que soit ρ, chaque fonction ne peut jamais avoir plus de $2m$ racines. En effet, le système d'équations :

$$F(\rho, \varphi) = 0, \qquad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

dont l'une est du degré m et l'autre du deuxième degré par rapport à $\sin\varphi$ et à $\cos\varphi$, a, au plus, $2m$ solutions. Ainsi, lorsque ρ est très grand, chaque fonction a une racine et une seule dans chacun des intervalles considérés, et n'en a aucune autre.

Observons de plus que deux racines consécutives de F, substituées dans G, donnent alors des résultats de signes contraires, et *vice versa*. Donc, si l'on range par ordre de grandeur croissante toutes les racines de F et de G indistinctement, celles de F alternent régulièrement avec celles de G.

En d'autres termes, lorsque ρ est très grand, le produit FG a $4m$ racines (non congrues suivant le module 2π) savoir $2m$ racines de F et $2m$ de G, les secondes alternant régulièrement avec les premières.

Maintenant si l'on fait $\rho = 0$, les fonctions F et G se réduisent à $A_0 \cos \alpha_0$ et $A_0 \sin \alpha_0$. Elles ne sont pas nulles ensemble, à moins que A_0 ne soit nul, auquel cas le théo-

rème est évident. Si, par exemple, cos α_0 n'est pas nul, la fonction F n'a plus de racines quand ρ est nul. Donc le produit FG n'a plus alors $4m$ racines. Il s'ensuit que, pour certaines valeurs intermédiaires de ρ, ce produit a des racines égales.

Alors de deux choses l'une : ou une racine de F se confond avec une de G, et le théorème est démontré; ou deux racines soit de F, soit de G, sont égales. Mais puisque ces racines alternent lorsque ρ est très grand, cette égalité ne peut se produire sans qu'une racine de F soit venue d'abord se confondre avec une de G. Ainsi il faut que pour une certaine valeur de ρ, F et G soient nuls ensemble. C. Q. F. D.

REMARQUE. — Ce raisonnement prouve même que l'équation a m racines. Considérons en effet les changements de signe que subit le produit FG lorsque, φ croissant, F passe par zéro. Appelons les racines de F *ascendantes* ou *descendantes* suivant que ce changement de signe est du négatif au positif, ou inversement. Convenons de dire que deux racines consécutives de F forment une permanence ou une variation suivant qu'elles sont, à ce point de vue, de même nature ou de nature contraire.

Il y a permanence ou variation suivant que les deux racines de F comprennent un nombre pair ou un nombre impair de racines de G. Si donc des racines de G viennent apparaître ou disparaître entre deux de F, comme elles le font en nombre pair, le nombre de permanences n'en est pas altéré. Il en est de même si des racines de F apparaissent ou disparaissent entre deux racines de G : car leur série ne présente que des variations.

Ainsi pour que le nombre des permanences s'altère, il est nécessaire (et non suffisant) qu'une racine de F et une de G s'intervertissent en devenant d'abord égales. Ce fait change la nature d'une racine; si elle est entre deux racines de même nature, le nombre des permanences diminue ou augmente de 2; autrement, il n'est pas altéré (*).

(*) Le nombres des permanences peut encore varier lorsque deux racines de F (ou de G) disparaissent en tendant d'abord vers une racine de G (ou de F) comprise entre elles. Mais ce cas particulier peut être considéré comme une limite du cas général.

Cela posé, lorsque ρ est très grand, le nombre des permanences formées par chacune des $2m$ racines de F et la suivante est $2m$, ces racines étant toutes ascendantes (pour avoir $2m$ intervalles, nous considérons les racines comme rangées en cercle). Lorsque ρ est nul, ce nombre se réduit à zéro. Donc il a varié de $2m$, c'est-à-dire que les fonctions F et G ont m fois une racine commune lorsque ρ décroît de l'infini à zéro.

Il est clair que plusieurs racines de G peuvent tendre en même temps vers des racines de F; il faudra alors considérer l'équation (1) comme ayant des racines multiples. Nous omettrons d'examiner ce cas en détail.

Corollaire. — *Lorsque ρ décroît, le nombre des permanences des racines de* F *(ou de* G*) n'augmente jamais. Lorsqu'une racine de* G *tend vers une racine de* F, *celle-ci est toujours suivie et précédée immédiatement de racines de même nature que la sienne. Car autrement l'équation* (1) *aurait plus de* m *racines.*

On démontre aisément, de plus, que cette racine de F est toujours ascendante, et qu'elle est suivie et précédée immédiatement de racines ascendantes. F n'a jamais deux racines descendantes consécutives.

NOTE SUR LA STROPHOIDE

Par M. **Lebel**, maître répétiteur au Lycée de Nice.

(*Suite et fin*, voir p. 147.)

---

7. — Les remarques précédentes fournissent le moyen de construire facilement la tangente en un point M_1 d'une strophoïde.

Conservons les mêmes notations que précédemment. On construira le point M_2 qui est le symétrique par rapport à Ox du deuxième point M_3 situé sur la transversale AM_1. On joindra M_1M_2 et l'on décrira de O comme centre un cercle

tangent à M_1M_2. La deuxième tangente menée de M_1 à ce cercle est la tangente cherchée. On obtient en même temps la tangente au point M_2 et la tangente symétrique au point M_3.

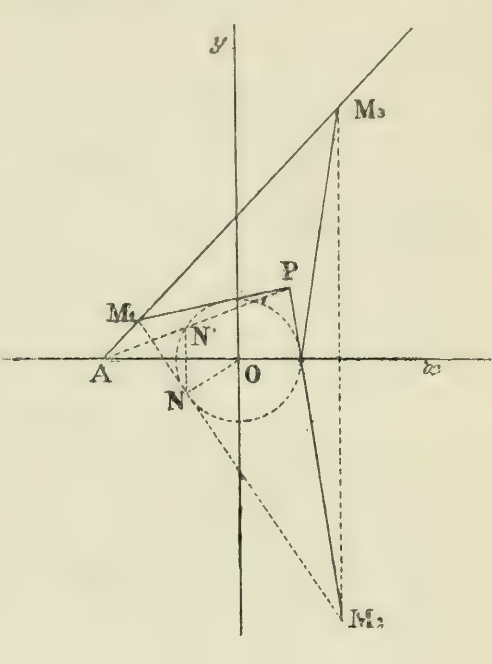


Fig. 2.

8. — On peut aussi se proposer, étant donné le point P, de construire les tangentes PM_1PM_2. On obtiendra le point N par la même construction qui a servi à déterminer le point M_2; les droites PM_1 PM_2 sont les tangentes menées de P au cercle de rayon ON. Les points de contact sur la strophoïde sont déterminés par la droite M_1M_2 tangente au point N au cercle O.

9. — Quelques considérations sur le cercle circonscrit au triangle M_1PM_2 permettent d'arriver aux mêmes résultats par une autre voie.

Le sommet A *de la strophoïde et les trois sommets du triangle* M_1PM_2 *sont sur un même cercle.*

Soit

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y - a(a + 2x_0) = 0$$

l'équation d'un cercle passant par le point A. Formons une combinaison homogène de cette équation et de celle de la strophoïde, puis posons $\frac{y}{x} = t$, et écartons la racine nulle correspondant au point A; il vient finalement :

$$t^3 - 2\frac{y_0}{a}t^2 - \left(3 + 4\frac{x_0}{a}\right)t + 2\frac{y_0}{a} = 0. \qquad (14)$$

Supposons que ce cercle passe par les points M_1 M_2 et calculons la racine τ de l'équation (14) correspondant au qua-

trième point d'intersection du cercle et de la strophoïde.

Écrivons les relations :

$$\tau + (t_1 + t_2) = 2\frac{y_0}{a},$$

$$(t_1 + t_2)\tau + t_1 t_2 = -\left(3 + 4\frac{x_0}{a}\right),$$

$$\tau t_1 t_2 = -2\frac{y_0}{a},$$

qui deviennent

$$\tau - 2\theta = \frac{2y_0}{a},$$

$$1 - 2\theta\tau = -\left(3 + 4\frac{x_0}{a}\right),$$

$$\tau = -2\frac{y_0}{a}.$$

Ajoutons la première et la troisième; il vient

$$\tau = 0.$$

Le cercle passe donc par le point P; les coordonnées de son centre sont

$$x_0 = \frac{a}{2}\left(\theta^2 - 2\right),$$

$$y_0 = -\frac{a}{2}\theta.$$

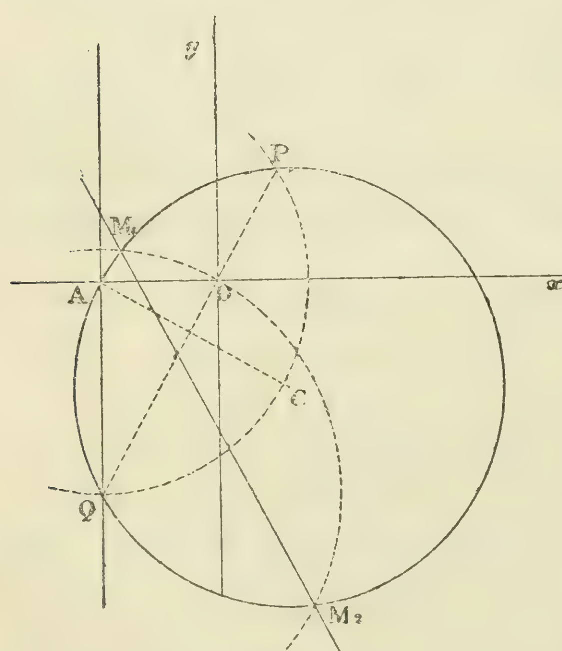


Fig. 3.

Si on élimine θ, on trouve pour le lieu du centre C la parabole

$$y^2 = \frac{a}{2}\left(x + a\right).$$

L'équation du cercle C devient

$$x^2 + y^2 - a(\theta^2 - 2)x + a\theta y - a^2(\theta^2 - 1) = 0.$$

Faisons dans cette équation $x = -a$, il vient

$$y^2 + a\theta y = 0.$$

Ce cercle rencontre la tangente en A à la strophoïde en un point Q dont l'ordon-

née est égal à $-a\theta$, c'est-à-dire au même point que le prolongement de OP.

La droite AC a pour coefficient angulaire

$$\frac{-\frac{a}{2}\theta}{a+\frac{a}{2}(\theta^2-2)} = -\frac{1}{\theta}.$$

Elle est donc perpendiculaire à OP ; il en résulte que

$$AP = AQ.$$

Les relations (3) et (5) dans lesquelles on remplace $t't''t'''$ par $t_1t_2t_3$, c'est-à-dire par leurs valeurs en fonction de θ, déterminent u et v, et par suite l'équation de M_1M_2.

$$\theta^2x + \theta y - a(\theta^2 - 1) = 0.$$

On peut considérer cette droite comme étant l'axe radical des deux cercles

$$x^2 + y^2 - a(\theta^2 - 2)\,x + a\theta y - a^2(\theta^2 - 1) = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2ax + 2a\theta y = 0.$$

Le premier est le cercle C ; le deuxième est le cercle décrit de Q comme centra avec QO pour rayon.

10. Constructions. — 1° Si on se donne le point P, on trouvera les points M_1M_2 en construisant les deux cercles C et Q, comme l'indique suffisamment la figure. On détermine ainsi les deux tangentes PM_1 PM_2 menées de P à la courbe.

2° Pour obtenir la tangente en un point M_1 de la strophoïde, il suffit de déterminer le point Q sur AQ par une perpendiculaire élevée sur le milieu de OM_1. Comme AP $=$ AQ, le point P sera donné par l'intersection de OQ et du cercle décrit de A comme centre avec AQ pour rayon. PM_1 est la tangente demandée.

11. Remarque. — La construction de la tangente en un point d'une strophoïde, telle que nous l'avons exposée, est une application naturelle des remarques qui ont été faites et on pourrait l'utiliser si l'on n'avait pas déjà des constructions plus simples et plus précises. Mais, en particulier, la méthode des transversales réciproques, exposée dans le traité de géo-

métrie analytique de M. de Longchamps, fournit un moyen beaucoup plus rapide d'obtenir cette tangente.

12. — Enfin, proposons nous de chercher le lieu décrit par le centre de gravité ω du triangle M_1PM_2, lorsque P se déplace sur la courbe.

Le pied K de la médiane issue de P est sur Oy, puisque les points M_1 et M_2 sont équidistants de Oy. En faisant $x = 0$ dans l'équation de M_1M_2 on trouve

$$OK = -a\frac{\theta^2 - 1}{\theta}.$$

Les coordonnées de P sont

$$a\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1} \qquad a\frac{\theta(\theta^2 - 1)}{\theta^2 + 1}.$$

Le segment $K\omega$ est le tiers du segment KP, ce qui donne pour les coordonnées de ω

$$x = \frac{a}{3}\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1},$$

$$y = \frac{a}{3}\left[\frac{\theta(\theta^2 - 1)}{\theta^2 + 1} - \frac{\theta^2 - 1}{\theta}\right]$$

ou

$$y = \frac{a}{3}\left[\frac{\theta^2(\theta^2 - 1) - (\theta^2 + 1)(\theta^2 - 1)}{\theta(\theta^2 + 1)}\right] = -\frac{a}{3}\frac{\theta^2 - 1}{\theta(\theta^2 + 1)}.$$

On voit déjà que

$$y = -\frac{1}{\theta}x,$$

$O\omega$ *est perpendiculaire sur* OP. Remplaçons θ par $-\frac{x}{y}$ dans l'expression de y ; il vient pour l'équation du lieu

$$(x^2 + y^2)x - \frac{a}{3}(x^2 - y^2) = 0.$$

C'est une strophoïde homothétique inverse de la première, par rapport au point double.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 158.)

101. — On peut obtenir l'équation des cubiques circulaires unicursales sous une forme plus simple de la manière suivante.

Prenons un rectangle OABC, puis O et O″ étant deux points fixes, effectuons le tracé 1, 2, 3, lequel, au fond est identique au précédent.

En projetant sur la direction OI les contours brisés OCO″, OIMO″, on a immédiatement

$$\rho + \frac{h - b}{\sin \omega} = a \cos \omega + h \sin \omega,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

Fig. 77.

$$y(x^2 + y^2) = (b - h)x^2 + by^2 + axy.$$

Si nous supposons que nous ayions

$$b = h - b, \quad \text{ou} \quad h = 2b,$$

les tangentes au nœud sont rectangulaires et le lieu décrit par le point I est une strophoïde.

Cherchons à vérifier directement ce fait. Supposons donc que le point O″ *(fig. 78)* soit tellement placé que O″B = BC ; alors la droite OO″ coupe AB au point K en deux parties égales. D'ailleurs les triangles OAH, O″BM étant égaux, nous avons AH = MB et, par suite, HK = KM.

La droite IK joint donc le sommet d'un triangle rectangle

au milieu de l'hypothénuse; par conséquent le triangle IKH est isocèle. Mais alors ILO, lui aussi, est isocèle et l'on peut considérer le point I comme décrivant une strophoïde dans

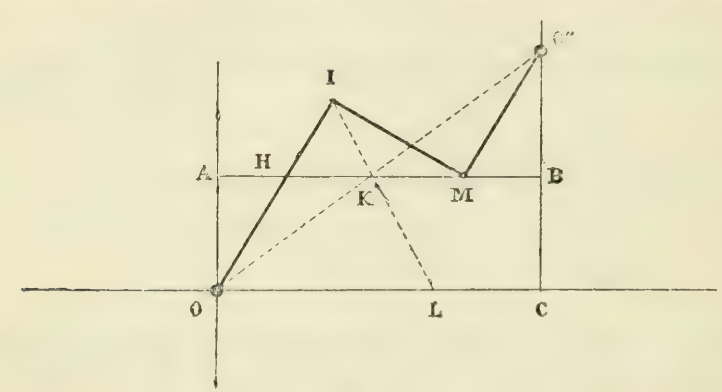


Fig. 78.

les conditions suivantes : les points K et O sont fixes, et, sur la transversale mobile IKL, rencontrant en L la droite fixe OC, on prend, à chaque instant, LI = LO.

Nous allons indiquer maintenant une construction qui est une application très particulière de la transformation conchoïdale des courbes que nous avons développée ailleurs; cette construction nous conduira, et c'est le principal intérêt qu'elle présente, à la détermination, tangente par tangente, des cubiques circulaires unicursales. Il convient d'observer comme on va le vérifier d'ailleurs, qu'elle n'exige, comme tous les tracées que nous exposons dans cet ouvrage, que l'emploi de la règle et de l'équerre; mais elle est singulièrement simplifiée si l'on s'accorde l'usage du compas à pointes sèches, instrument qui permet de déplacer, dans une épure, la position d'une longueur donnée, sans pourtant faire usage des arcs de cercles.

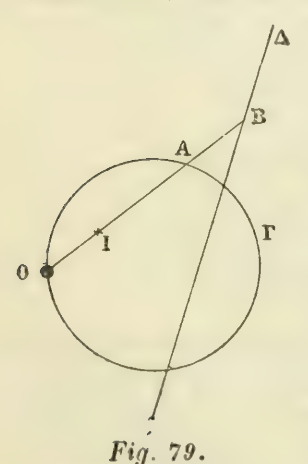


Fig. 79.

102. Tracé normal des cubiques circulaires unicursales. — Les cubiques que nous étudions ici peuvent être considérés comme des conchoïdales, courbes transformées de la droite et du cercle d'après la définition suivante.

Soient une droite Δ, un cercle Γ et un point O sur Γ ; par O menons une transversale OAB et prenons OI = AB ; il est facile de vérifier que le lieu décrit par le point I est une cubique circulaire unicursale. On obtient la strophoïde en prenant pour Δ une droite passant par le centre de Γ.

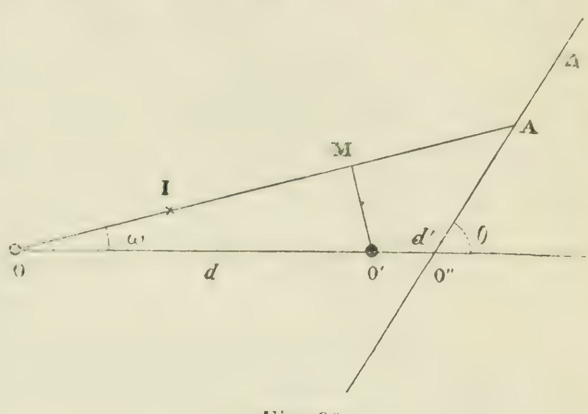


Fig. 80.

Mais voici comment, le tracé du cercle Γ n'étant pas accordé, on peut réaliser la construction précédente.

Imaginons une droite Δ et deux points quelconques O, O′ ; par O′ menons une droite mobile O′M et du point O abaissons une perpendiculaire OM ; enfin, prenons OI = AB. Le lieu du point I est une cubique circulaire unicursale.

Nous avons en effet $\mathrm{OM} = d \cos \omega$,

et
$$\mathrm{OA} = \frac{(d + d') \sin \theta}{\sin (\theta - \omega)}.$$

Finalement, l'équation polaire du lieu décrit par I est

$$\rho = \frac{(d + d') \sin \theta}{\sin (\theta - \omega)} - d \cos \omega$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(x^2 + y^2)(x \sin \theta - y \cos \theta) = x^2 d' \sin \theta + y^2 (d + d') \sin \theta + d\, xy \cos \theta.$$

Cette égalité représente une strophoïde quand on a

$$d + 2d' = 0,$$

c'est-à-dire lorsque Δ passe par le milieu de OO′.

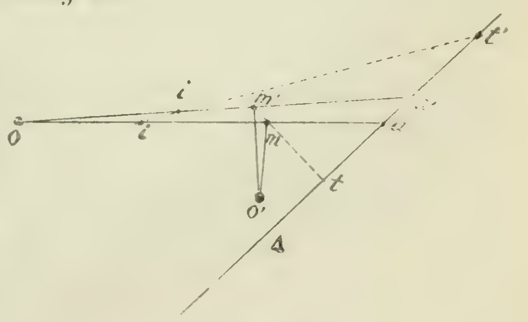


Fig. 81.

103. Tracé de la tangente. — Comme nous l'avons annoncé tout-à-l'heure cette construction, point par point, des cubiques

circulaires unicursales permet de les déterminer, tangente par tangente, comme nous allons l'indiquer.

Considérons deux positions infiniment voisines de la construction que nous venons d'indiquer. Dans le triangle oaa', nous pouvons considérer ii' et mm' comme deux transversales réciproques, de telle sorte que les points t et t' sont isotomiques sur aa'.

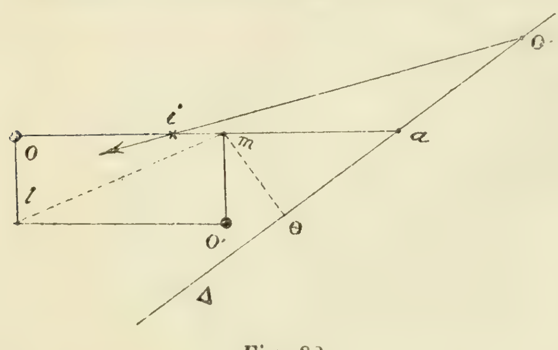


Fig. 82.

En passant à la limite on est conduit par ces considérations au tracé indiqué par la figure.

Dans cette construction : $oo'ml$ est un rectangle, $m\theta$ est perpendiculaire sur ml et on a pris $a\theta' = \theta a$. La droite $\theta' i$ est la tangente cherchée. *(A suivre).*

QUESTION 114

Solution par M. Taratte, élève de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

Parmi toutes les coniques circonscrites à un même triangle ABC, *on considère seulement la série de celles pour chacune desquelles les normales en* A, B, C *sont concourantes, et l'on demande le lieu du point de concours.* (E. V.)

Prenons pour axe des x le côté BC et pour axe des y la hauteur correspondante. Soient b, c les abcisses des points B et C et a l'ordonnée du point A, l'équation générale des coniques circonscrites au triangle est

$$Ay\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1\right) + By\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{a} - 1\right)$$
$$+ D\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1\right) = 0.$$

Soient x, y les coordonnées d'un point du lieu, exprimons que les normales en A, B, C passent par ce point, nous aurons les relations

$$\frac{bcx}{a(Ab + Bc)} = \frac{y - a}{A + B}$$
$$\frac{b(x - b)}{D} = \frac{ay}{Aa + D}$$
$$\frac{c(x - c)}{D} = \frac{ay}{Ba + D}.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer A, B, D entre ces trois équations. On peut les écrire

$$A[ab(y - a) - bcx] = B[bcx - ac(y - a)],$$
$$D[ay - b(x - b)] = Aab(x - b),$$
$$Bac(x - c) = D[ay - c(x - c)]$$

Multiplions membre à membre et nous aurons l'équation du lieu

$$(cx - ay + a^2)(bx - ay - b^2)(x - c)$$
$$+ (bx - ay + a^2)(cx - ay - c^2)(x - b) = 0.$$

On a immédiatement des points du lieu par les intersections des droites :

$$cx - ay + a^2 = 0, \quad bx - ay - b^2 = 0, \quad x - c = 0$$

avec les droites

$$bx - ay + a^2 = 0, \quad cx - ay - c^2 = 0, \quad x - b = 0.$$

Ces droites sont les perpendiculaires élevées en chaque sommet sur les côtés qui y aboutissent.

On pourrait *à priori* trouver des points de la courbe. Il y a d'abord les trois sommets du triangle; par exemple, le sommet A; car, parmi les coniques considérées, il y en a une qui a pour normales en B et C les droites AB et AC, le point A est donc le point de rencontre de trois normales.

Consdérons les perpendiculaires en B et C aux côtés AB et AC; ces droites se coupent en un point M qui appartient à la courbe : en effet, les droites MB, MC, MA sont trois normales à la conique formée par les droites AB et AC. Il est d'ailleurs évident que la courbe passe par le centre du cercle circonscrit au triangle et on voit facilement qu'elle est symétrique par rapport à ce point.

Asymptotes. — On voit à l'inspection de l'équation qu'une des asymptotes est la droite

$$x = \frac{b + c}{2},$$

c'est-à-dire la perpendiculaire élevée au milieu de AB. Comme rien ne distingue les côtés du triangle, les autres asymptotes sont les perpendiculaires élevée sur les milieux des deux autres côtés.

Cas particuliers. — 1° $c = b$, le triangle est isocèle, AB = BC. L'équation du lieu se décompose et l'on a

$$x = 0, \quad \text{et} \quad b^2x^2 - a^2y^2 + a(a^2 - b^2)y - b^4 = 0.$$

La première donne la hauteur relative au côté BC; l'autre représente une hyperbole, ayant pour centre le centre du cercle circonscrit au triangle et pour asymptotes les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés égaux.

2° Si le triangle est équilatéral le lieu se réduit aux trois hauteurs.

Nota. — Nous avons reçu d'autres solutions de cette question, mais elles renferment toutes des inexactitudes graves et elles sont encore plus incomplètes que la précédente.

Pour perfectionner celle-ci, on peut ajouter aux résultats signalés les remarques suivantes :

1° La courbe passe par l'orthocentre H;

2° Par le centre du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits ;

3° Elle coupe les côtés du triangle ABC, par exemple BC en un point A′ lequel s'obtient en joignant le milieu M′ de BC à H et en menant, par A, une parallèle AA′ à M′H.

4° Si l'on considère des coniques inscrites au triangle ABC et telles que les normales aux points de contact soient concourantes, le lieu décrit par ce point de concours est identique au précédent.

Cet exercice ayant été proposé dans ce journal nous avons cru devoir communiquer à ses lecteurs la solution précédente avec les remarques que nous y avons ajoutées. Mais on peut observer que la question n'est pas nouvelle. Elle a été proposée par M. Darboux (*Nouvelles Annales*, 1866, p. 95) et résolue (*loc. cit.* p. 420) par M. L. Biny, en employant les coor-

données barycentriques, *coordonnées naturelles* de cette question qui paraît être de celles qui semblent destinées à renaître, de temps à autre, car on la retrouve encore dans l'*Educational Times* proposée sous le n° 8396 par le professeur F. Purser et résolue (n° du 1er mai 1886) par le professeur Sircom *and others*. G. L.

BOURSES DE LICENCE (1886)

On considère le système S des plans représentés par l'équation

$$\mu^3 + 3\mu^2 x + 3\mu y + z = 0,$$

dans laquelle μ désigne un paramètre variable.

Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires. Soit M le plan de ce système pour lequel le paramètre μ a la valeur particulière m. Par chaque point A du plan M passent deux plans M', M'' du système S, autre que le plan M. Soient μ', μ'' les valeurs du paramètre μ relatives à ces deux plans.

1° Suivant la région du plan M à laquelle appartient le point A. Les nombres μ', μ'' sont réels ou imaginaires et comprennent entre eux le nombre m ou bien sont tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à lui. Distinguer ces diverses régions.

2° Trouver dans le plan M le lieu des points A tels que les deux plans M', M'' soient perpendiculaires entre eux; trouver dans l'espace le lieu des points tels que deux des trois plans du système S qui passent par l'un quelconque d'entre eux soient perpendiculaires.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1886)

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle et deux points P et Q situés sur un de ses diamètres; on joint les points P et Q aux extrémités A et B d'un diamètre du cercle par les droites PA et QB qui se coupent au point M; on fait tourner le diamètre AB, et on demande :

1° D'étudier la variation du rapport $\frac{MA}{MB}$, et de construire la figure lorsque ce rapport a une valeur donnée;

2° D'étudier la variation de l'angle AMB, et de construire la figure lorsque cet angle a une valeur donnée;

3° A′ et B′ étant les seconds points d'intersection des droites MA et MB avec la circonférence du cercle donné, de trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MA′B′.

L'analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Démontrer que, quand n augmente indéfiniment, la fraction

$$\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)}$$

tend vers une limite $\Gamma(a)$, qui est une fonction bien déterminée de la variable a, pour toute valeur réelle ou imaginaire de cette variable.

Montrer que si l'on donne à a une valeur positive, la fonction $\Gamma(a)$ est égale à l'intégrale eulérienne

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

Démontrer que, pour une valeur quelconque de a, on a les relations suivantes :

$$a\Gamma(a) = \Gamma(a+1),$$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Application. — On désigne par p et q deux quantités réelles, et on propose :

1° De caculer le module de $\Gamma(qi)$;

2° De montrer que $\Gamma(p+qi)$ tend vers zéro lorsque q devient infini, la quantité p restant comprise entre $-\infty$ et un nombre positif fini;

3° De calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(1+yi)dy.$$

Mécanique rationnelle.

Un solide homogène, sur lequel n'agit aucune force extérieure, a la forme d'un parallélipipède rectangle dont les arrêtes ont respectivement pour longueur a, $2a$, $4a$; il est d'abord en repos, mais il peut se mouvoir librement dans l'espace.

Une sphère homogéne, animée d'un mouvement uniforme de translation dont la vitesse U est parallèle aux arêtes moyennes du parallélipipède, vient choquer ce solide en un point M situé sur l'une de ses faces F, perpendiculaire à ces arêtes moyennes.

La masse du parallélipipède est représentée par 12, et celle de la sphère par 4; les deux solides sont parfaitement élastiques.

Cela posé, on demande :

1° De déterminer les conditions initiales des mouvements que les deux solides prendront après le choc;

2° D'étudier le mouvement que prendra ultérieurement le parallélipipède dans le cas particulier où le point M coïncide avec l'un des sommets de la face choquée F.

Mathématiques spéciales.

Etant donnés dans un plan une droite D, un point O sur cette droite, et une droite D′ :

1° Former l'équation générale des coniques qui touchent la droite D au point O et qui ont la droite D′ pour directrice;

2° Démontrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque P du plan; déterminer les régions du plan où doit se trouver le point P pour que ces deux courbes soient réelles, et, dans ce cas, en reconnaître le genre.

3° Les deux coniques du faisceau considéré qui passent par le point P se coupent en outre en un point P′; calculer les coordonnées du point P′ en fonction de celles du point P, et, en supposant que le point P décrive une ligne C, trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne, pour que le point P′ décrive la même ligne.

QUESTIONS PROPOSÉES

200. — Discuter la surface représentée par

$$\Sigma z(z - 1)(x + y)(x + 1)(y + 1) = 0.$$

Cette surface située de la même manière relativement aux trois plans coordonnées admet *neuf* droites au moins. En outre, elle admet une circonférence imaginaire, etc.

(Catalan.)

201. — Connaissant les angles α, β, α', β' des traces de deux plans avec la ligne de terre, calculer l'angle x de ces plans. *(Boutin.)*

202. — On donne une ellipse fixe de foyers F et F′. Une parabole a son foyer en F et est tangente à l'ellipse. Lieu du sommet S de cette parabole quand elle se déforme.

(Bordage.)

203. — On considère un cercle Δ de centre O et deux diamètres rectangulaires AA′, BB′; puis, on imagine des paraboles P tangentes à Δ et passant par les points donnés B, B′. Le réseau des paraboles P est doublement infini et peut se séparer en deux réseaux : l'un, constitué par des paraboles P′ dont les axes passent constamment par le milieu de OA; l'autre, par des paraboles P″ dont les axes coupent OA′ en son point milieu.

On considère l'un de ces réseaux P″ et l'on demande.

1° Le lieu décrit par l'extrémité I du diamètre qui passe par O.

Ce lieu est le cercle décrit sur OA comme diamètre.

2° Démontrer que la longueur OI représente le double du paramètre de la parabole correspondante.

3° Trouver le lieu des sommets des paraboles P″.

Ce lieu est une cubique circulaire unicursale.

4° Déduire de ce lieu, et de la remarque faite au § 2, le lieu des foyers.

Ce lieu est encore une cubique circulaire unicursale.

5° On propose enfin de construire ces cubiques points par points, et tangentes par tangentes; en appliquant, pour celles-ci, le principe des transversales réciproques.

(G. L.)

204. -- On considère un triangle ABC et par les deux sommets B, C on fait passer des coniques Γ qui coupent de nouveau les côtés AB et AC respectivement en B′ et en C′ de telle sorte que les tangentes en ces points soient parallèles aux côtés AC et AB: trouver l'enveloppe des coniques Γ.

Cette enveloppe est une quartique située toute entière à l'intérieur du triangle ABC et présentant, aux sommets de ce triangle, trois points de rebroussement. On vérifiera que les tangentes en ces points sont les médianes du triangle et que le lieu demandé ne varie pas quand, au lieu des points B et C, on fait passer les coniques considérées par deux sommets quelconques du triangle ABC. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16042-6.

SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

L'équation d'une courbe algébrique quelconque peut toujours se mettre sous la forme

$$o = y^m + y^{m-1}(a_1x + b_1) + y^{m-2}(a_2x^2 + b_2x + c_2) + \ldots \quad (1)$$

Si dans cette équation, on donne à x une valeur quelconque, on en tire, pour y, m valeurs $y_1, y_2, \ldots y_m$ qui font connaître les ordonnées des points d'intersection de la courbe et d'une parallèle à l'axe des y. Si nous représentons par Σy_i la somme $y_1 + y_2 \ldots + y_m$, nous avons

$$\Sigma y_i = a_1x + b_1, \quad (2)$$

d'où l'on conclut le célèbre théorème de Newton :

Le lieu du centre de gravité des points d'intersection d'une courbe algébrique et d'une droite mobile qui reste parallèle à une direction fixe, est une droite.

Si nous différentions les deux membres de l'égalité (2), nous obtenons

$$\Sigma dy_i = a_1dx, \quad (3)$$

ou

$$\Sigma \frac{dy_i}{dx} = a_1 \cdot$$

La somme des cotangentes des angles sous lesquels une courbe algébrique est coupée par une droite mobile qui reste parallèle à une direction fixe, est constante.

Ce théorème que M. G. Humbert a obtenu comme corollaire d'une belle propriété énoncée dans son Mémoire sur une *application d'un théorème de Jacobi* (*), a été utilisé dans ma Note *sur une quartique unicursale* (**).

L'équation (1) donne encore

$$y_1y_2 + y_1y_3 + \cdots + y_1y_m + y_2y_3 + \cdots + y_{m-1}y_m$$
$$= a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

(*) *Journ. de Math. pures et appliquées* (4e série, t. I, 1885, p. 347).

(**) *Journ. de Math. spéc.* (1886, p. 121).

Différentiant les deux membres de cette égalité, et groupant convenablement les termes, nous avons

$$dy_1(\Sigma y_i - y_1) + dy_2(\Sigma y_i - y_2) + \ldots + dy_m(\Sigma y_i - y_m) = (2a_2x + b_2)dx$$

ou

$$\Sigma y_i dy_i = \Sigma y_i \Sigma dy_i - (2a_2x + b_2)dx\,;$$

c'est-à-dire, en vertu de (2) et (3), et en divisan les deux membres par dx.

$$\Sigma y_i \frac{dy_i}{dx} = a_1(a_1x + b_1) - (2a_2x + b_2).$$

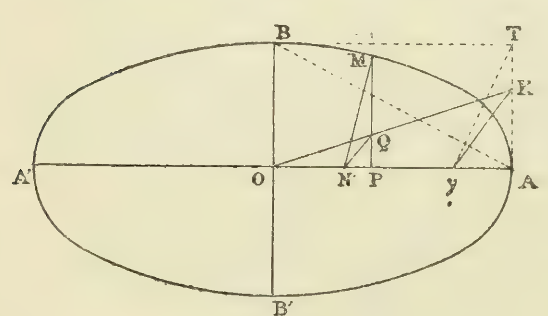
Or $y_i \dfrac{dy_i}{dx}$, c'est la sous-normale n_i. Donc enfin

$$\Sigma n_i = (a_1^2 - 2a_2)x + a_1b_1 - b_2, \qquad (4)$$

d'où ce théorème :

Si une droite mobile D *reste parallèle à une direction fixe, et que l'on mène les normales* N_1, N_2, ... N_m *à une courbe algébrique donnée aux points où elle est coupée par cette droite, le point où la droite* D *rencontre une droite fixe quelconque* Δ, *et le centre de gravité des points d'intersection de* Δ *et des normales* N_1, N_2, ... N_m *engendrent deux ponctuelles semblables.*

Supposons, en particulier, que la courbe considérée soit une conique, la droite Δ un axe de cette conique, et que la droite D soit perpendiculaire à Δ. Nous voyons que le théorème précédent conduit alors immédiatement au suivant.



Soit P *le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point* M *d'une conique sur un axe de cette conique,* N *le point où cet axe coupe la normale en* M *à cette conique. Par le pied* N *de la normale menons à une direction fixe* Δ *une parallèle qui coupe l'ordonnée* MP *au point* Q. *Le lieu du point* Q, *lorsque le point* M *se déplace sur la conique est une droite* δ.

On a ici

$$n = \frac{b^2}{a^2}x.$$

Donc si k est le coefficient angulaire de la direction Δ, le coefficient k' de la droite δ, qui d'ailleurs passe par le centre O, sera

$$k' = \frac{b^2}{a^2}k.$$

On sait que le centre de courbure γ au sommet A du grand axe d'une ellipse s'obtient en abaissant du point de rencontre T des tangentes aux sommets A et B une perpendiculaire sur la corde AB. Le point γ est à la rencontre de cette perpendiculaire et du grand axe AA'. Supposons le point γ construit. Si nous prenons sur la tangente au sommet A un point K quelconque et que nous tirions les droites KO et Kγ nous avons

$$\text{coeff. ang. KO} = \frac{b^2}{a^2}\,\text{coeff. ang. K}\gamma.$$

Donc, si l'ordonnée d'un point M de l'ellipse coupe la droite KO au point Q, et que la parallèle à Kγ menée par le point Q coupe l'axe OA au point N, la droite MN est la normale en M. De là, un procédé très commode pour mener les normales à l'ellipse, procédé qui pourra être très utilement employé dans la pratique lorsqu'il s'agira de tracer les joints d'une voûte en arc d'ellipse (*).

Pratiquement, on fera coïncider le point K avec le point T. Alors QN sera perpendiculaire à AB.

La construction précédente, prise à l'inverse, permet de mener par un point N de l'axe d'une conique, les normales à cette conique, problème qui se rencontre dans diverses questions de géométrie descriptive.

(*) Un mémoire plus étendu sur ce sujet, que nous avons rédigé dernièrement, et qui contient un certain nombre de propriétés nouvelles de l'ellipse, va paraître dans la *Revue maritime et coloniale.*

DE LA PUISSANCE D'UN POINT

PAR RAPPORT A UNE CONIQUE OU A UNE QUADRIQUE

Par M. **Troille**, élève au Lycée de Grenoble.

I. — *Coniques.*

Définition. — Étant donnée l'équation d'une courbe U, $f(x, y) = 0$, et un point fixe $M_0(x_0, y_0)$, non situé sur U; j'appelle puissance d'un point mobile $M(x, y)$ par rapport à U et à M_0 le quotient $\frac{f(x, y)}{f(x_0, y_0)}$. Si l'on prend deux points particuliers M', M'' leurs puissances sont respectivement $\frac{f(x', y')}{f(x_0, y_0)}$, $\frac{f(x'', y'')}{f(x_0, y_0)}$; et le quotient $\frac{f(x', y')}{f(x'', y'')}$ représente donc, d'après notre définition, le rapport des puissances de ces deux points.

1. La conique est à centre. — Rapportée à ses axes, son équation est :

$$Ax^2 + By^2 + C = 0.$$

Une parallèle à oy, issue du point $M_0(x_0y_0)$ coupe la courbe et l'autre axe respectivement en P, Q et H. On a évidemment :

$$Ax_0^2 + B.\overline{PH}^2 + C = 0, \qquad \text{et} \qquad \overline{PH}^2 = -\frac{Ax_0^2 + C}{B}.$$

D'ailleurs :

$$M_0P.M_0Q = (y_0 - PH)(y_0 + PH) = y_0^2 - \overline{PH}^2$$

ou

$$M_0P.M_0Q = y_0^2 + \frac{Ax_0^2 + C}{B} = \frac{Ax_0^2 + By_0 + C}{B}.$$

Il en résulte que pour deux points $M_0(x_0y_0)$ et $M_1(x_1y_1)$, on a :

$$\frac{M_0P.M_0Q}{M_1P'.M_1Q'} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + C}{Ax_1^2 + By_1^2 + C}.$$

Prenons, maintenant, deux nouveaux axes quelconques de coordonnées : OX, XY ; alors $Ax^2 + By^2 + C$ *devient* $f(X, Y)$; et, par suite :

$$\frac{M_0P . M_0Q}{M_1P' . M_1Q'} = \frac{f(X_0, Y_0)}{f(X_1, Y_1)}.$$

Donc :

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0, M_1, *dans une conique à centre, égale le rapport des produits des distances des points à la conique; distances comptées sur des droites parallèles à l'un ou à l'autre des axes de la courbe.*

2. La conique est une parabole. — Rapportons-la à son axe et à la tangente au sommet, son équation sera : $y^2 - 2px = 0$. — Menons, par le point $Mo(x_0, y_0)$, une parallèle M_0M à l'axe. L'abcisse PO de M est :

$$PO = \frac{y_0^2}{2p};$$

donc

$$PQ = PO - x_0 = \frac{y -_2 2px_0}{2p} = M_0M.$$

Prenons un autre point $M_1(x_1, y_1)$ et changeons d'axes : $y^2 - 2px$ *devient* $f(X, Y)$ dans le système XOY, donc :

$$\frac{M_0M}{M_1M'} = \frac{y_0^2 - 2px_0}{y_1^2 - 2px_1} = \frac{f(X_0, Y_0)}{f(X_1, Y_1)};$$

d'où :

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0, M_1, *dans une parabole, égale celui des distances des points à la courbe; distances comptées sur les diamètres qui correspondent à ces points.*

II. — *Quadriques.*

3. **La quadrique est à centre.** — Si on le rapporte à ses axes, elle a pour équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0.$$

La parallèle M_0H, à une direction principale, OZ par exemple, issue du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, coupe la surface en P et Q et le plan des xy en H. On a encore

$$\mathrm{PH}^2 = -\frac{Ax_0^2 + By_0^2 + D}{C},$$

puis $$M_0P . M_0Q = z_0^2 - \mathrm{PH}^2 = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + D}{C}.$$

Prenons un autre point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, et changeons d'axes : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D$ *devient* $f(X, Y, Z)$, par suite

$$\frac{M_0P . M_0Q}{M_1P' . M_1Q'} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + D}{Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + D} = \frac{f(X_0, Y_0, Z_0)}{f(X_1, Y_1, Z_1)}.$$

Donc

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0M_1 *dans une quadrique à centre, égale le rapport des produits des distances de ces points à la surface ; distances comptées sur des droites parallèles à l'un des axes de la quadrique. On prend arbitrairement l'un quelconque des trois axes.*

4. La quadrique est un paraboloïde. — Rapportée à ses deux plans principaux et au plan tangent au sommet, son équation est

$$Ay^2 + Bz^2 + Cx = 0.$$

Une parallèle à l'axe issue du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ coupe la surface en un point M dont l'abscisse est

$$-\frac{Ay_0^2 + Bz_0^2}{C};$$

donc, on a $$MM_0 = -\frac{Ay_0^2 + Bz_0^2 + Cx_0}{C}.$$

De même pour un autrepoint $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Changeons d'axes d'une façon quelconque :

$Ay^2 + Bz^2 + Cx$ *devient* $f(X, Y, Z)$ et l'on a :

$$\frac{M_0M}{M_1M'} = \frac{Ay_0^2 + Bz_0^2 + Cx_0}{Ay_1^2 + Bz + Cx_1} = \frac{f(X_0, Y_0, Z_0)}{f(X_1, Y_1, Z_1)}.$$

Donc

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points*

M_0, M_1, *dans un paraboloïde, égale celui des distances de ces points à la surface; distances comptées sur les diamètres qui correspondent à ces points.*

5. La quadrique est un cylindre ayant une ligne de centres. — Rapportée à ces deux points principaux et à un plan quelconque perpendiculaire à leur intersection, elle est représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + C = o.$$

Par deux points $M_0(x_0 y_0 z_0)$ et $m_0(x_0,\ y_0,\ o)$ menons deux parallèles à ox, elles coupent la surface en P, Q et p, q et on a évidemment : $M_0P = m_0p$; $M_0Q = m_0q$; par conséquent :

$$m_0p\,.\,m_0q = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + C}{A} = M_0P\,.\,M_0Q.$$

Même raisonnement pour un autre point $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$.

Si l'on change d'axes :

$Ax^2 + By^2 + C$ *devient* $f(X,\ Y,\ Z)$, il en résulte que :

$$\frac{M_0P\,.\,M_0Q}{M_1P'\,.\,M_1Q'} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 + C}{Ax_1^2 + By_1^2 + C} = \frac{f(X_0,\ Y_0,\ Z_0)}{f(X_1,\ Y_1,\ Z_1)}.$$

Donc

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0, M_1, *dans un cylindre elliptique ou hyperbolique, est égal au rapport des produits des distances de ces points au cylindre; distances comptées sur des droites perpendiculaires à un des plans principaux.*

6. La quadrique est un cylindre parabolique. — Un calcul identique au précédent appliqué au cas où la conique directrice est une parabole conduit très facilement au théorème suivant :

Théorème. — *Le rapport des puissances de deux points* M_0, M_1, *dans un cylindre parabolique égale celui des distances de ces points à la surface; distances comptées sur des droites parallèles a la direction principale de la surface, direction bien déterminée qui correspond à la racine non nulle de l'équation en* **S**.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 151.)

LES ENVELOPPES ET LA KREUZCURVE

Résumé. — Le problème qui nous a occupé dans ce travail correspond à l'énoncé suivant : *Une courbe étant construite point par point, déterminer le tracé de la tangente en l'un de ses points*. Il est à peine nécessaire de faire observer que la question soulevée par cet énoncé a, pour ainsi dire, une double face ; au problème précité en correspond évidemment un second, lequel est, en quelque sorte, son corrélatif ; cet autre problème correspond à l'énoncé : *Une courbe étant déterminée par ses tangentes successives, trouver, à chaque instant, le point de contact qui est situé sur chacune d'elles.*

Nous ne voulons pas aborder ici, au moins pour le moment, ce second problème. Nous avons été d'ailleurs prévenu dans cette voie par M. M. d'Ocagne, dont les recherches sont consignées dans un mémoire qui, écrit depuis quelques années, vient de paraître (*Nouvelles Annales*, 1886, p. 88). Nous nous proposons seulement de montrer par un exemple comment on peut aborder les questions de cette espèce.

Imaginons deux axes rectangulaires ox, oy et une courbe quelconque U. D'un point M, mobile sur U, on abaisse des perpendiculaires MP, MQ sur les axes et l'on demande de déterminer l'enveloppe des droites PQ, point par point.

Soient x, y les coordonnées de M ; l'équation de PQ est alors

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1, \qquad (1)$$

et la droite infiniment voisine de PQ, celle qui correspond à une position infiniment voisine de M, sur U, coupe celle-ci

en un point μ, point que nous nous proposons de déterminer et dont les coordonnées (X, Y) vérifient simultanément l'équation (1) et la suivante

$$\frac{Xdx}{x^2} + \frac{Ydy}{y^2} = 0. \qquad (2)$$

La tangente à U, au point M coupe ox en T et l'on a

$$\frac{MP}{PT} = \text{tg MTP} = -\frac{dy}{dx}.$$

D'après cela, l'équation (2) devient

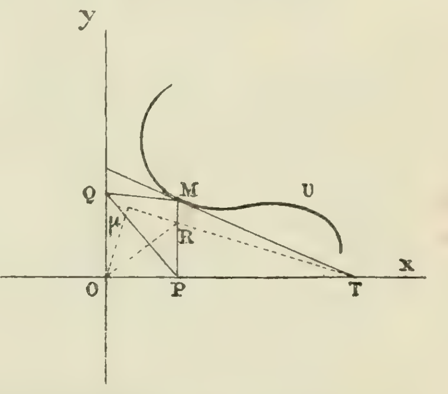
$$\frac{X.PT}{\overline{OP}^2} = \frac{Y}{MP}.$$

Abaissons de O une perpendiculaire sur PQ et soit R le point où elle rencontre MP ; les triangles semblables POQ, OPR donnent

$$\overline{OP}^2 = OQ.PR = MP.PR ;$$

on a donc

$$\frac{Y}{X} = \frac{PT}{RP}.$$



Cette égalité prouve que $o\mu$ est perpendiculaire sur RT; la détermination du point μ résulte très simplement de cette remarque.

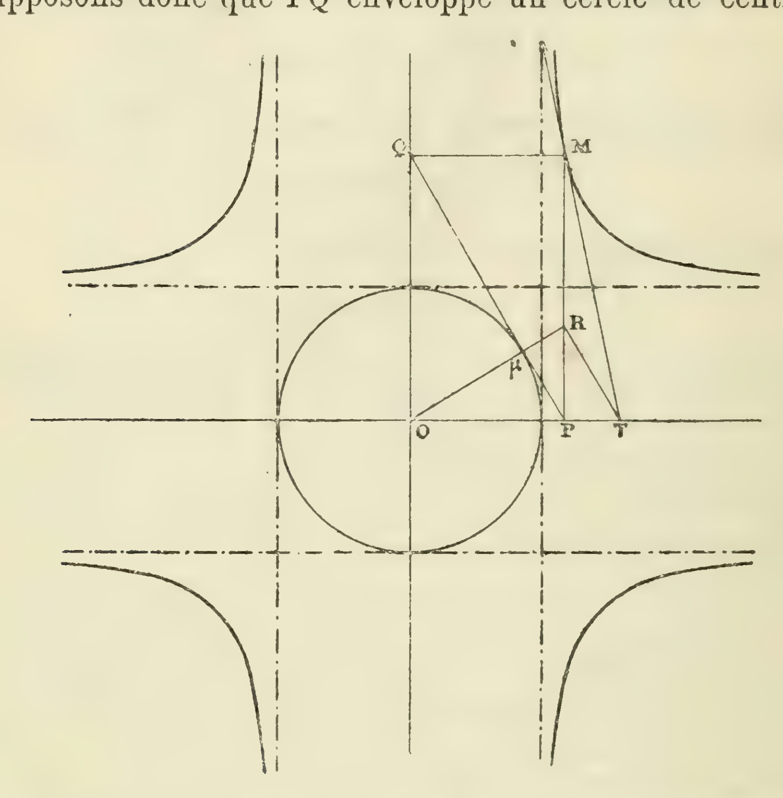
Lorsque la courbe U est une circonférence de centre O, la droite PQ, dans son mouvement, conserve une longueur constante ; elle a pour enveloppe la courbe qu'on nomme l'hypocycloïde à quatre rebroussements. Dans ce cas particulier, le principe de Chasles, celui qui est relatif au centre instantané de rotation, prouve que le point μ coïncide avec la projection de M sur PQ. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que la construction que nous avons indiquée, pour le cas général, donne, pour μ, le même point que celui qu'on obtient par application du principe rappelé.

Mais voici un exemple auquel s'applique très simplement notre remarque.

Il faut d'abord observer que si la connaissance du point M et celle de la tangente MT entraînent la détermination du

point μ; *réciproquement,* la connaissance de μ et celle de la droite PQpermettent de trouver le point M et la tangente MT.

Supposons donc que PQ enveloppe un cercle de centre O



et de rayon R ; et soit μ le point de contact. Le lieu décrit par M est une courbe K dont l'équation est

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Cette courbe a la forme indiquée par la figure; elle a été, récemment, rencontrée par M. Schoute (*) qui pour rappeler cette forme, a proposé de la nommer *la Kreuzcurve* (**).

(*) Voyez: *Archiv der Mathematik and Physik von J.-A. Grunert*, weites Reihe. Dritter Theil. Zweites Heft. Leipzig, 1885, p. 124 (Schoute: Die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexions Knoten).

(**) Voyez aussi notre Traité de Géométrie analytique à deux dimensions, p. 260.

La Kreuzcurve appartient, comme l'hypocycloïde à quatre rebroussements, l'ellipse et sa développée à cette famille de courbes qui sont représéntées par l'équation

$$A^m x^m + B^m y^m = C^{2m},$$

La perpendiculaire abaissée de O sur PQ se confond avec le rayon $O\mu$; il suffit donc de prolonger $O\mu$ jusqu'à sa rencontre avec MP, au point R ; en R, on élève RT perpendiculairement à OR ; TM est la tangente demandée et c'est ainsi qu'on peut construire par points et par tangentes la Kreuzcurve.

Pour être tout à fait axact dans la citation que nous venons de faire, nous devons pourtant ajouter que la quartique, considérée par M. Schoute est plus générale que la précédente et, pour avoir la Kreuzcurve de M. Schoute, il faut remplacer, dans la construction que nous avons indiquée, le cercle par une ellipse rapportée à ses axes. Mais le tracé que nous venons de donner pour la tangente subsiste avec les modifications évidentes.

La Kreuzcurve se rencontre dans plusieurs questions ; voici, pour en citer des exemples, des exercices conduisant à cette courbe.

1° *On considère une ellipse fixe* Γ *et une corde* MM′ *mobile et perpendiculaire au grand axe de* Γ ; *soit* P *la parabole qui a pour sommet le centre de* Γ *et qui passe par les points* M, M′. *La tangente commune à* Γ *et à* P *touche* P *en un certain point* I, *dont le lieu géométrique est une Kreuzcurve.*

On trouve en effet pour l'équation du lieu demandé

$$y^2 = \frac{4b^2x^2}{x^2 - a^2},$$

2° *Le lieu des pôles des cordes normales à une ellipse est une Kreuzcurve.*

L'équation du lieu est, en effet, avec les notations habituelles

$$\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = c^4;$$

les axes de coordonnées étant, bien entendu, les axes de l'ellipse, etc. (*)

---

et qui ont été considérés par Lamé dans un de ses ouvrages (*Examen des différentes méthodes*, 1818). Voyez aussi l'ouvrage de M. de la Gournerie (*Recherches sur les surfaces réglées* ... 1867, p. 196).

(*) Voyez plus loin p. (211) un troisième exemple.

J'ajouterai, en terminant, que j'avais rassemblé, pour la rédaction de ce travail, beaucoup d'autres exemples que je renonce à exposer pour abréger cette note.

Ce que j'ai dit suffit certainement à mettre en lumière, une fois de plus, la fécondité, pour le tracé des tangentes, du principe des transversales réciproques ; et c'est le but principal que je m'étais fixé. J'aurai d'ailleurs occasion de proposer, à titre d'exercices, quelques-uns des exemples auxquels je viens de faire allusion et, s'ils offrent quelque intérêt, de cette façon, ils ne seront pas perdus.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 183.)

104. — Outre la cissoïde et la strophoïde, on peut citer, parmi les courbes célèbres qui se rattachent au groupe des cubiques circulaires unicursales, la trisectrice de Mac-Laurin (*).

En général, on donne le nom de *trisectrice* à une courbe qui permet de résoudre le problème de la trisection d'un angle donné; il y a, naturellement, une infinité de trisectrices et ces courbes sont au moins du troisième degré; celle dont

(*) D'après un renseignement que je dois à l'obligeance de M. Schoute, professeur à l'université de Groningue, cette courbe se trouve dans le *Traité des fluxions*, de Mac-Laurin (1749, pl. X, fig. 134, p. 198). Elle a fait récemment l'objet de diverses recherches parmi lesquelles nous citerons :

1° Un mémoire de M. Schoute (*Archives Néerlandaises*, t. XX, 1885), ayant pour titre : SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES UNICURSALES PAR POINTS ET PAR TANGENTES. Dans ce mémoire se trouve exposé, entre autres

nous allons dire quelques mots est une des plus simples que l'on puisse concevoir, elle correspond à la définition suivante : *la trisectrice de Mac-Laurin est une cubique circulaire droite possédant un nœud et les tangentes en ce point sont inclinées respectivement sur l'axe de la courbe, d'angles égaux à 60° et à 120°.*

Nous voulons simplement indiquer ici le tracé par points et par tangentes de la trisectrice en ne faisant usage que de la règle et de l'équerre; il nous suffira de particulariser le tracé général que nous avons fait connaître plus haut, de telle façon que les tangentes au nœud soient inclinées sur l'axe d' d'angles qui conviennent à la trisectrice en question.

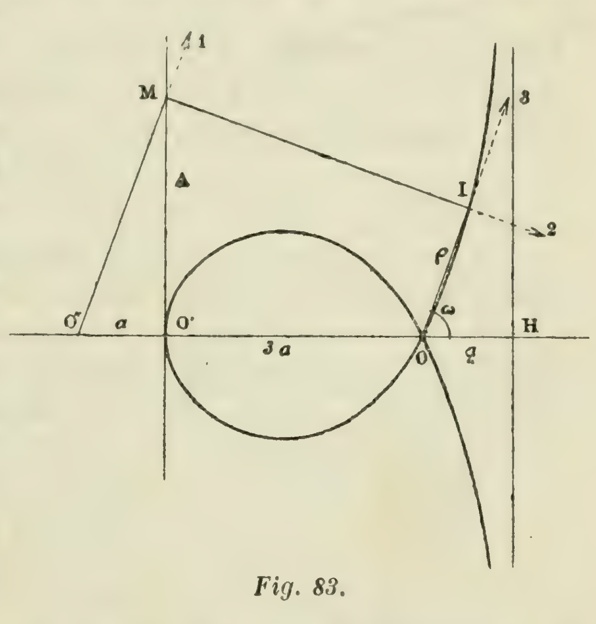


Fig. 83.

A cet effet, prenons trois points en ligne droite O, O′, O″ et supposons que OO′ $=$ 3O′O″, puis faisons la construction (1, 2, 3, *fig. 83.*)

Ayant posé O′O″ $= a$, on obtient pour représenter le lieu

---

choses, un tracé de la trisectrice par points et tangentes, d'après une construction due à M. Godefroy.

2° Une note de M. d'Almeida Lima dans le (*Jornal de sciencias mathematicas e Astronomicas*, publié par le Dr Gomes Teixeira, Coimbra, 1885, p. 13) et intitulée *Sobre una curva do terceiro grao.*

3° Deux articles de M. Habich, directeur de l'école spéciale des constructions civiles et des mines de Lima, publiés dans la *Gaceta Cientifica*, année 1885, nos 9 et 12, p. 248, etc., ayant pour titre : DIVISION DE UN ANGULO EN PARTES IGUALES.

4° Une note publiée dans ce journal (1885, p. 176).

5° Voyez aussi le *Supplément au cours de Mathématiques spéciales*, p. 113, et l'*Annuaire de l'Association française*, congrès de Grenoble, 1885.

D'après une note placée au début du premier article de M. Habich, que je viens de citer, la trisectrice a fait l'objet d'un travail du professeur M. Beraun, de Huànuco; mais cet opuscule ne nous est pas connu.

décrit par le point I, l'équation :

$$\rho = \frac{a}{\cos\omega} - 4a\cos\omega,$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2).$$

Cette équation représente bien la trisectrice de Mac-Laurin; sa discussion n'offre aucune difficulté et elle établit que la courbe correspondante a la forme qu'indique la figure.

Tracé de la tangente. — Il nous reste à trouver le tracé de la tangente en un point pris sur la courbe.

Soit I un point de la trisectrice, point qui correspond au point M de la droite Δ, comme nous venons de l'expliquer. Projetons O sur O″M en P, et menons IJ parallèle à OO″; nous pouvons observer que le lieu du point J est une trisectrice égale et parallèle à celle qui est décrite par le point I et que, d'autre part, le lieu de P est le cercle décrit sur OO″ comme diamètre. Enfin, les deux points P, J sont isotomiques sur O″M.

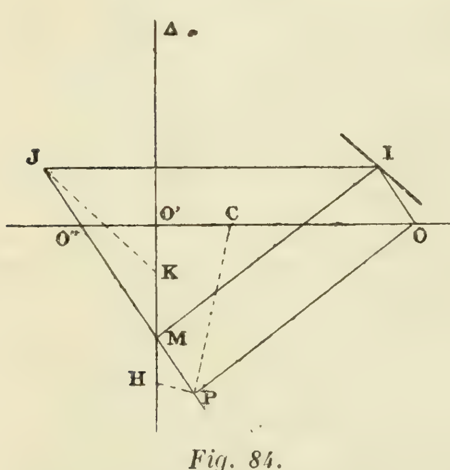


Fig. 84.

D'après ces diverses remarques, si l'on considère deux positions infiniment voisines de la figure mobile, le principe des transversales réciproques prouve que les tangentes aux lieux décrits par J et P coupent Δ en deux points H, K symétriques par rapport à M.

Concluons donc que, après avoir pris en C le milieu de OO″, on doit élever au point P une perpendiculaire PH à CP et prendre MK = HM; la droite KJ ainsi obtenue est parallèle à la tangente cherchée.

(A suivre.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(CONCOURS DU 9 JUIN 1886)

On donne un rectangle ABA′B′. *Deux hyperboles équilatères* A *et* B *ayant toutes deux leurs asymptotes parallèles aux côtés du rectangle, passent : l'une* A *par les sommets opposés* A *et* A′, *l'autre* B *par les sommets opposés* B *et* B′.

1° Démontrer que le centre de l'hyperbole A *a, par rapport à l'hyperbole* B, *la même polaire* P *que le centre de l'hyperbole* B *par rapport à l'hyperbole* A;

2° Le rectangle restant fixe, on fait varier en même temps les deux hyperboles, de manière qu'elles soient égales entre elles sans être symétriques par rapport à l'un des axes de symétrie du rectangle. Examiner si elles se coupent en des points réels. Trouver le lieu du milieu de la droite qui joint leurs centres et prouver que la droite P *est constamment tangente à ce lieu ;*

3° Si on prend une quelconque des hyperboles A *et une quelconque des hyperboles* B, *il existe une infinité de rectangles ayant, comme le rectangle donné, les sommets opposés sur chacune de ces hyperboles, et les côtés parallèles aux asymptotes. Trouver le lieu des centres de ces rectangles*

1. — Prenons pour axes les médianes du rectangle et désignons les longueurs de ses côtés par $2a$ et $2b$. Les équations des hyperboles (A) et (B) sont

$$\frac{xy}{ab} - \alpha\frac{x}{a} + \alpha\frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{xy}{ab} - \beta\frac{x}{a} - \beta\frac{y}{b} + 1 = 0. \qquad \text{(B)}$$

Nous poserons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{x}{a} = X, \qquad \frac{y}{b} = Y$$

et nous écrirons, en conséquence, les équations précédentes sous la forme

$$XY - \alpha X + \alpha Y - 1 = 0, \qquad \text{(A)}$$

$$XY - \beta X - \beta Y + 1 = 0. \qquad \text{(B)}$$

La polaire du centre de (A) [point dont les coordonnées sont $(-\alpha, +\alpha)$] par rapport à (B), a pour équation

$$-\alpha(Y-\beta)+\alpha(X-\beta)-\beta X-\beta Y+2=0$$

ou

$$X(\beta-\alpha)+Y(\alpha+\beta)=2 \qquad (P)$$

on retrouve la même équation en cherchant la polaire du point (β, β) par rapport à (A).

2. — Lorsque l'équation d'une hyperbole équilatère est

$$xy-Ay-Bx+C=0$$

ou

$$(x-A)(y-B)=AB-C$$

si la courbe passe par un point (a, b), la puissance de ce point par rapport aux asymptotes de l'hyperbole est égale à la valeur absolue de

$$(a-A)(b-B).$$

Mais si deux hyperboles représentées par :

$$xy-Ax-By+C=0, \quad xy-A'x-B'y+C'=0,$$

et passant : la première par (a, b), l'autre par $(a'\ b')$ sont égales, on doit avoir

$$(a-A)(b-B)=\pm(a'-A')(b'-B').$$

Appliquons cette remarque aux équations (A) et (B); la première passe par le point $(1, 1)$; l'autre par le point $(1, -1)$. Nous avons donc

$$(1-\alpha)(1+\alpha)=\pm(1-\beta)(-1-\beta)$$

ou

$$1-\alpha^2=\pm(1-\beta^2).$$

Si l'on adopte le signe $+$, on a $\alpha=\pm\beta$; à cette hypothèse correspondent des hyperboles égales, mais symétriques par rapport à l'un ou l'autre des axes de coordonnées et nous n'avons pas à les considérer ici.

Prenons l'autre signe et nous trouvons alors que les deux hyperboles (A) et (B) sont égales [et non symétriques] lorsque la condition

$$\alpha^2+\beta^2=2, \qquad (1)$$

est vérifiée.

1° Cherchons à déterminer les points communs aux deux coniques (A) et (B) lorsque α et β satisfont à l'égalité (1).

Les équations (A) et (B) donnent, par combinaison,

$$(\beta - \alpha)X + (\alpha + \beta)Y = 2,$$

et

$$(\alpha + \beta)X + (\beta - \alpha)Y = 2XY.$$

On en déduit

$$4XY = (\beta^2 - \alpha^2)(X^2) + Y^2) + XY\{(\beta - \alpha)^2 + (\beta + \alpha)^2\}.$$

L'égalité (1) prouve que

$$(\beta - \alpha)^2 + (\beta + \alpha)^2 = 4, \qquad (2)$$

et comme nous supposons $\beta^2 - \alpha^2 \neq 0$, l'équation se réduit à

$$X^2 + Y^2 = 0;$$

les points communs aux deux coniques, abstraction faite des points qui sont à l'infini, dans la direction Ox et dans la direction Oy, sont donc *imaginaires*.

2° Cherchons l'enveloppe des droites P. L'égalité (2) prouve que l'on peut poser

$$\beta - \alpha = 2\cos\varphi, \qquad \beta + \alpha = 2\sin\varphi$$

et l'équation de P peut s'écrire

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi = 1.$$

On sait que l'enveloppe de ces droites est la courbe qui a pour équation

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

ou, dans la notation explicite,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation représente une ellipse inscrite au rectangle proposé, les points de contact étant les milieux des côtés.

Nous allons reconnaître que cette enveloppe coïncide avec le lieu des milieux de la droite qui joint les centres des deux coniques.

En effet les coordonnées des centres étant

$$-\alpha, +\alpha, \qquad \text{et} \qquad \beta, \beta;$$

celles du point milieu de la droite qui les joint sont :

$$X = \frac{\beta - \alpha}{2}, \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

La relation (2) prouve que le lieu décrit par ce point est justement représenté par l'équation

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

3. — Coupons les hyperboles (A) et (B) par une droite Δ parallèle à l'axe des Y, $(X = \lambda)$; Δ rencontre (A) et (B) en

es points K, K′ dont les cordonnées sont

$$K \left\{ \lambda, \quad \frac{1 + \alpha\lambda}{\alpha + \lambda} \qquad K' \left\{ \lambda, \quad \frac{\beta\lambda - 1}{\lambda - \beta}. \right.\right.$$

Les parallèles à l'axe des X menés par les points K et K′ rencontrent les hyperboles (B) et (A), respectivement en des points H et H′ ayant pour coordonnées

$$H \left\{ \frac{\beta - \alpha + \lambda(\alpha\beta - 1)}{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)}, \quad \frac{1 + \alpha\lambda}{\alpha + \lambda}; \right.$$

$$H' \left\{ \frac{\beta - \alpha + \lambda(\alpha\beta - 1)}{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)}, \quad \frac{\beta\lambda - 1}{\lambda - \beta}. \right.$$

Les abcisses des points H et H′ étant égales, on voit donc que, λ variant, il existe une infinité de rectangles tels que ABA′B′ ayant les sommets opposés situés sur les hyperboles (A) et (B).

Il reste enfin à déterminer le lieu décrit par les centres de ces rectangles (*).

Soit ω le centre de l'un de ces rectangles; ce point est situé au milieu de KH′ et ses coordonnées x, y se calculent, par conséquent, au moyen des formules

$$2X = \lambda + \frac{\beta - \alpha + \lambda(\alpha\beta - 1)}{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)} = (\alpha - \beta)\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)}, \quad (1)$$

$$2y = \frac{1 + \alpha\lambda}{\alpha + \lambda} + \frac{\beta\lambda - 1}{\lambda - \beta} = (\alpha + \beta)\frac{(\alpha + \lambda)(\lambda + \beta)}{\lambda^2 - 1}. \quad (2)$$

Il est évident, *à priori*, en examinant le tracé géométrique qui conduit au point ω, que le lieu décrit par ce point est une courbe unicursale et les équations précédentes permettent justement de construire ce lieu, point par point. Il semblerait même, au premier abord, que le lieu est du quatrième ordre ; mais ce n'est là qu'une apparence et l'on trouve ici, comme on va le voir, l'occasion d'appliquer une remarque connue (C.M.S. ; t. II, p. 562 ; ex. 1).

Pour trouver l'équation cartésienne du lieu décrit par ω il faut éliminer λ entre (1) et (2). A cet effet, observons que ces

(*) Ce lieu peut s'obtenir par des calculs très différents et même, peut-être, plus simples que ceux qu'on va lire ; mais la marche que nous adoptons ici nous paraît être la plus naturelle et la plus méthodique.

égalités peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha - \beta}{2X} = \frac{1 - \alpha\beta + \lambda(\alpha - \beta)}{\lambda^2 - 1},$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2Y} = \frac{\lambda(\alpha - \beta) - \alpha\beta + \lambda^2}{\lambda^2 - 1}.$$

Sous cette forme, on voit que l'on a :

$$\frac{\alpha + \beta}{2Y} + \frac{\beta - \alpha}{2X} = 1.$$

Le lieu décrit par ω est donc l'hyperbole équilatère U correspondant à l'équation

$$\left(X - \frac{\beta - \alpha}{2}\right)\left(Y - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{4}.$$

Cette courbe passe par l'origine, ses asymptotes sont en évidence dans l'équation précédente; elle est donc bien déterminée.

Elle ne se réduit à un système de droites que si l'on suppose $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ et, dans ce cas, nous l'avons remarqué plus haut, les hyperboles considérées sont symétriques par rapport à l'un des axes de coordonnées.

On pourrait aussi traiter ces questions par des considérations purement géométriques, mais elles ont été déjà fort bien exposées dans la brochure *Examens d'admissibilité et d'admission à l'École Polytechnique* (1886, p. 13) publiée par la librairie Croville-Morant, et nous renvoyons le lecteur à cette source.

4. Remarque. — Lorsque les hyperboles (A) et (B) sont supposées variables, tout en restant égales entre elles, sans être pourtant symétriques par rapport aux axes de coordonnées, on a $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ et l'on peut poser, comme nous l'avons fait observer plus haut,

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \sin\varphi, \qquad \frac{\beta - \alpha}{2} = \cos\varphi.$$

L'équation de U s'écrit alors

$$XY = X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$

L'enveloppe des hyperboles correspondantes est la courbe représentée par l'équation

$$X^2 + Y^2 = X^2Y^2,$$

ou, en revenant à la notation explicite,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2y^2}{a^2b^2}. \qquad \text{(K)}$$

Cette quartique est bien connue (*), c'est la *Kreuzcurve.*

QUESTIONS D'EXAMENS

8. — *Trouver la valeur de*

$$y = \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}, \qquad (1)$$

pour $x = 0$.

1re Solution. La valeur principale du numérateur est

$$x(La - Lb);$$

celle du dénominateur est

$$x(Lc - Ld).$$

D'après cette remarque, la valeur demandée est égale à

$$L\frac{a}{b} : L\frac{c}{d}.$$

Mais cette démonstration constitue, au même titre que l'application de la règle de l'Hôpital un cercle vicieux d'une nature particulière, par ce qu'elle exige, du moins dans la pratique, la connaissance de la dérivée de a^x et cette dérivée ne serait pas connue si l'on ne pouvait pas trouver, par une voie directe et indépendante de cette connaissance, la valeur de l'expression proposée, pour $x = 0$.

2e Solution. L'égalité (1) peut s'écrire

$$y = \frac{\left(\frac{a^x - b^x}{x}\right)}{\left(\frac{c^x - d^x}{x}\right)}.$$

Cherchons, pour $x = 0$, la valeur de z,

$$z = \frac{a^x - b^x}{x}.$$

(*) Voyez le présent numéro p. 200.

Nous avons d'abord

$$z = b^x \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x},$$

et la question proposée revient à la détermination de la valeur de

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x}, \text{ pour } x = 0. \qquad (2)$$

Cette question se rencontre précisément quand on cherche la dérivée de la fonction exponentielle et l'on démontre, à ce propos, que l'expression (2) a pour valeur $L\left(\frac{a}{b}\right)$, pour $x = 0$.

REMARQUE. On peut traiter de la même façon et par l'une ou l'autre des méthodes que nous venons d'indiquer le problème suivant, qui généralise la question précédente :

Trouver pour x = o, *la valeur de* y,

$$y = \frac{Aa^x + Bb^x + \ldots + Ll^x}{A'a'^x + B'b'^x + \ldots + L'l'^x},$$

expression dans laquelle on suppose

$$A + B + \ldots + L = 0,$$

et

$$A' + B' + \ldots + L' = 0.$$

La valeur cherchée est :

$$\frac{\log a^A b^B \ldots l^L}{\log a'^{A'} b'^{B'} \ldots l'^{L'}}$$

9. — *Lorsque deux cônes* C, C' *sont tangents en un certain point* M *ils se coupent suivant une courbe* U *qui projetée sur le plan tangent commun* P *donne une courbe* u *ayant en* M *un point double; les tangentes en ce point et les génératrices de contact forment un faisceau harmonique.*

Prenons P pour plan des xy ; les équations des cônes C et C' pourront s'écrire sous la forme suivante

$$z(Ax + By + Cz + D) + (y - mx)^2 = 0,$$
$$z(A'x + B'y + C'z + D') + (y - m'x)^2 = 0.$$

Éliminons z entre ces deux équations, nous obtenons l'équation de u :

$$\left\{C(y - m'x)^2 - C'(y - mx)^2\right\}$$
$$= \left\{C(A'x + B'y + D') - C'(Ax + By + D)\right\}$$
$$\left\{(Ax + By + D)(y - m'x)^2 - (A'x + B'y + D')(y - mx)^2\right\}.$$

L'origine est un point double de cette courbe et les tangentes en ce point sont données par l'équation

$$(CD' - DC')\left\{D(y - m'x)^2 - D'(y - mx)^2\right\} = 0.$$

Cette égalité établit la proposition en question, parceque les quatre droites d'un faisceau harmonique sont, par une propriété connue, représentées par les équations :

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad P + \lambda Q = 0, \qquad P - \lambda Q = 0.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Brocard.

... Au sujet de l'article de M. Lebel (*J. S.*, p. 147 et suivantes), on peut observer que M. Fauquembergue est arrivé, de son côté, à quelques résultats analogues, comme on peut le voir par l'énoncé 1555 des *N. A. M.* (1885 (3) IV. p, 535)...

Nota. — La strophoïde a fait l'objet de recherches nombreuses et, probablement, les propriétés signalées dans l'article en question ont été déjà reconnues. On pourra consulter, notamment, sur cette courbe célèbre, une étude très complète qui a été publiée par M. Georges Ritt (*Nouvelles Annales*, 1846, p. 470).

D'après une rectification (*loc. cit.*, p. 557) le mémoire en question a pour auteur véritable, M. Montucci, docteur de l'Académie de Sienne. G. L.

Extrait d'une lettre de M. Chapron.

... M. Em. Vigarié (*Journal*, p. 22) a signalé dans ce journal une disposition de la Table de Pascal. En voici une

autre, extraite de la correspondance de Hachette sur l'École Polytechnique, janvier 1811.

		b	d	f	h	k	m	p
	1	1	1	1	1	1	1	1
a	1	2	3	4	5	6	7	8
c	1	3	6	10	15	21	28	36
e	1	4	10	20	35	56	84	120
g	1	5	15	35	70	126	210	330
i	1	6	21	56	126	252	462	792
l	1	7	28	84	210	462	984	1776
n	1	8	36	120	330	792	984	2760

Un simple coup d'œil jeté sur ce tableau fait reconnaître que les diagonales *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *ik*, *lm*... sont les coefficients des puissances 1re, 2e, 3e,... du binôme...

(Note de MONGE, *examinateur.)*

NOTA. — A propos de la communication de M. Vigarié, rappelée dans la présente lettre, nous signalerons un article historique publié par M. Aristide Marre (*Nouvelles Annales*, 1846, p. 488) : *Du binôme de Newton, antérieurement à Newton*. Dans cette note, M. A. Marre signale ce fait curieux qu'en Europe les coefficients binomiaux ont été utilisés pour l'extraction des racines avant de l'avoir été pour l'élévation aux puissances et il cite l'ouvrage de Stifel *(Arithmetica integra, authore Michaelo Stifelio)* dans laquelle se trouve une table qui n'est autre chose que le triangle de Pascal. L'ouvrage de Stifel est de 1544; il resterait à connaître la date exacte

du *Traité général des nombres* de Nicolo Tartaglia, signalé dans la lettre de M. Vigarié (*). G. L.

QUESTION PROPOSÉE

204. — Soient ox, oy deux axes de coordonnées rectangulaires. On considère des paraboles P qui passent par l'origine tangentiellement à ox et qui coupent oy en un point fixe A ($OA = 4b$). Sur OA, on prend un point B tel que $OB = b$ et de ce point B on mène les normales à P. Trouver le lieu décrit par les pieds de ces normales.

Abstraction faite de la normale BO on peut mener deux normales à la parabole P, par le point B.

On fera voir que le lieu demandé est constitué :

1° Par une droite menée par B parallèlement à ox ; et l'on donnera une démonstration géométrique de cette propriété ;

2° Par une quartique unicursale.

On vérifiera que cette quartique, formée de deux ovales présentant à l'origine un point d'embrassement, correspond :

Soit à l'équation cartésienne

$$x^4 + 2x^2y\,(y - 2b) + y^2(y - b)(y - 4b) = 0,$$

soit aux équations

$$\frac{x}{b} = \frac{3t(t^2 - 2)}{(t^2 + 1)^2},$$

$$\frac{y}{b} = \left(\frac{t^2 - 2}{t^2 + 1}\right)^2. \qquad (G. L.)$$

(*) *Parmi les procédés de calcul qui conduisent aux coefficients binômiaux on peut observer, cette remarque m'a été faite par M. Laisant, dans une lettre qui sera publiée dans le prochain numéro du* Journal de Mathématiques élémentaires, *qu'ils sont fournis par les puissances successives de 11, (121, 1331, 14641, ...). La raison de ce résultat est évidente; la méthode de calcul de M. Philippof, analysée dans le précédent numéro (J. M. E.) conduit d'ailleurs très naturellement à cette remarque curieuse.*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

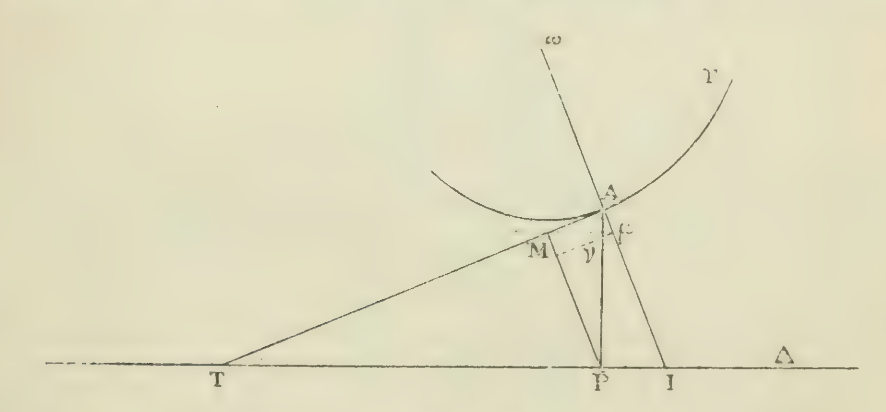
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16622-6.

NOTE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

Dans l'intéressante étude sur diverses courbes remarquables qu'il a publiée dans ce Journal, M. G. de Longchamps a spécialement envisagé (*) la courbe qu'il appelle *anti-développée* d'une courbe donnée, et qui est le *lieu des symétriques des centres de courbure de la courbe considérée par rapport aux points correspondants de cette courbe.*

C'est une propriété bien connue que l'*anti-développée d'une chaînette est une droite.* Et l'on sait que la chaînette est la développée de la *tractrice*, c'est-à-dire de la courbe telle que les portions de ses tangentes comprises entre le point de contact et une certaine droite sont toutes égales entre elles.



Le but de cette note est de démontrer géométriquement la propriété inverse, à savoir que *toute courbe qui a pour anti-développée une droite, est une chaînette, c'est-à-dire une développée de tractrice.*

Je ne m'appuierai d'ailleurs que sur des formules dont j'ai donné, dans ce Journal même (année 1880, p. 433), des démonstrations absolument élémentaires.

Soit Γ la courbe considérée, dont l'anti-développée est la

(*) 1886, p. 11.

droite Δ; soient, en outre, en un point quelconque A de cette courbe, ωI la normale qui coupe Δ au point I, et ω le centre de courbure, de telle sorte que $\omega A = AI$.

Du point A abaissons sur Δ la perpendiculaire AP, et du point P, sur la tangente AT, la perpendiculaire PM.

Soit $M\mu$ la normale à la courbe que décrit le point M. L'angle AMP étant constant, on a la normale à l'enveloppe du côté PM, en abaissant du centre instantané de rotation μ la perpendiculaire $\mu\nu$ sur cette droite; cette normale $\mu\nu$ coupe au point ν la droite AP qui est normale à la trajectoire Δ du point P.

Représentons par $d(P)$, $d(A)$, $d(M)$ les déplacements infiniment petits simultanés des points P, A, M. La droite AP se déplaçant en restant parallèle à une direction fixe, nous avons (*loc. cit.*, Principe I)

$$\frac{d(P)}{d(A)} = \frac{PT}{AT}.$$

Nous avons aussi (*ibid.*, Principe III)

$$\frac{d(A)}{d(M)} = \frac{A\omega}{M\mu},$$

$$\frac{d(M)}{d(P)} = \frac{M\mu}{P\nu}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre; il vient

$$\frac{PT.A\omega}{AT.P\nu} = 1,$$

ou

$$\frac{PT}{AT} = \frac{P\nu}{A\omega} = \frac{P\nu}{IA}.$$

Mais on a

$$\frac{PT}{AT} = \frac{PA}{IA};$$

donc

$$P\nu = PA,$$

c'est-à-dire que le point ν se confond avec le point A, et, par suite, le point μ aussi. La droite MA est donc normale à la courbe décrite par le point M, et comme MA touche son enveloppe au point A, ce point est le centre de courbure correspondant. Maintenant, la normale PA à la droite Δ que

décrit le point P passant constamment par le centre de courbure A correspondant, on a

$$d.PM = 0,$$

et, par suite,

$$PM = \text{const.}$$

La courbe décrite par le point M est donc une tractrice, et la courbe Γ étant la développée de celle-ci, le théorème est démontré.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite,* voir p. 204.)

CHAPITRE XI

LES CUBIQUES UNICURSALES NON CIRCULAIRES

Le Folium de Descartes. — La Serpentine. — Le Trident de Newton. — La Cubique d'Agnesi. — Les Cubiques paraboliques et hyperboliques. — Cubiques diverses.

Toutes les cubiques qui possèdent un point double pouvant s'engendrer, point par point, de telle sorte qu'une transversale issue du point double ne rencontre la courbe qu'*en un seul point*, leur construction ressort évidemment de la géométrie que nous développons ici; et, après nous être occupé, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, des cubiques circulaires unicursales, nous allons maintenant considérer quelques autres cubiques unicursales, mais non circulaires.

105. Le Folium de Descartes (*). — Soient Δ, Δ' deux droites parallèles, OB une perpendiculaire commune ; menons

---

(*) Sur cette courbe on pourra consulter une intéressante notice bibliographique de Terquem, publiée dans les *Nouvelles Annales*, 1844, p. 301.

une transversale mobile OA et, du point B, abaissons BC perpendiculaire sur OA. Prenons ensuite $CA' = AC$ et soit I le conjugué harmonique de A par rapport au segment OA'. Nous allons reconnaître que le lieu décrit par I est un folium de Descartes.

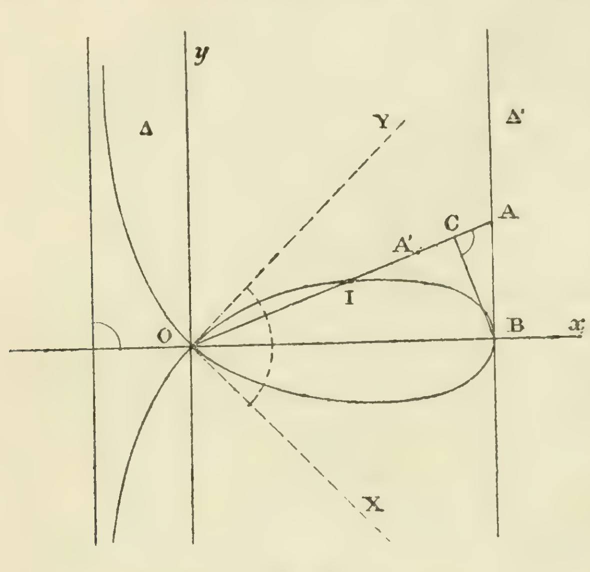


Fig. 85.

Nous avons en effet

$$\frac{2}{OA'} = \frac{1}{OI} + \frac{1}{OA},$$

et

$$OA' + OA = 2OC.$$

Posons

$$OI = \rho, \quad IOB = \omega, \quad OB = d\,;$$

les égalités précédentes donnent alors

$$OA' = 2d\cos\omega - \frac{d}{\cos\omega}.$$

Par suite, tout calcul fait, l'équation du lieu cherché est

$$\frac{d}{\rho} = \frac{3\cos\omega - 2\cos^3\omega}{2\cos^2\omega - 1},$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$x(x^2 + 3y^2) + d(y^2 - x^2) = 0.$$

Il est facile de reconnaître, en prenant pour nouveaux axes les bissectrices OX, OY des axes Ox, Oy, que la courbe qui correspond à cette équation est le folium de Descartes.

106. La tangente au Folium. — Si nous considérons deux positions infiniment voisines de la transversale OA, les quatre points O, I, A', A formant une division harmonique et le point O étant commun aux deux transversales considérées, nous voyons ainsi que les tangentes aux lieux décrits par les points I, A' et A concourent au même point.

Le point A' décrit une strophoïde et la construction de la tangente au folium, au moyen de la règle et de l'équerre, se trouve ainsi ramenée à un tracé précédemment indiqué.

107. La transformation de Mac-Laurin. — Avant de considérer, comme nous en avons l'intention, le trident de Newton, la serpentine et la courbe d'Agnesi, nous devons dire quelques mots de la transformation de Mac-Laurin (*), parce que nous déduirons de celle-ci la construction de ces courbes par points et par tangentes.

Fig. 86.

Imaginons une courbe quelconque U et deux points fixes A et B ; soit M un point de U. Joignons MA, puis menons BI parallèlement à AM ; enfin traçons MI parallèle à une droite fixe Az. Nous obtenons ainsi un point I, et le lieu décrit par ce point est une courbe V, transformée de la courbe U.

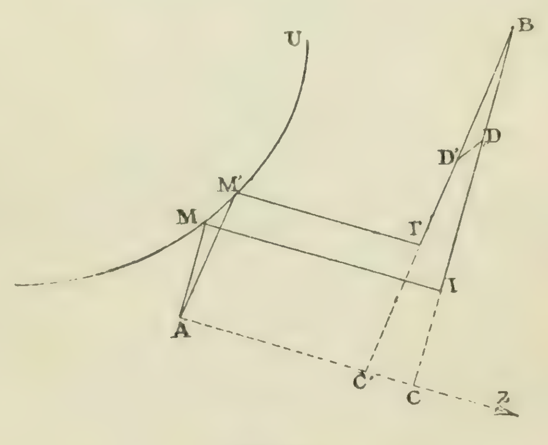


Fig. 87.

Nous allons montrer que l'on peut très simplement obtenir la tangente à la courbe V au point I.

Considérons deux positions voisines du tracé précédent et

(*) Cette transformation a été récemment développée par M. Schoute dans un mémoire publié en 1885 au tome XX des *Archives Néerlandaises* et intitulé : *Sur la construction des courbes unicursales par points et par tangentes*. Nous devons ajouter que la transformation que nous utilisons ici n'est qu'un cas très particulier de celle qui a été étudiée par M. Schoute, dans le travail cité.

prolongeons les droites BI, BI′ jusqu'à ce qu'elles rencontrent Az aux points C et C′, puis prenons

$$BD = IC = MA, \qquad BD' = I'C = M'A.$$

Les deux triangles MAM′, BDD′ sont égaux ; d'autre part DD′ et II′ sont deux transversales réciproques du triangle BCC et l'on est ainsi conduit à la remarque suivante :

Soit MT la tangente à la courbe U au point M ; ayant pris BD = MA on mène DO parallèle à MT jusqu'à sa rencontre en O avec Az ; soit O′ le symétrique de O par rapport à C, O′I est la tangente demandée.

Voici une autre transformation des courbes, transformation dont nous avons déjà parlé (*) et qui constitue encore un cas particulier intéressant de celle de Mac-Laurin.

Prenons deux axes rectangulaires Ox, Oy et, sur Ox, un point fixe A ; soit U la courbe que nous voulons transformer. A cet effet, prenons sur U un point M ; menons MI parallèle à Oy et, par le point de rencontre B de AM avec Oy, une parallèle BI à Ox ; le point I correspond ainsi au point M et en appelant : x, y les coordonnées de M ; X, Y celles de I, les formules de transformation sont

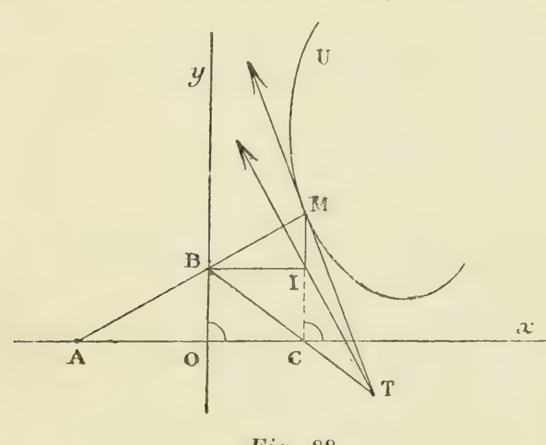


Fig. 88.

$$x = X, \qquad y = Y\frac{X + a}{a}. \qquad (1)$$

Nous allons démontrer que la tangente en M à la courbe U, la droite BC et la tangente en I au lieu décrit par ce point, sont trois droites concourantes (**).

(*) *Journal*, 1885, p. 199.

(**) Cette remarquable construction nous a été indiquée par M. Godefroy, architecte à Amsterdam, et elle peut être considérée comme la conséquence immédiate de celle que M. d'Ocagne a donnée (*loc. cit.*, p. 265); elle résulte aussi, si l'on veut, de considérations qui s'appliquent à toutes

Appelons ξ, η les coordonnées courantes; les équations de MT et de IT sont

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \qquad \eta - Y = \frac{dY}{dX}(\xi - X). \qquad (2)$$

Les formules (1) donnent

$$dx = dX, \qquad a(dy - dY) = xdY + Ydx \qquad (3)$$

Des formules (2) et (3), on déduit par combinaison

$$\eta x + \xi Y = 2xY + a(Y - y)$$

ou, en tenant compte de la seconde formule (1),

$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{Y} = 1.$$

Cette dernière égalité prouve que les deux tangentes considérées se coupent sur la droite BC.

Les principes que nous venons d'établir vont s'appliquer maintenant, comme on va le voir, à trois des cubiques remarquables que nous avons en vue.

108. La Serpentine. — Imaginons deux points fixes

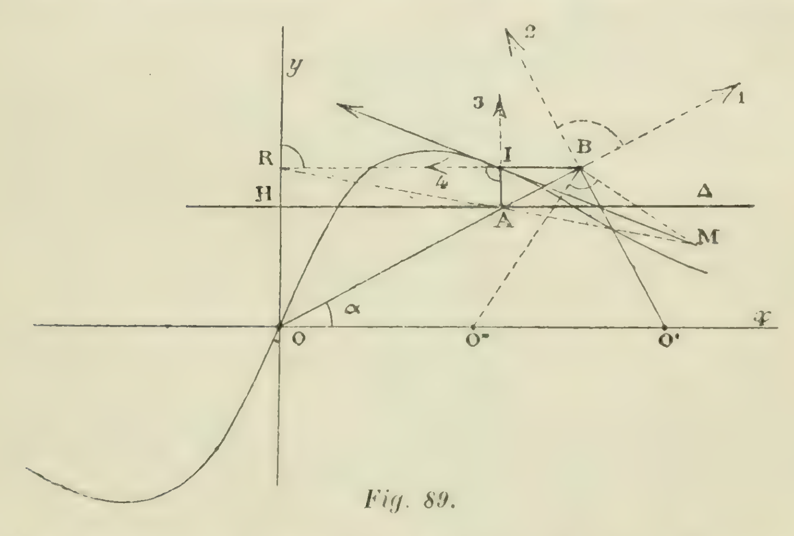


Fig. 89.

O, O′ et une droite Δ parallèle à OO′; si nous effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig. 89*) le lieu décrit par le point I

---

les courbes déduites, d'une courbe donnée, par la transformation de Mac-Laurin. Mais, pour ne pas entrer dans ces considérations générales, nous donnons ici une démonstration directe du cas particulier dont nous avons besoin.

est une cubique à laquelle Newton, pour rappeler sa forme, donnait le nom de *Serpentine*.

En appelant x, y, les coordonnées du point I et en posant

$$\mathrm{OH} = d, \qquad \mathrm{OO'} = d', \qquad \mathrm{BOO'} = \alpha,$$

on a

$$x = d \operatorname{cotg} \alpha, \qquad y = d' \sin \alpha \cos \alpha.$$

Cette dernière relation peut s'écrire

$$y(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = d' \sin \alpha \cos \alpha ;$$

l'équation du lieu est donc

$$y(x^2 + d^2) = dd'x.$$

La figure ci-dessus rappelle la forme de la courbe ; la tangente au point I a été tracée en appliquant l'élégante construction de M. Godefroy.

109. Le trident de Newton. — Cette courbe est une cubique possédant un point double à l'infini et, parmi les cubiques de cette espèce, celle-ci est caractérisée par ce fait que son équation, lorsqu'on choisit convenablement les axes de coordonnées, est

$$y = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}},$$

U et V désignant des fonctions entières de x ; la première, du troisième degré ; l'autre, du premier degré. Il y a, naturellement, au point de vue de la sinuosité, plusieurs formes de trident, suivant le nombre des tangentes réelles que l'on peut mener à la courbe parallèlement à l'axe Ox ; mais nous n'avons à nous préoccuper ici que de la construction du trident par points et par tangentes.

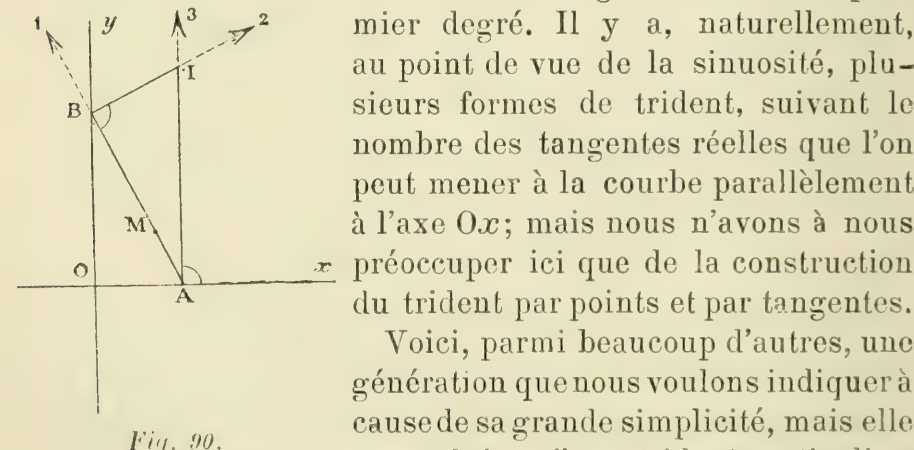


Fig. 90.

Voici, parmi beaucoup d'autres, une génération que nous voulons indiquer à cause de sa grande simplicité, mais elle ne conduit qu'à un trident particulier.

Autour d'un point fixe M on fait tourner une transversale qui rencontre les axes de coordonnées Ox, Oy aux points A, B ; la construction (1, 2, 3 ; *fig. 90*) conduit à un certain point I.

En désignant par α, β les coordonnées du point M, on trouve que le lieu décrit par I est une courbe représentée par

$$y = \frac{x \left\{ (x-\alpha)^2 + \beta^2 \right\}}{\beta(x-\alpha)};$$

c'est l'équation d'un trident, dans un cas particulier.

Mais voici une génération qui donne le trident, en prenant le mot dans le sens général que nous avons indiqué tout à l'heure.

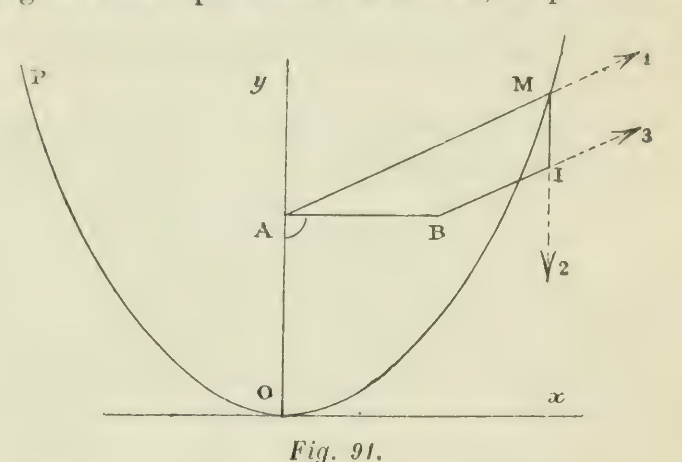


Fig. 91.

Considérons une parabole P rapportée à son axe Oy et à sa tangente principale Ox; soient A un point pris sur l'axe, B un point fixe donné sur la corde principale du point A; effectuons la construction (1, 2, 3; *fig. 91*) et cherchons le lieu du point I.

Soient x', y' les coordonnées du point M; en posant

$$OA = b, \qquad AB = a,$$

l'équation de BI est

$$y - b = \frac{y' - b}{x'}(x - a).$$

Comme on a $\qquad x = x'$

et $\qquad x'^2 = 2py'$,

l'élimination de x' et de y' entre ces trois équations donne, pour l'équation du lieu décrit par le point I,

$$y = \frac{x^3 - ax^2 + 2abp}{2px}. \qquad (1)$$

Mais il importe de montrer que *tout trident* peut être engendré par ce procédé.

Considérons à cet effet l'équation générale des tridents

$$y = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{mx+n}, \qquad (\text{A et } m \neq 0).$$

Si nous transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au moyen des formules

$$y + \lambda = Y, \qquad x + \frac{n}{m} = X$$

l'équation précédente devient

$$Y - \lambda = \frac{AX^3 + B'X^2 + C'X + D'}{mX},$$

et si nous disposons de λ par l'égalité

$$C' + \lambda m = 0,$$

nous avons finalement, dans ce système d'axes, l'équation du trident sous la forme

$$Y = \frac{AX^3 + B'X^2 + D'}{mX}. \qquad (2)$$

Nous pourrons donc identifier les équations (1) et (2) et il est ainsi démontré que la génération par points, que nous venons de donner, convient à tous les tridents.

Comme nous savons construire une parabole, par points et par tangentes, au moyen de la règle et de l'équerre, nous pouvons donc aussi, par application de la règle donnée dans un paragraphe précédent, construire le trident par points et par tangentes.

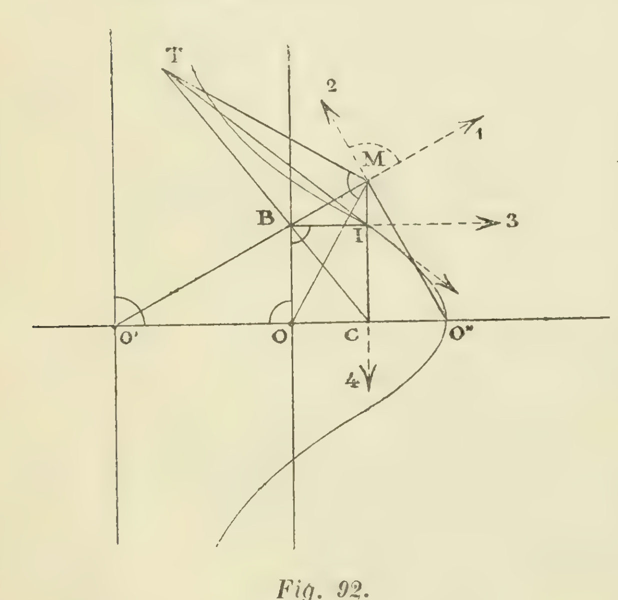


Fig. 92.

110. La courbe d'Agnesi. — Cette courbe, comme les précédentes, nous a déjà occupé (*) *(loc. cit.)*; nous ne la signalons ici que pour compléter cette série de cubiques remarquables et pour faire observer qu'on

(*) On trouvera (*Journal*, 1885, pp. 154 et 200) quelques développements et certains détails bibliographiques sur ces trois courbes.

peut la construire, par points et par tangentes, sans autre instrument que la règle et l'équerre.

Soient O, O', O'' trois points en ligne droite et tels que $O'O = OO''$. Si nous effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig.* 92), le lieu du point I est une courbe d'Agnesi.

En élevant au point M une perpendiculaire MT à OM jusqu'à sa rencontre en T avec BC, la droite TI, d'après la remarque de M. Godefroy, établie plus haut, est la tangente cherchée.

111. Les cubiques unicursales générales. — Voici, pour faire un dernier emprunt à l'intéressant mémoire de M. Schoute, une description par points et par tangentes qui permet de tracer les cubiques unicursales droites.

Prenons quatre points en ligne droite A, B, C, D, puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig.* 93) dans laquelle, bien entendu, les droites MB et MD sont rectangulaires. Si nous posons :

$AB = a, \quad AC = b, \quad BD = c;$
$CI = \rho, \quad ICD = \omega, \quad MBD = \alpha.$

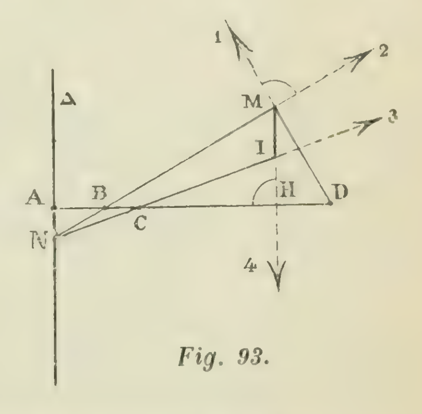


Fig. 93.

Nous avons

$$a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \omega,$$

et

$$c \cos^2 \alpha = \rho \cos \omega + b - a.$$

L'élimination de α entre ces deux équations donne

$$\rho \cos \omega = a - b + \frac{a^2 c}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \omega}$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$x(a^2x^2 + b^2y^2) = (a + c - b)a^2x^2 + (a - b)b^2y^2.$$

C'est l'équation générale des cubiques unicursales droites, quand on prend : 1° pour origine, le point double, 2° pour axe des x, l'axe de symétrie.

En faisant varier la disposition des points A, B, C, D on peut ainsi décrire un grand nombre de cubiques remarquables.

La tangente au lieu décrit par le point I se détermine très simplement en observant, avec M. Godefroy, que les tan-

gentes en M et I aux lieux décrits par ces points se coupent sur la droite NH. Cette propriété peut s'établir par des considérations géométriques comme celles qui sont développées dans le mémoire de M. Schoute, ou directement, en suivant la méthode que nous avons indiquée plus haut, dans un cas analogue.

112. Les cubiques simples. — Nous désignerons ainsi celles qui, dans un système convenable de coordonnées cartésiennes rectangulaires, peuvent être représentées par une équation aussi simple que possible, c'est-à-dire par une équation binôme.

Il n'existe que trois cubiques simples correspondant aux équations :

$$x^3 - hy^2 = 0, \qquad \text{(A)}$$
$$x^3 - h^2y = 0, \qquad \text{(B)}$$
$$xy^2 - h^3 = 0. \qquad \text{(C)}$$

La première est constituée par deux bras paraboliques et elle présente à l'origine un point de rebroussement; la deuxième est formée de deux bras paraboliques présentant une inflexion à l'origine, point qui est centre de la courbe. Ce sont les deux cubiques simples paraboliques.

Quant à la troisième elle affecte la forme de deux branches hyperboliques asymptotes aux axes de coordonnées; elle admet un point de rebroussement à l'infini dans la direction Ox; c'est la cubique simple hyperbolique.

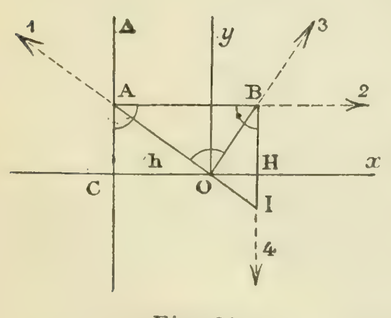


Fig. 94.

113. Cubique simple parabolique à point de rebroussement. — Prenons un angle droit yox, une droite Δ parallèle à oy, puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4; *fig. 94*).

En posant $OC = h$, $BOx = \alpha$, on a immédiatement

$$x = h \cot g^2 \alpha,$$
$$-y = h \cot g^3 \alpha.$$

L'équation du lieu décrit par le point I est donc

$$x^3 = hy^2 \ (*). \qquad (A)$$

Tracé de la tangente. — Prenons un point M (x, y) sur la courbe (A); l'équation de la tangente en ce point est

$$3Xx^2 - 2hyY - hy^2 = 0,$$

ou $$\frac{3X}{x} - \frac{2Y}{y} - 1 = 0. \qquad (a)$$

D'une façon générale, on peut observer que si l'équation d'une courbe est

$$x^p = Ay^q,$$

Fig. 95.

celle de la tangente au point (x, y) est

$$p\frac{X}{x} - q\frac{Y}{y} = p - q. \qquad (T)$$

L'équation (a) étant vérifiée par $X = 0$, $Y = -\frac{y}{2}$, on voit que la tangente à (A) s'obtient en prenant $OQ = \frac{PO}{2}$ et en joignant le point Q au point M considéré sur la courbe.

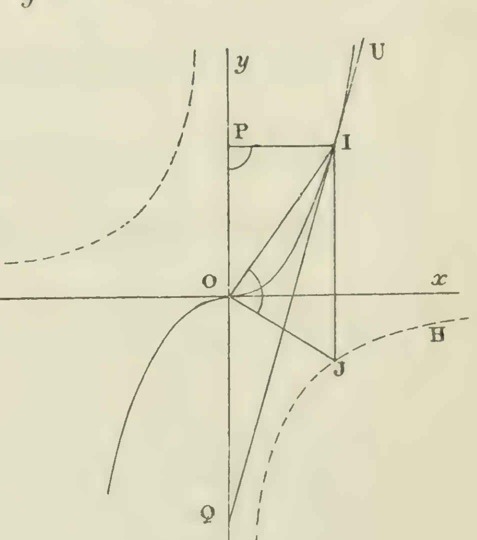


Fig. 96.

114. Cubique simple parabolique à centre. — Imaginons une hyperbole équilatère H, rapportée à ses asymptotes; prenons sur H un point J, joignons OJ, élevons OI perpendiculaire à OJ et menons

(*) Cette parabole cubique a été quelquefois désignée par l'épithète de *parabole Neilienne*, du nom du géomètre Guillaume Neil qui la signala comme une courbe rectifiable parce que son équation vérifiait les relations différentielles indiquées par Wallis pour ces sortes de courbes (*Nouvelles Annales*, 1844, p. 423).

enfin par J une parallèle à Ox. Nous obtenons ainsi un point I (X, Y) qui correspond au point J(x, y), et les coordonnées de ces points vérifient les relations

$$x = X, \qquad yY + X^2 = 0.$$

D'après cela, à l'hyperbole H représentée par l'équation

$$xy + h^2 = 0.$$

cette transformation fait correspondre une courbe U dont l'équation est

$$X^3 = h^2Y.$$

On décrira donc l'hyperbole équilatère, point par point, par l'un des procédés connus et qui n'exigent que l'emploi de la règle et de l'équerre, puis on complétera la construction en passant du point J au point I, comme on vient de l'indiquer.

En appliquant la formule (T), dans laquelle on fait

$$p = 3, \qquad q = 1,$$

on a

$$3\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} = 2.$$

En prenant OQ = 2PO, QI est la tangente en I.

115. Cubique simple hyperbolique. — Prenons un

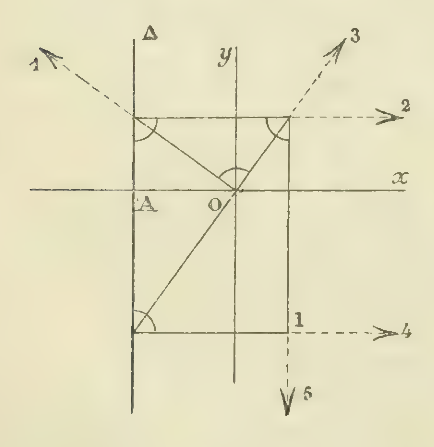


Fig. 97.

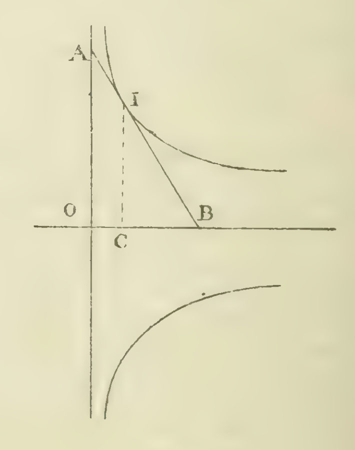


Fig. 98.

angle droit yOx et une droite Δ parallèle à Oy, puis effectuons la construction (1, 2, 3, 4, 5; *fig. 97*) qui conduit à un certain

point I. En posant OA $= h$, le lieu de I est représenté par l'équation

$$xy^2 = h^3.$$

L'équation (T) appliquée à cet exemple, dans lequel on a

$$p = 1, \qquad q = -2,$$

donne

$$\frac{X}{x} + 2\frac{Y}{y} = 3.$$

D'après cela, I étant le point donné sur la courbe (*fig. 98*), si l'on projette ce point en C sur OD et si l'on prend CB $= 2$OC, BI est la tangente à la courbe.

116. Remarque. — Les cubiques simples que nous venons de considérer se prêtent remarquablement bien à la solution du problème que nous avons examiné plus haut et qui est relatif à la duplication du cube.

Si dans les équations :

$$x^3 = hy^2, \qquad x^3 = h^2y, \qquad xy^2 = h^3,$$

on fait, respectivement,

$$y = h\sqrt{2}, \qquad y = 2h, \qquad x = \frac{y}{2};$$

on trouve, en effet,

$$x^3 = 2h^3, \qquad x^3 = 2h^3, \qquad y^3 = 2h^3.$$

(*A suivre.*)

LA QUESTION 199 ET L'HYPERBOLE DE KIEPERT

La question 199 proposée dans le numéro de juillet n'est pas nouvelle, comme nous le fait observer M. Lemoine, qui nous écrit à ce sujet et nous dit: « C'est la *définition même* du lieu étudié depuis sous le nom d'*hyperbole de Kiepert* (*) et qui a été proposé (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 40-42) dans la forme suivante: *Si, sur les côtés d'un triangle* ABC *on décrit les*

(*) Voici, à notre connaissance, les travaux auxquels a donné lieu cette remarquable conique :

1° Lemoine (*Annuaire de l'Association française*, Lyon 1873, p. 94);

2° Brocard (*J. M. S.*; 1884, p. 197 et 1885, p. 12);

3° Neuberg et Lemoine (*Mathesis*, 1886, p. 74). La conique considérée

trois triangles BA'C, BC'A, AB'C *isoscèles semblables (ces triangles étant tournés tous les trois vers l'intérieur de* ABC *ou tous les trois vers l'extérieur) les droites* AA', BB', CC' *se coupent en un point* M *qui décrit l'hyperbole en question.*

Or, des triangles isoscèles semblables ont évidemment des hauteurs proportionnelles aux côtés ; ce qui donne la forme de la question 199.

Quant à la valeur de k (*) pour laquelle les trois droites AA', BB', CC' sont parallèles, on la trouve en cherchant l'intersection de l'hyperbole de Kiepert avec la droite de l'infini et l'on trouve

$$k = \frac{1}{2}\left(\cot g\, \alpha \pm \sqrt{\cot g^2 \alpha - 3}\right),$$

α désignant l'angle de Brocard (**). »

L'identité de la question 199 avec celle des *Nouvelles Annales* rappelée ci-dessus nous avait échappé, bien que, par suite de recherches personnelles sur l'hyperbole de Kiepert, cette conique était, en ce moment, présente à notre pensée.

Voici quelques-uns des résultats auxquels nous venons de faire allusion.

Prenons un triangle ABC et posons-nous la question suivante :

Trouver le lieu d'un point I *sachant que son réciproque* I_0 *et son inverse* I_2 *sont en ligne droite avec lui.*

---

dans cet article est représentée par des coordonnées normales; mais, en prenant des coordonnées barycentriques, on a la conique de Kiepert;

4° Neuberg (*J. M. S.*, 1886, p. 73);

5° Lemoine (*Annuaire de Grenoble*, 1885, et *Mathesis*, supplément du numéro de mai 1886);

6° Voyez aussi une petite note *sur le centre de la conique de Kiepert* (*J. M. S.*, 1886, p. 77).

(*) Le nombre k dans l'énoncé de la question 199 représente le rapport de la hauteur A'H, d'un des triangles isoscèles considérés, à la base correspondante BC.

(**) La question 199, telle qu'elle a été proposée par M. Boutin, n'en donne pas moins lieu à un excellent exercice de calcul ; la lettre de M. Lemoine nous dispense naturellement d'en publier une solution, puisqu'elle constitue la meilleure des réponses que pouvait soulever cette question ; mais nous engageons les élèves à la traiter, à titre d'exercice, et à vérifier, sur le résultat qu'ils trouveront, les propriétés que nous signalons plus loin.

Soient α, β, γ les coordonnées de I; celles de I_0 sont $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$; et celles de I_2 $\frac{a^2}{\alpha}$, $\frac{b^2}{\beta}$, $\frac{c^2}{\gamma}$; si les trois points sont en ligne droite nous devons avoir

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ \frac{a^2}{\alpha} & \frac{b^2}{\beta} & \frac{c^2}{\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\Sigma\alpha^2(b^2 - c^2) = 0. \qquad (\Gamma)$$

La conique Γ qui correspond à cette équation passe : 1° par le centre de gravité de ABC (1, 1, 1); 2° par les points adjoints (— 1, 1, 1), (1, — 1, 1), (1, 1, — 1) ; c'est-à-dire par les sommets A″B″C″ du triangle anti-complémentaire de ABC (*) ; 3° par le centre du cercle inscrit au triangle ABC (a, b, c) et par ses adjoints.

En général lorsqu'une conique Γ est autopolaire à un triangle ABC, elle ne peut passer par un point sans passer par ses adjoints.

On peut vérifier l'identité du lieu que nous venons de trou-

(*) En se reportant à la notion des points complémentaires et anti-complémentaires dont nous avons parlé précédemment (*J. M. S.*, 1886, p. 79, et *J. M. É.*, 1886, p. 131), il est naturel d'appeler *triangle complémentaire* d'un triangle donné ABC celui qu'on obtient en joignant les milieux A′B′C′ d'un triangle donné et *triangle anti-complémentaire* la figure A″B″C″ obtenue en menant par les sommets de ABC des parallèles à ses côtés.

Je profite de cette occasion pour faire une rectification bibliographique relative aux points complémentaires.

Comme je l'ai dit (*J. M. É.*, p. 131), c'est dans le numéro d'octobre 1885 des *Archives de Grunert* que j'ai rencontré cette notion des points complémentaires. Mais une lettre de M. Neuberg, que j'ai reçue dernièrement, m'apprend que l'idée des points complémentaires remonte à Nagel et, dans le tome XLII des *Archives de Grunert*, Reuchle a introduit le terme commode de *couple de Nagel* pour désigner l'ensemble formé par un point et son complémentaire.

Dans cette lettre, M. Neuberg ajoute « les termes *points complémentaires* et *anti-complémentaires* sont très bien choisis et ils se prêtent commodément à désigner d'autres choses qui s'y rattachent ; telles sont les figures complémentaires et anti-complémentaires... » Les termes de triangle complémentaire et anti-complémentaire que je propose ici se rattachent à cette terminologie.

ver avec l'hyperbole de Kiepert, soit en s'assurant que ces deux coniques ont plus de quatre points communs (et ceci résulte de ce qui précède), soit en cherchant la figure complémentaire de Γ. Dans cette transformation, l'équation précédente devient

$$\Sigma(\beta + \gamma - \alpha)^2(b^2 - c^2) = 0,$$

ou

$$\Sigma\beta\gamma(b^2 - c^2) = 0;$$

c'est l'équation ordinaire de la conique de Kiepert. On conclut de là que l'équation (Γ) représente la conique de Kiepert du triangle A″B″C″.

L'équation (Γ) met encore en évidence quatre points de la conique de Kiepert.

On a en effet

$$\Sigma \cos^2 A(b^2 - c^2) = \Sigma(1 - \sin^2 A)(b^2 - c^2).$$

$$= \Sigma(b^2 - c^2) - \Sigma \sin^2 A(b^2 - c^2) = \Sigma \sin^2 A(c^2 - b^2).$$

De cette remarque, il résulte que le point U

$$(\cos A, \quad \cos B, \quad \cos C)$$

et ses adjoints appartiennent à la conique en question.

Ce point U a déjà été signalé (*Mathésis*, 1886, p. 74), c'est le même que celui qui a pour coordonnées normales

$$\operatorname{cotg} A, \quad \operatorname{cotg} B, \quad \operatorname{cotg} C;$$

voici d'ailleurs comment on arrive, assez simplement, à la construction de U.

Soit H *l'orthocentre de* ABC; *la bissectrice de* BHC *rencontre* BC *en* A_1, *soit* A_2 *l'isotomique de* A_1; *les trois droites* AA_2 *concourent au point* U, etc.

M. Lemoine au congrès de Grenoble a signalé la propriété de l'hyperbole de Kiepert de passer par le centre de gravité du périmètre de A″B″C″, point qui se confond, comme l'on sait, avec le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Les seuls faits qui sont peut-être nouveaux, dans cette note, sont ceux qui peuvent se résumer ainsi :

La conique de Kiepert d'un triangle ABC *est autopolaire au triangle complémentaire* A′B′C′; *elle jouit de la propriété que tout point pris sur la courbe est en ligne droite avec son réciproque et son inverse, relativement à* A′B′C′. *Elle passe* (sans compter les points signalés par MM. Brocard, Lemoine et

Neuberg) *par les centres des cercles ex-inscrits au triangle* A'B'C', *par le point* U, *ci-dessus défini, et par ses adjoints, relativement à* A'B'C'.

G. L.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Tarry.

Alger, 31 juillet 1886.

... Je vous remercie beaucoup de l'envoi de votre mémoire *sur un nouveau cercle remarquable...*

Je l'ai lu avec le plus vif intérêt, d'autant plus que votre manière d'envisager les cercles qui appartiennent au plan d'un triangle a beaucoup d'analogie avec ma manière exposée dans *Mathésis*.

En effet, en prenant

$$u = f(a, b, c), \qquad v = f(b, c, a), \qquad w = f(c, a, b),$$

vous obtenez un cercle remarquable, associé au triangle. De cette mine vous avez extrait le cercle Δ.

Dans ma méthode, u, v, w, pourraient représenter des lignes homologues de trois figures semblables, auxquelles correspond un cercle de similitude également remarquable.

Si u, v, w sont les côtés mêmes du triangle, le cercle considéré est le cercle de Brocard.

Il est à remarquer en outre que dans nos études le cercle circonscrit et le cercle des neufs points interviennent.

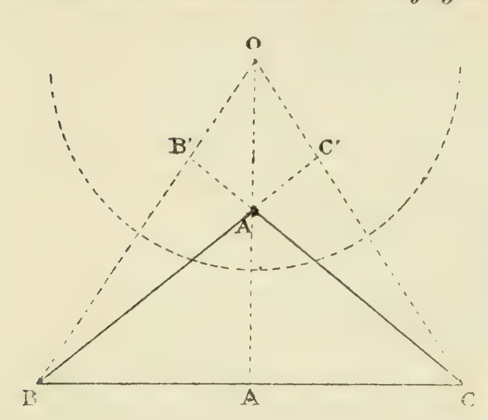
Il y a certainement beaucoup de rapports entre nos méthodes.

La vôtre est analytique et la mienne géométrique : les avantages et les inconvénients s'équilibrent.

Ne m'occupant absolument que de géométrie pure, je me suis naturellement amusé à chercher les démonstrations géométriques de quelques-uns de vos théorèmes.

Comme il peut vous être agréable de les connaître, je vais vous les communiquer, ces observations n'ayant peut-être pas été faites, malgré leur simplicité.

1° *Construire le cercle conjugué du triangle* ABC.



Soit O l'orthocentre.

On a

$$OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = \rho^2.$$

Si donc du centre O on décrit un cercle de rayon ρ, ce cercle sera conjugué au triangle.

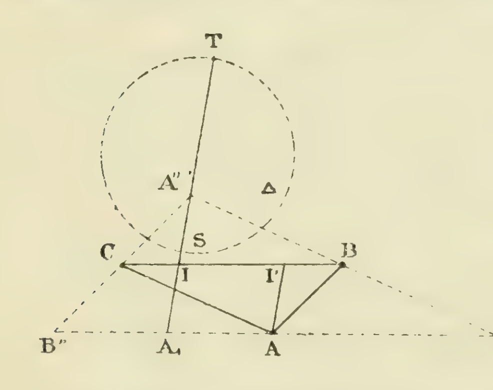
En effet AA' est perpendiculaire à BC; A, A' sont des points conjugués par rapport à ce cercle, et en ligne droite avec O; par conséquent, le sommet A est le pôle du côté opposé BC.

On voit aisément que l'on a les égalités suivantes:

$$OA' = -2R \cos A, \qquad OA = 2R \cos B \cos C,$$

d'où $$OA.OA' = \rho^2 = -4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

2° *Si l'on considère sur un des côtés* BC *du triangle* ABC *deux points isotomiques* I, I' *sur* BC, *le cercle* Δ *est orthogonal au cercle décrit du point* I *comme centre, avec* AI' *pour rayon.*



Soit A″B″C″ le triangle obtenu en menant par les sommets du triangle ABC des parallèles aux côtés opposés; le triangle anticomplémentaire, comme vous l'appelez.

On a évidemment $AI' = IA''$ et I est le milieu de A_1A'',

Le cercle Δ étant le cercle conjugué de A″B″C″, coupe A_1A'' en deux points δ, T, qui divisent harmoniquement le segment A_1A''; on a donc

$$IS.IT = \overline{IA''}^2 = \overline{AI'}^2 \quad \text{(c. q. f. d.)}.$$

Votre méthode générale a sur la mienne l'avantage incontestable d'être plus générale parce qu'elle est analytique.

Ainsi, je n'aurais pas trouvé votre cercle par ma méthode et vous pourriez trouver les miens par la vôtre.

Il est nécessaire, pour que Δ soit réel, que le point O tombe en dehors du triangle, ou que l'un des angles du triangle soit obtus.

Si les trois angles sont aigus, $OA.OA'$ est négatif, et le cercle paraît ne plus exister géométriquement.

Je crois être parvenu à représenter par un symbole géométrique les figures imaginaires; ou, tout au moins, *les coniques imaginaires.*

J'aurai l'honneur de vous adresser un mémoire, actuellement à l'imprimerie chez Gauthier-Villars, intitulé : *Représentation géométrique des coniques et quadriques imaginaires.*

Voici pour le cas qui nous occupe comment je représente le cercle conjugué imaginaire, quand le produit $OA.OA'$ est négatif.

Du centre O, avec un rayon égal à $\sqrt{-\ OA.OA'}$, je décris un cercle que je trace en rouge (pour le distinguer d'un cercle réel et pour marquer ainsi que ce cercle est un pur symbole).

Ce symbole me permet de trouver toutes les propriétés du cercle imaginaire qu'il représente.

Ainsi, la polaire d'un point E, par rapport au cercle imaginaire représenté par le cercle rouge, est la polaire, par rapport au cercle rouge (supposé réel), du point E' symétrique par rapport au centre du cercle.

Avec cette convention, votre droite δ ne disparaît pas ; elle est la polaire par rapport au cercle rouge du point symétrique du centre de gravité E par rapport au centre du cercle rouge.

Toute conique imaginaire a la forme d'une ellipse rouge, et l'étude du cercle Δ se prête admirablement à la démonstration de l'utilité de mon mode de représentation...

QUESTION D'EXAMEN

10. — *Équation du plan tangent pour les surfaces unicursales.*

Soient u et v deux paramètres arbitraires et indépendants; les coordonnées d'un point de la surface unicursale sont

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

Les équations de la droite qui passe par les points x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}. \qquad (1)$$

D'autre part, en désignant par u et v les valeurs des paramètres qui donnent x, y, z; et par $u + du$, $v + dv$ celles qui correspondant aux valeurs $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, on a :

$$dx = \frac{df}{du}du + \frac{df}{dv}dv,$$

$$dy = \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv,$$

$$dz = \frac{d\psi}{du}du + \frac{d\psi}{dv}dv,$$

formules dans lesquelles du et dv désignent deux infiniment petits *arbitraires* et du même ordre infinitésimal.

Enfin, si l'on désigne par $\frac{1}{\lambda}$ la valeur commune des rapports (1), ceux-ci pourront s'écrire

$$\frac{X - x}{\frac{df}{du}du + \frac{df}{dv}dv} = \frac{Y - y}{\frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv} = \frac{Z - z}{\frac{d\psi}{du}du + \frac{d\psi}{dv}dv} = \frac{1}{\lambda}.$$

On obtient ainsi trois relations linéaires et homogènes, par rapport aux paramètres variables λ, du, dv; le lieu décrit par la tangente mobile considérée est donc le plan représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{df}{du} & \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\psi}{du} \\ \frac{df}{dv} & \frac{d\varphi}{dv} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix} = 0.$$

(*A suivre.*)

QUESTION 18

Solution par M. Léon Clément, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Rouen (*).

Trouver le lieu du point M *dont la distance à une ligne fixe* Δ *est dans un rapport donné avec la somme ou la différence de ses distances à deux points fixes* A, B.

Pour fixer les idées, adoptons le cas où l'on considère la *somme* MA + MB.

Prenons pour axe des x la droite joignant les deux points fixes, et pour axe des y la perpendiculaire à Δ menée par le milieu de AB.

Soit X = o l'équation de Δ. Considérons un point M du lieu (de coordonnées x, y); et soit $2a$ la somme des distances du point M aux points A et B. Si l'on pose AB = $2c$, le point M se trouve sur l'ellipse :

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Soit MP la distance du point M à la droite CD ; on a

$$MP = 2\lambda X,$$

λ étant une constante.

Si on appelle $\frac{\lambda}{k}$ le rapport donné, on a donc $\frac{2\lambda X}{2a} = \frac{\lambda}{k}$, d'où

$$a = kX.$$

Éliminant a entre cette relation et l'équation de la conique, on a l'équation du lieu du point M :

$$k^2X^2 . y^2 + (k^2X^2 - c^2)x^2 = k^2X^2(k^2X^2 - c^2). \qquad (1)$$

C'est une équation du quatrième degré.

Dans le cas où l'on considère la différence MA — MB, on

(*) Cette solution nous a été adressée il y a déjà quelque temps; nous avons tardé à la publier dans l'espérance, qui ne s'est pas réalisée, d'en recevoir d'autres. Cette remarque s'applique à plusieurs solutions de questions relativement anciennes, et qui, soit dans ce Journal, soit dans le Journal de *M. E.*, paraîtront prochainement.

substitue à l'ellipse que nous avons envisagée tout à l'heure une hyperbole et l'on retrouve l'équation (1), au signe près du second membre.

La discussion de cette équation générale semble offrir quelques difficultés ; mais on pourra facilement construire la courbe (1), en supposant que Δ est parallèle ou perpendiculaire à AB.

QUESTIONS PROPOSÉES

206. — L'ellipse inscrite au triangle ABC et ayant pour foyers le centre de gravité et le point K de Lemoine, touche les côtés en des points α, β, γ, tels que les deux segments $B\alpha$, $C\alpha$ sont proportionnels aux carrés des diamètres des cercles AKB, AKC. *(E. Vigarié.)*

207. — On donne deux droites fixes Δ, Δ′, qui se coupent en A, et un point B sur Δ. D'un point C, mobile sur Δ′, on abaisse sur Δ une perpendiculaire qui coupe cette droite en C′. A partir de C, on porte sur Δ, dans un sens déterminé, une longueur C′D constante. On demande :

1° L'enveloppe de CD;

2° Le lieu du point G d'intersection de CC′ avec la perpendiculaire à CD issue du point B.

(*Troille*, élève au lycée de Grenoble.)

208. — Démontrer que l'expression

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

tend vers $\frac{2}{3}$, quand n croît indéfiniment. *(T.)*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13670-6.

RÉSOLUTION DU SYSTÈME
DE DEUX INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

Par M. **E. Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

(*Suite*, voir p. 217.)

Soit
$$P = x^2 + px + q$$
$$P' = x^2 + p'x + q'.$$

Il y a quatre systèmes d'inégalités à considérer, selon que P et P' sont de même signe ou de signes contraires. Rappelons que, dans ce qui suit, on suppose que l'on a $p > p'$, ce qui est permis.

Premier Système : $P > 0, \quad P' > 0.$

On substitue $\frac{q'-q}{p-p'}$ dans l'un des trinômes ; supposons d'abord que le résultat de cette substitution soit *positif*.

Si l'on a $\frac{q'-q}{p-p'} > -\frac{p'}{2}$, on a vu que l'ordre de grandeur des racines était donné par les inégalités
$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta.$$
x ne pouvant varier entre α et β d'après la condition $P > 0$, x ne peut varier que de $-\infty$ à α ou de β à $+\infty$, et dans ces conditions la seconde inégalité étant satisfaite, la solution du système est
$$x < \alpha \quad \text{ou} \quad x > \beta.$$

Si $\frac{q'-q}{p-p'}$ est compris entre $-\frac{p'}{2}$ et $-\frac{p}{2}$ l'ordre de grandeur étant :
$$\alpha < \beta < \alpha' < \beta'$$
on pourra faire varier x soit de $-\infty$ à α ; soit de β à α', soit de β' à $+\infty$.

Enfin, si l'on a $\frac{q'-q}{p-p'} < -\frac{p}{2}$, on a :
$$\alpha' < \alpha < \beta < \beta';$$

comme dans la première hypothèse, la solution est

$$x < \alpha' \quad \text{ou} \quad x > \beta'$$

Si, au contraire, le résultat de la substitution de x_1 est *négatif*, l'ordre de grandeur étant indiqué par les inégalités

$$\alpha < \alpha' < \beta < \beta',$$

la solution du système est

$$x < \alpha \quad \text{ou} \quad x > \beta'$$

Deuxième Système : $P > 0$, $P' < 0$.

La substitution de x_1, dans l'un des trinômes donnant un résultat *positif*, si l'on a

1° $x_1 > -\frac{p'}{2}$, l'ordre de grandeur est : $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.

Or, pour satisfaire la seconde inégalité, x ne doit varier qu'entre α' et β', et dans cet intervalle, le premier trinôme serait constamment négatif et non positif, comme la question l'exige; donc, dans ce cas, il y a impossibilité de satisfaire à ce système; en d'autres termes, ces deux inégalités sont contradictoires.

2° Si l'on a $-\frac{p'}{2} > x_1 > -\frac{p}{2}$, l'ordre de grandeur des racines est :

$$\alpha < \beta < \alpha' < \beta',$$

donc en faisant varier x entre α' et β', les deux inégalités sont satisfaites, et il est évident que c'est la seule solution.

Enfin, si l'on a $x_1 < -\frac{p}{2}$, l'ordre de grandeur des quatre racines est : $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$,

x ne pouvant être compris entre α et β d'après l'inégalité $P > 0$, on voit que x doit varier soitde α' à α, soit de β à β'.

Si, au contraire, le résultat de la substitution de x_1 dans l'un des trinômes est *négatif*, on a :

$$\alpha < \alpha' < \beta < \beta'.$$

D'après la condition $P' < 0$, x ne peut varier que de α' à β', et puisque x ne peut être inférieur à β, l'intervalle compris de α' à β doit être supprimé, et la seule solution du système est

$$\beta < x < \beta'.$$

Troisième Système : $P < 0$, $P' < 0$.

En suivant le même ordre et faisant les mêmes raisonnements, on verra facilement que les solutions sont celles consignées dans le tableau ci-dessous. Cette observation s'applique au *quatrième Système :* $P < 0$, $P' > 0$.

	$P = x^2 + px + q > 0$ $P' = x^2 + p'x + q' > 0$	$P > 0$ $P' < 0$	$P < 0$ $P' < 0$	$P < 0$ $P' > 0$
$p = p'$ et $q > q'$	$x < \alpha'$ ou $x > \beta'$	$\alpha' < x < \alpha$ ou $\beta < x < \beta'$	$\alpha < x < \beta$	Imp.
$> p'$, $X > 0$, $\frac{q'-q}{p-p'} > -\frac{p'}{2}$	$x < \alpha$ ou $x > \beta$	Imp.	$\alpha' < x < \beta'$	$\alpha < x < \alpha'$ ou $\beta' < x < \beta$
$> p'$, $X > 0$, $-\frac{p'}{2} > \frac{q'-q}{p-p'} > -\frac{p}{2}$	$x < \alpha$ ou $x > \beta'$ ou $\beta < x < \alpha'$	$\alpha' < x < \beta'$	Imp.	$\alpha < x < \beta$
$> p'$, $X > 0$, $-\frac{p}{2} > \frac{q'-q}{p-p'}$	$x < \alpha'$ ou $x > \beta'$	$\alpha' < x < \alpha$ ou $\beta < x < \beta'$	$\alpha < x < \beta$	Imp.
$> p'$, $X < 0$	$x < \alpha$ ou $x > \beta'$	$\beta < x < \beta'$	$\alpha' < x < \beta$	$\alpha < x < \alpha$

(*A suivre.*)

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps**.

(*Suite*, voir p. 229.)

LES TRANSVERSALES DANS LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

Les idées générales que nous venons d'exposer peuvent s'appliquer, avec les modifications convenables aux transversales d'un triangle de référence, associées d'après cer-

taines lois géométriques. Le principe de dualité, pris dans son sens le plus général, trouve ici à s'employer de mille façons différentes ; mais ce que nous avançons exige peut-être quelques explications.

25. Correspondance générale de deux transversales. — Imaginons que nous sachions faire correspondre : 1° Un point M′, à un point M ; 2° une droite μ, à un point M ; et réciproquement. Dans ces conditions, nous pouvons faire correspondre : à une droite donnée μ, un point M ; à celui-ci un point M′ ; enfin, à ce dernier point une transversale μ'.

En jetant sur ces constructions une vue d'ensemble nous voyons donc que nous pourrons faire correspondre une droite μ' à une droite donnée μ toutes les fois que nous saurons établir une correspondance entre deux points ; et, aussi, entre un point et une droite. Cette correspondance des droites μ, μ', une fois établie, on pourra dégager le principe de transformation auquel on aboutit ainsi, des idées auxiliaires qui ont servi à le trouver ; et, finalement, chercher la loi de correspondance qui unit directement les transversales μ et μ'.

Nous allons mieux faire comprendre ces notions générales en les appliquant à deux exemples bien connus.

26. Transversales réciproques. — Prenons une droite Δ et soit M le point harmoniquement associé ; à ce point M, correspond son réciproque M_0 ; enfin à M_0 correspond une transversale Δ_0 harmoniquement associée. Ainsi, ces principes de correspondance entre les points réciproques d'une part, et les points et droites harmoniquement associés d'autre part, conduisent très naturellement à l'association des droites Δ et Δ_0.

Après avoir imaginé ces deux droites, déduites l'une de l'autre, comme nous venons de l'expliquer, on peut se proposer de dégager la correspondance trouvée des principes auxiliaires qui ont servi à l'établir et qui, au fond, constituent une évidente superfluité.

C'est ainsi que, dans cet exemple, observant que les droites

Δ, Δ_0 coupent les côtés en des points isotomiques, on voit que Δ et Δ_0 ne sont autre chose que deux transversales réciproques, lesquelles se déduisent directement l'une de l'autre par la loi connue.

27. Transversales inverses. — Prenons maintenant, au lieu de la correspondance par points réciproques, la correspondance par points inverses du colonel Mathieu.

A une droite Δ, faisons correspondre un point harmoniquement associé M ; prenons ensuite le point inverse M′ et construisons enfin la droite Δ' harmoniquement associée à M′ ; nous obtenons ainsi deux transversales Δ, Δ' liées l'une à l'autre comme il vient d'être dit. Mais on peut établir directement la correspondance de Δ avec Δ' de la manière suivante.

Appelons, *droites isogonales* (*) deux droites qui, partant d'un sommet A d'un triangle, sont symétriques par rapport aux bissectrices de l'angle formé par les droites AB et AC. Si nous considérons une transversale Δ rencontrant les côtés de ABC aux points M_a, M_b, M_c les isogonales des droites AM_a, BM_b, CM_c coupent les côtés du triangle en trois points M'_a, M'_b, M'_c qui sont sur une droite Δ'.

Cette droite Δ', déduite de Δ par cette construction géométrique simple et directe est, comme on le vérifiera sans difficulté, celle que nous avons trouvée plus haut par un procédé indirect qui faisait intervenir dans la construction, tout à la fois, la notion des points inverses, et celle des points et droites harmoniquement associés. On obtient donc finalement entre les deux droites Δ, Δ' que nous nommerons *transversales inverses*, une correspondance directe et c'est celle-ci que l'on doit évidemment préférer.

28. Droite de Newton, associée d'une transversale donnée. — Dans d'autres cas, la correspondance entre deux transversales peut s'établir directement et, à l'inverse de ce que nous avons vu dans les deux paragraphes

(*) Nous proposons ici un changement de nomenclature analogue à celui que nous avons introduit pour le terme de *points isotomiques* (*J. M. S.*, 1886, p. 86).

précédents, on déduit de cette association une correspondance entre un point et une droite, ou entre deux points.

Voici un exemple de ce genre de correspondances.

Soit un triangle ABC ; une transversale Δ tracée dans son plan détermine un quadrilatère complet et l'on sait que les milieux des diagonales sont situés sur une certaine droite Δ'. Pour rappeler un théorème célèbre, on peut dire que Δ' est la droite de Newton, associée à Δ (*).

L'équation de Δ étant

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

on vérifiera sans peine que Δ est représentée par

$$\frac{\beta + \gamma - \alpha}{A} + \frac{\alpha + \gamma - \beta}{B} + \frac{\alpha + \beta - \gamma}{C} = 0.$$

Il est facile de déduire de là la correspondance entre les points M, M' harmoniquement associés aux droites Δ et Δ'.

Les coordonnées (α, β, γ) de M sont

$$(1) \qquad \frac{1}{A}, \quad \frac{1}{B}, \quad \frac{1}{C};$$

celles de M' (α', β', γ') se calculent par les formules

$$(2) \quad \alpha'\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) = \beta'\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) = \gamma'\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right).$$

En comparant ces deux tableaux, on voit que *le réciproque de* M' *est l'anti-complémentaire de* M.

On obtient ainsi une propriété élémentaire assez curieuse sur le quadrilatère complet; mais la méthode de transformation des figures que prendrait pour base le principe de correspondance associant, comme nous venons de le voir, les points M et M', reviendrait au fond à la transformation par points réciproques. La raison en est que les figures anti-complémentaires étant homothétiques, du moins dans le système de coordonnées barycentriques que nous employons dans ce travail, les lieux décrits par les points M et M' sont, à une transformation homothétique près, deux courbes pou-

(*) Plus brièvement, Δ' pourrait s'appeler la *Newtonienne* de Δ. C'est aussi, suivant une locution assez répandue, la *médiane* du quadrilatère complet déterminé par le triangle de référence et par la transversale donnée Δ.

vant être considérées comme transformées l'une de l'autre par points réciproques.

29. Droites associées (sens général). — D'une façon générale, on voit que l'on peut reproduire, pour les droites, tout ce que nous avons dit relativement aux points qui sont, d'après une certaine loi, associés à un ou plusieurs points donnés; mais il nous reste à montrer comment on rattache la construction des droites associées à celle des points associés correspondants.

Prenons une droite Δ représentée par l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

et associons lui une droite Δ' ayant pour équation

$$\alpha f(A, B, C) + \beta f(B, C, A) + \gamma f(C, A, B) = 0\,;$$

nous voulons faire observer que la détermination de Δ' se fera toujours sans difficulté, si l'on sait déterminer le point M dont les coordonnées sont

$$f(A, B, C), \qquad f(B, C, A), \qquad f(C, A, B),$$

connaissant d'ailleurs le point M′ qui correspond aux coordonnées

$$A, \qquad B, \qquad C.$$

En effet, M′ est le point harmoniquement associé à la transversale réciproque de Δ; on connaît donc ce point M′. Construisons maintenant le point M, associé au point M′ comme nous venons de le dire; en prenant la droite Δ' harmoniquement associée à M, puis sa transversale réciproque, nous obtiendrons Δ'.

30. Droites Brocardiennes. — De même qu'on ne peut concevoir un point M, sans imaginer aussitôt, entre autres choses, les points Brocardiens correspondants M′, M″; de même, une droite Δ du plan ABC donne naissance à deux droites Δ', Δ'', associées à la droite Δ, comme nous allons l'expliquer.

L'équation de Δ étant

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

imaginons les droites Δ', Δ'' correspondant aux équations

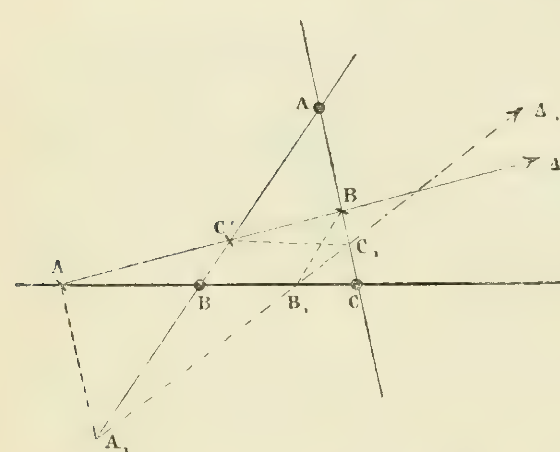
$$\frac{\alpha}{B} + \frac{\beta}{C} + \frac{\gamma}{A} = 0,$$

$$\frac{\alpha}{C} + \frac{\beta}{A} + \frac{\gamma}{B} = 0,$$

et proposons-nous de les construire.

A cet effet, menons :

par A′ une parallèle $A'A_1$ à CA,
— B′ — $B'B_1$ à AB,
— C′ — $C'C_1$ à BC;



les trois points A_1, B_1, C_1 sont, pour des raisons évidentes trois points en ligne droite ; cette droite est précisément l'une des droites visées ci-dessus.

La seconde droite s'obtient en effectuant le tracé précédent dans le sens inverse ; c'est-à-dire, en menant par A′ une parallèle à BA, etc.

31. Droites algébriquement adjointes. — En appliquant à la géométrie tangentielle l'idée des points algébriquement adjoints (*), on est naturellement conduit à considérer les quatre droites qui correspondent à l'équation

$$\pm\frac{\alpha}{A} \pm \frac{\beta}{B} \pm \frac{\gamma}{C} = 0,$$

dans laquelle les signes sont arbitrairement choisis. Ces droites sont harmoniquement associées aux points ($\pm$ A, $\pm$ B, $\pm$ C) considérés par M. Lemoine ; et, de l'une d'elles Δ, on

(*) J'ai proposé (§ 10), pour abréger le langage, de dire simplement *points adjoints ;* mais cette expression ne vaut pas mieux que celle de *points associés* qui, pour ces points, a été proposée par M. Neuberg (*Mathesis*, t. I, p. 173) et par M. Lemoine (*J. M. S.* 1885, p. 193). Il faut, pour rappeler le plus possible le caractère de la loi d'association des points en question, ajouter qu'ils sont algébriquement adjoints ou algébriquemen associés ; car dire qu'ils sont adjoints ou associés, cela est insuffisant.

déduit les trois autres en prenant les conjugués harmoniques, par rapport aux côtés du triangle de référence, des points communs à Δ et à ces côtés. On obtient ainsi trois points, qui, joints deux à deux, donnent les droites algébriquement adjointes à Δ. Quatre droites adjointes forment un quadrilatère complet dont les diagonales sont justement les côtés du triangle de référence.

En un mot, ces deux idées corrélatives (je prends le terme dans son sens le plus général), l'une concernant les points M, N associés d'après une certaine loi correspondant au tableau:

A,	B,	C,	coordonnées de M;
$f(A,B,C)$,	$f(B,C,A)$,	$f(C,A,B)$,	— de N;

et l'autre les droites μ, ν associées l'une à l'autre de telle sorte que

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \qquad \text{soit l'équation de } \mu,$$

$$\alpha f(A,B,C), + \beta f(B,C,A) + \gamma f(C,A,B) = 0, \text{ celle de } \nu,$$

ces deux idées, disons-nous, sont tellement liées l'une à l'autre que, par l'entremise des points et droites harmoniquement associés d'une part, des points réciproques ou des transversales réciproques d'autre part, on peut trouver la droite ν (connaissant μ), si l'on sait trouver N (connaissant M); et réciproquement.

Au fond, dans les lignes qui précédent, nous transportons dans la géométrie du triangle le principe si fécond de la transformation de Poncelet.

32. Points et droites associés *(sens général).* — Ces réflexions conviennent tout aussi bien aux points et droites associés.

Si, à un point M, dont les coordonnées sont

$$A, \quad B, \quad C,$$

on associe une droite μ, celle-ci correspondant à l'équation

$$\alpha f(A,B,C) + \beta f(B,C,A) + \gamma f(C,A,B) = 0;$$

on voit qu'il suffira, pour construire μ: 1° de déterminer le point M′ (associé à M) et dont les coordonnées sont

$$f(A,B,C),\ f(B,C,A),\ f(C,A,B);$$

2° de prendre la droite μ' harmoniquement associée à ce point M′.

3° enfin, la transversale réciproque de μ'.

Avant de résumer, comme nous allons le faire tout à l'heure, les lois les plus simples qui permettent d'associer à un point donné, des éléments nouveaux, nous ferons observer que les idées développées dans ce paragraphe, et dans le précédent, permettent d'étendre : 1° aux droites associées, 2° aux points et droites associés, tout ce que nous avons dit plus haut pour les points associés, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage sur cette généralisation évidente *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur au Collège de Vire.

(*Suite,* voir p. 233.)

---

18. — LEMME. Si une droite est partagée en deux segments de longueur a et b et que sur chacun de ces segments on décrive une circonférence, la portion l de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact est moyenne proportionnelle entre les segments a et b.

19. — On considère un triangle ABC, sur chacun des segments déterminés par la bissectrice intérieure de l'angle A sur le côté a, on décrit des demi-cercles, et l'on désigne par l_a la longueur de la portion de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact sur ces demi-cercles, et l_b, l_c les quantités analogues pour les autres côtés; on a la relation :

$$\frac{\sqrt{a}}{l_a} + \frac{\sqrt{b}}{l_b} + \frac{\sqrt{c}}{l_c} = 2\sqrt{\frac{p}{Rr}}.$$

29. — Si, sur une droite on porte à la suite l'un de l'autre les deux segments soustractifs déterminés sur le côté a par la bissectrice extérieure de l'angle A d'un triangle ABC, et que sur chacun d'eux comme diamètre on décrive une cir-

conférence, si l'_a désigne la portion de tangente commune extérieure à ces circonférences et l'_b, l'_c les longueurs analogues pour les côtés b et c, on a la relation :

$$\frac{\sqrt{b}}{l'_b} = \frac{\sqrt{a}}{l'_a} + \frac{\sqrt{c}}{l'_c}.$$

21. — l_a, l'_a .... ayant la même signification qu'aux deux exercices précédents ; on a les relations :

$$(b+c)l_a + (a+c)l_b + (a+b)l_c = (b-c)l'_a + (a-c)l'_b + (a-b)l'_c$$

$$\frac{a}{l_a l'_a} + \frac{c}{l_c l'_c} = \frac{b}{l_b l'_b}.$$

22. — Si l_a, l_b, l_c désignent des quantités analogues aux précédentes, pour les segments déterminés sur les côtés par les hauteurs. On a la relation

$$a^2 l_a^2 + b^2 l_b^2 + c^2 l_c^2 = 4S^2.$$

23. — Si on substitue aux hauteurs les médianes, on a

$$l_a + l_b + l_c = p.$$

En effet on a évidemment dans ce cas $l_a = \frac{a}{2}$, $l_b = \frac{b}{2}$, $l_c = \frac{c}{2}$.

24. — Si l_a, l_b, l_c désignent toujours des quantités analogues aux précédentes pour les segments déterminés sur chaque côté par le point de contact du cercle inscrit. On a :

$$l_a l_b l_c = Sr, \qquad \frac{1}{l_a^2} + \frac{1}{l_b^2} + \frac{1}{l_c^2} = \frac{1}{r^2},$$

l_a, l_b, l_c sont les demi-axes non transverses des hyperboles considérées n° 13.

25. — Le cercle ex-inscrit r' détermine sur le côté a deux segments additifs, sur b et c deux segments soustractifs, si l'_a, l'_b, l'_c désignent des quantités analogues aux précédentes pour les côtés a, b, c ; si, en outre l''_a, l''_b, l''_c, l'''_a... désignent de même, d'autres quantités analogues ponr les segments déterminés par les points de contact des autres cercles ex-inscrits, on a les relations

$$(1) \quad l'_a l'_b l'_c = Sr', \qquad l''_a l''_b l''_c = Sr'', \qquad l'''_a l'''_b l'''_c = Sr''',$$

$$(2) \quad l'_b l'_c = p l'_a, \qquad l''_a l''_c = p l''_b, \qquad l'''_a l'''_b = p l'''_c.$$

$$(3) \qquad l'_a l''_b l'''_c = \mathrm{S}r = l_a l_b l_c,$$

$$(4) \qquad l''_a = l'''_a, \qquad l'_b = l'''_b, \qquad l'_c = l''_c,$$

$$(5) \qquad l''^2_a + l'''^2_b + l'^2_c = l'''^2_a + l'^2_b + l''^2_c = p^2,$$

$$(6) \qquad l''_a l'''_b l'_c = l'''_a l'_b l''_c = \mathrm{S}p,$$

$$(7) \qquad \frac{l'_b l'_c}{l'_a} = \frac{l''_a l''_c}{l''_b} = \frac{l'''_a l'''_b}{l'''_c} = p,$$

$$(8) \qquad \frac{l_a l_b l_c}{r} = \frac{l'_a l'_b l'_c}{r'} = \frac{l''_a l''_b l''_c}{r''} = \frac{l'''_a l'''_b l'''_c}{r'''} = \mathrm{S}.$$

$l_a l_b l_c$ ayant même signification qu'au numéro précédent.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Nous signalons à l'attention de nos lecteurs un ouvrage qui vient de paraître et qui a pour titre : « *Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré à une inconnue* ».

L'auteur est M. Tartinville, professeur de mathématiques élémentaires au lycée Saint-Louis.

Cet ouvrage nous paraît appelé à rendre de réels services aux élèves qui veulent posséder à fond cette partie si importante de l'algèbre qui se rattache à la fonction du second degré.

Toute cette théorie est traitée avec le plus grand soin. De nombreuses applications accompagnent chacune des questions et, ainsi, aident à leur intelligence. Enfin, un certain nombre de problèmes, où l'on rencontre toutes les difficultés qui peuvent se présenter, sont discutées complètement.

Nous sommes convaincu que les candidats aux différentes écoles nous sauront gré de leur avoir fait connaître cet excellent ouvrage.

G. L.

QUESTIONS D'EXAMENS

ÉCOLES D'ARTS ET MÉTIERS (1885)

I. On donne un cercle O et trois points m, n, p, placés sur la circonférence. Inscrire dans ce cercle un triangle ABC tel que les trois points donnés soient les milieux des arcs sous-tendus par les trois côtés.

II. Calculer à moins d'un centimètre près le périmètre et déterminer exactement la surface d'un polygone régulier de 12 côtés inscrit dans un cercle de $1^m,56$ de diamètre. On vérifiera par le calcul et l'on dé-

montrera géométriquement que la surface de ce *dodécagone* est triple de celle du carré construit sur le rayon du cercle circonscrit.

(17 juillet 1885, de 9 h. à 10 h. et demie.)

Arithmétique.

I. Calculer à moins d'un franc près, le prix d'un champ de 5 arpents, 28 perches 2/3 situé dans un pays où l'hectare superficiel coûte 3000 francs. On sait d'ailleurs qu'une toise équivaut à $1^{m},94904$ et que l'arpent de Paris était composé de 100 perches ayant chacune 3 *toises* de côté.

II. Un marchand remplit une pièce de 228^{l} avec deux sortes de vin ordinaire qui lui coûtent l'un 0 fr. 50 et l'autre 0 fr. 65 le litre et avec du vin de Bordeaux à 0 fr. 80 le litre. Il emploie 5 fois plus de vin de Bordeaux que de vin à 0 fr. 50, et 6 fois moins de vin à 0 fr. 50 que de vin à 0 fr. 65. On demande 1° Combien il entre de litres de chaque espèce de vin dans le mélange ainsi obtenu ; 2° A quel prix le marchand devra-t-il vendre le litre de mélange pour réaliser un bénéfice de 20 0/0?

AGRÉGATION MATHÉMATIQUE DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL
(ANNÉE 1885)

Mécanique.

Un corps solide homogène de densité 1,5, a la forme d'un cylindre droit, dont le rayon est R et la hauteur $0^{m},45$. On fixe les deux extrémités d'une arête, et on fait exécuter au solide de petites oscillations autour de cette droite, l'écart initial étant 6° et la vitesse initiale nulle : 1° Calculer le moment d'inertie relatif à l'axe de suspension ; 2° Déterminer R de manière que le solide exécute deux oscillations par seconde ; 3° Quelle est, dans ces conditions, la force vive du solide au moment où il passe par sa position d'équilibre ; 4° Trouver les axes de suspension, parallèles au premier, qui donneraient la même durée pour l'oscillation.

Géométrie descriptive.

Une hélice est tracée sur un cylindre circulaire droit à axe vertical. Construire l'ombre portée obliquement par cette courbe sur le plan horizontal (rayons parallèles). On fera l'épure, à main levée, dans le cas le plus simple.

Algèbre et trigonométrie.

Dans un triangle rectangle AOB, on donne les deux côtés de l'angle droit $OB = a$, $OA = b$, ainsi qu'un point H situé sur OA ou sur son prolongement. Trouver sur OB un point C tel que le triangle BCD ait une surface égale à la moitié de celle de AOB. Résoudre le triangle BCD dans le cas où OH et OA, étant de même sens, le premier est triple du second. Effectuer numériquement cette résolution en supposant $a = 3^{m}$ et $b = 4^{m}$.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SPÉCIAL (PARIS)

Mathématiques.

5 et 6 août 1886. — I. Un cône circulaire droit SAB et un cylindre circulaire droit ABDC ont même hauteur SO appelée h, et même base : le cercle AB de rayon R. On demande à quelle distance x de la base AB il faut mener un plan EF, parallèle à cette base, pour que le tronc de cône AIKB, soit équivalent au volume compris entre le cylindre AEFB et ce même tronc de cône AIKB.

II Décrire la vis sans fin. Dire à quoi elle sert?

CERTIFICAT D'ÉTUDES DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL
(ANNÉE 1886)

Mathématiques.

30 et 31 juillet. — I. On donne un angle droit MON et un point P pris sur la bissectrice de cet angle; mener par le point P une droite AB limitée aux deux côtés de l'angle de telle sorte que l'aire du triangle AOB soit équivalente à un carré de côté a. La longueur OP $= d$. On cherchera la longueur x de OA. Discussion.

II. Epure à main levée de l'intersection d'une droite donnée par ses projections et d'un plan donné par ses traces. — Légende.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET
PARIS 1886 (*)

Mathématiques.

9 juillet. — I. Inégalité des jours et des nuits.

II. D'un point M, mobile sur la base BC d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires MP, MQ sur les deux autres côtés. On demande le minimum de la somme des carrés de ces deux perpendiculaires

Rép. $$\frac{b^2c^2 \sin^2 A}{b^2 + c^2}.$$

(*) Ces énoncés, avec l'indication des résultats, sont empruntés au recueil publié par la librairie Croville-Morant et Foucart (*Journal des examens de la Sorbonne,* 20, rue de la Sorbonne).

Nous prions ceux de nos lecteurs qui connaissent les énoncés des sujets proposés aux examens du Baccalauréat, dans les diverses facultés de province, de nous les envoyer; nous les publierons bien volontiers.

10 juillet. — I. Étant donné le secteur circulaire droit BOA et la tangente en A, mener une tangente DE telle que le trapèze OAED soit équivalent à un carré donné.

Rép. $$x = \frac{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 3R^4}}{3R}.$$

II. Déterminer la résultante de deux forces parallèles et de sens contraire.

12 juillet. — I. On donne un carré ABCD dont le côté AB $= a$. Par le centre O de ce carré on élève sur son plan une perpendiculaire, sur laquelle on prend un point S tel que le triangle ASB soit équilatéral. Calculer : 1° le volume de la pyramide SABCD ; 2° l'angle du plan ASB avec le plan de la base.

Rép. $$V = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}; \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

II. Nommer les planètes dans l'ordre de leur distance au soleil. — Enoncer les lois de Képler.

16 juillet. — I. Quelles valeurs faut-il donner à la constante m pour que le trinôme $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$ reste positif, quel que soit x ?

Rép. $m < 1$ ou $m > 3$.

II. Enoncer et démontrer la propriété fondamentale de la tangente à la parabole.

17 juillet. — I. Démontrer que le plus petit commun multiple de deux nombres entiers A et B ayant pour plus grand commun diviseur D est égal à $\frac{A \times B}{D}$.

II. Les angles A et B d'un triangle ont pour valeur $A = 60°$, $B = 45°$; la somme des carrés des 3 côtés du triangle est égale à une quantité donnée K^2. On demande de calculer les longueurs des côtés sans avoir recours aux tables de logarithmes.

Rép. $$a = \frac{k\sqrt{3}}{\sqrt{7 + \sqrt{3}}} \qquad b = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{7 + \sqrt{3}}} \qquad c = \frac{k\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{7 + \sqrt{3}}}.$$

19 juillet. — I. Résoudre le système de deux équations

$$ax + by = ap + bq,$$
$$x^2 + y^2 + xy = p^2 + q^2 + pq.$$

1re Rép. $x = p, \qquad y = q.$

2me Rép. $$x = \frac{p(a^2 - b^2) + qb(2a - b)}{a^2 + b^2 - ab} \qquad y = \frac{-q(a^2 - b^2) + pa(2b - a)}{a^2 + b^2 - ab}.$$

II. Pour que trois forces appliquées à un corps solide libre se fassent équilibre, il est nécessaire qu'elles soient dans un même plan et que deux d'entre elles aient une résultante égale et directement opposée à la troisième.

20 juillet. — I. On donne un hemisphère AO A'H, de rayon R ; on demande de mener deux plans BB', DD' parallèles au plan de la base AA' de l'hémisphère de façon : 1° que la surface de la zône BB', DD' soit égal au tiers de la surface de l'hémisphère ; 2° Que l'on ait $\overline{EC}^2 = OC \times HE$. Le rayon OCEH est perpendiculaire sur la base de l'hémisphère.

II. Définir le jour solaire vrai et le jour sidéral, montrer ensuite que le premier est plus grand que le second et faire connaître une valeur approchée de la différence entre ces deux jours.

21 juillet. — I. Décomposer en un produit de facteurs du premier degré l'expression

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Rép. $(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b)(a + b + c)$.

II. Un triangle équilatéral est situé dans un plan passant par la ligne de terre et faisant un angle de 60° avec le plan horizontal; connaissant les projections horizontales de deux de ses sommets, construire la projection horizontale du troisième sommet.

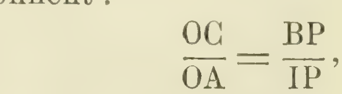
(A suivre.)

QUESTION 174

Solution par M. Pierre Chazeau, de Thiers (Puy-de-Dôme).

Soit O *un cercle; on considère, dans ce cercle, un diamètre fixe* AB *et le diamètre perpendiculaire* Δ. *Ayant pris un point* M, *mobile sur* O, *on joint* MA *et* MB. — MA *rencontre* Δ *en* C. *Si par* C *on mène une parallèle à* AB, *elle rencontre* MB *en un certain point* I. — *Démontrer que le lieu décrit par* I *est une parabole.* (G. L.)

Du point I j'abaisse la perpendiculaire IP sur BA. Les triangles semblables BIP, OCA donnent :



$$\frac{OC}{OA} = \frac{BP}{IP},$$

d'où $\overline{IP}^2 = R \times BP$.

Cette relation montre que le lieu du point I est une parabole dont le sommet est en B, dont l'axe est BA et qui passe par K; conditions qui la déterminent complètement.

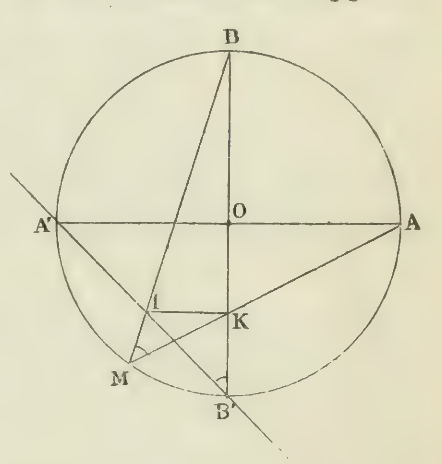
Nota. — Solutions diverses par MM. Rogier; Couade; Chapron; Henri Martin, au lycée Condorcet; L. Prince et G. Bourdier, élèves au lycée de Grenoble.

QUESTION 176

Solution par M. Giovanni Russo, à Catanzaro.

On donne un cercle Γ *et deux rayons rectangulaires* OA. OB; *soit* M *un point mobile sur* Γ : MA *rencontre* OB *en* K; *la perpendiculaire élevée au point* K *à la droite* OB *rencontre* MB *en un point* I. — *Démontrer que le lieu décrit par le point* I *est une droite.* (G. L.)

Il est visible que les points A′, B′ diamétralement opposés aux points A et B, font partie du lieu. Il faut donc prouver que le lieu du point I est la droite A′B′. En effet, soit I un point du lieu ; alors les quatre points I, K, B′, M étant sur une même circonférence, l'angle KB′I = KMI. Mais l'angle KMI est égal à la moitié d'un angle droit ; donc le point I se trouve sur la droite A′B′ ; cette droite constitue donc le lieu demandé



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lacombe, élève au lycée de Périgueux; Chapron; Couade; Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua; Rogier; L. Prince, élève au lycée de Grenoble; A. Fitz-Patrick, élève au lycée de Poitiers; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; G. Bourdier, au lycée de Grenoble.

QUESTION 177

Solution par M. L. Prince, élève au Lycée de Grenoble.

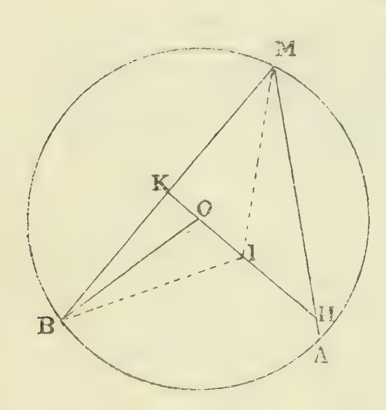
Soient A *et* B *deux points fixes sur un cercle donné* Γ *de centre* O ; *on prend sur* Γ *un point mobile* M *que l'on joint aux points* A *et* B. *La perpendiculaire abaissée du centre* O *sur* MB

rencontre les cordes MA, MB *en deux points* H *et* K; *démontrer que le lieu décrit par le milieu de* HK *est une circonférence.*

(G. L.)

Soit I le milieu de HK, joignons IB, IM,

$$\widehat{OIB} = KIM.$$



L'angle $\widehat{BMA}$ étant constant, le triangle KMH reste semblable à lui-même et la médiane MI fait un angle constant avec le côté KH. L'angle $\widehat{OIM} = \widehat{OIB}$ étant invariable, le lieu du point I est un segment de cercle décrit sur OB. Si M décrit toute la circonférence Γ, I décrira la circonférence OIB complète.

On peut observer que si I au lieu d'être le milieu de HK, divisait HK dans un rapport donné, le lieu de I serait encore une circonférence.

Nota. — Solutions analogues par MM. Rogier; Chapron; Henri Martin, élève du lycée Condorcet; G. Bourdier, du lycée de Grenoble.

M. Chapron généralise la question en supposant que la droite HK est abaissée obliquement sur MB, mais sous un angle constant.

M. H. Martin fait observer que le centre de gravité, le centre du cercle inscrit, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit du triangle MHK décrivent des circonférences (*Question du concours de troisième*, 1885).

QUESTION 178

Solution par M. E. Vigarié.

Démontrer que si d *est la distance du centre du cercle circonscrit du triangle* ABC, *au point de concours des droites qui joignent les sommets aux points de contact des cercles ex-inscrits et si* R *et* r *sont les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit on a :*

$$\frac{d}{2} = \frac{R}{2} - r. \ (*)$$

(*) Énoncé rectifié.

Le point I'_1 de concours des droites qui joignent les sommets du triangle au point de contact des cercles ex-inscrits, ou *point de Nagel* est le centre du cercle inscrit au triangle $A'_1B'_1C'_1$ formé en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés opposés. Le centre du cercle circonscrit de ABC est le centre du cercle des neuf points *(cercle d'Euler)* de $A'_1B'_1C'_1$. Si R' et r' sont les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit à ce dernier triangle on a la relation connue :

$$\frac{d}{2} = \frac{R'}{4} - \frac{r'}{2} = \frac{R}{2} - r.$$

Cette formule n'est pas nouvelle. Elle a été donnée pour la *première fois*, croyons-nous, par M. Nagel dans un travail intitulé : *Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise* (Leipzig 1836). En 1864 elle a été donnée de nouveau par M. F.-J. Harnischmacher (*Archives de Grunert*, t. XLII). Enfin en 1871, M. Ad. Hochheim (*Archives de Grunert*, t. LII) dans une note ayant pour titre : « *Ueber den fünften merkwürdigen Punkt* » a donné pour d la valeur suivante:

$$d^2 = R^2\Big[\big\{\sin(A - B) - 2\sin A + 2\sin B\big\}^2$$
$$+ \big\{\sin A \sin B - 2\cos A\cos B - 2 + 2(\cos A + \cos B)\big\}^2\Big].$$

Cette formule est plus compliquée et moins élégante que les précédentes.

QUESTION 181

Solution par M. A. Drago, au Lycée de Marseille.

Résoudre les équations

$$x^2 - yz = a^2,$$
$$y^2 - xz = b^2,$$
$$z^2 - xy = c^2,$$

en déduisant de celles-ci deux équations du premier degré.

Élevons la première au carré et retranchons de ce carré le produit des deux autres. Il vient, en mettant x en facteur commun :

$$x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = a^4 - b^2c^2, \qquad (1)$$

on aurait de même

$$y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = b^4 - a^2c^2, \qquad (2)$$
$$z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = c^4 - a^2b^2. \qquad (3)$$

Divisons les équations (1) et (2) membre à membre ainsi que les équations (1) et (3), nous obtiendrons les deux équations du premier degré :

$$\frac{x}{a^4 - b^2c^2} = \frac{y}{b^4 - a^2c^2} = \frac{z}{c^4 - a^2b^2}.$$

Élevons la première de ces fractions au carré, et retranchons de ce carré le produit des deux autres, nous avons

$$\frac{x^2}{(a^4 - b^2c^2)^2} = \frac{a^2}{(a^4 - b^2c^2)^2 - (b^4 - a^2c^2)(c^4 - a^2b^2)}.$$

Effectuant, et divisant par a^2, il vient

$$\frac{x^2}{(a^4 - b^2c^2)^2} = \frac{1}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2},$$

d'où

$$x^2 = \frac{(a^4 - b^2c^2)^2}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}.$$

On aurait de même

$$y^2 = \frac{(b^4 - a^2c^2)^2}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}$$

$$z^2 = \frac{(c^4 - a^2b^2)^2}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}.$$

Nota. — Cette solution, la meilleure que nous ayions reçue, exigerait encore certains compléments. Les valeurs des inconnues ne sont pas discutées. Pour établir cette discussion, il fallait observer que

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\left\{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2\right\}.$$

Solutions par MM. Durand, élève au collège de Perpignan; Naudin, élève au lycée Charlemagne (classe de M. Richard); Ch. Costa, élève à l'école Albert-le-Grand (Arcueil); Henri Martin, lycée Condorcet et J. Chapron.

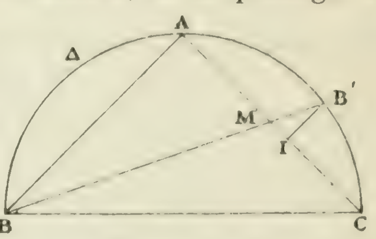
QUESTION 185

Solution et **Généralisation** par M. J. Chapron.

On donne un demi-cercle Δ *décrit sur le diamètre* BC *et l'on considère le triangle rectangle isoscèle* BAC *inscrit dans ce cercle. Soit* M *le milieu du côté* AC; *la droite* BM *rencontre* Δ *en* B'.

On propose de démontrer que B′ *est trois fois plus éloigné de* AB *que de* AC. (G. L.)

Les autres conditions restant les mêmes, si M partage le côté AC dans le rapport $\frac{AM}{MC} = n$, le rapport des distances du point B′ aux côtés AB, AC sera $\frac{AI}{B'I} = 2n + 1$ (I est le pied de la perpendiculaire abaissée de B′ sur AC).



On a d'abord

$$BM.B'M = AM.CM = n.\overline{MC}^2.$$

Divisons par $\overline{BM}^2$; nous avons alors

$$\frac{B'M}{BM} = n\frac{\overline{MC}^2}{\overline{BM}^2} = n\frac{\overline{MC}^2}{\overline{AB}^2 + \overline{AM}^2} = \frac{MI}{AM}.$$

Mais

$$\frac{MC}{AC} = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{AM}{AC} = \frac{n}{n+1}.$$

Donc

$$\frac{MI}{AM} = \frac{n}{n^2 + (n^2+1)^2}, \quad \frac{MI}{AM + MI} = \frac{MI}{AI} = \frac{n}{(n+1)(2n+1)}.$$

De plus, les triangles rectangles semblables B′IM, ABM, donnent :

$$\frac{B'I}{MI} = \frac{AB}{AM} = \frac{n+1}{n}.$$

Donc

$$\frac{B'I}{AI} = \frac{B'I}{MI}.\frac{MI}{AI} = \frac{1}{2n+1}.$$

En particulier, si $n = 1$,

$$AI = 3.B'I.$$

Nota. — Solutions par MM. L. Prince, élève au lycee de Grenoble; Giovanni Russo à Catanzaro; N. Gr. Balanesco (Focsiani, Roumanie); Georges Caye, élève au lycée Charlemagne (classe de M. Richard); Emile Vigarié, élève à l'école des Mines; Henri Martin, élève au lycée Condorcet; G. Bourdier, élève au lycée de Grenoble; Edmond Bordage, professeur au collège de Nantua.

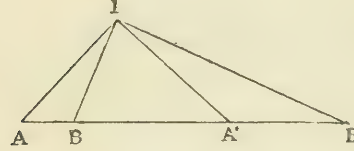
QUESTION 189

Solution par M. Louis Prince, élève de Mathématiques élémentaires au Lycée de Grenoble.

Soient ABA′B′ *quatre points en ligne droite, trouver le lieu des points* I *d'où les segments* AB *et* A′B′ *sont vus sous le même angle.*

(*Saint-Cyr, examens oraux, 1884.*

Les triangles AIB, A′IB′ ont même hauteur et même angle au sommet, donc



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{IA.IB}{IA'.IB'}.$$

Pour les triangles AIA′, BIB′, on a de même

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{IA.IA'}{IB.IB'}.$$

D'où en multipliant membre à membre

$$\frac{\overline{IA}^2}{\overline{IB'}^2} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AA'}{BB'}.$$

Le rapport $\frac{IA}{IB'}$ étant constant, le lieu de I est une circonférence que l'on construit comme l'on sait.

On déterminerait de la même façon le lieu d'où l'on voit deux segments AB A′B′ en ligne droite sous des angles supplémentaires.

Nota. — Autre solution par M. Vigarié qui observe que le lieu géométrique en question peut servir à résoudre le problème suivant : trois segments AA′, BB′, CC′ en ligne droite étant donnés trouver les points d'où ces segments sont vus sous le même angle.

QUESTIONS PROPOSÉES

229. — On donne, dans un plan, un angle xCy et un point A. Par les points A, C, on fait passer deux circonférences. Soient E, F, puis G, H les points où elles coupent, respectivement, les côtés de l'angle. Sur CE et CH, on construit le parallélogramme ECHP. Sur CF et CG, on construit le parallélogramme FCGQ. Cela posé : 1° la droite PQ est perpendiculaire à la droite de Simson, relative aux données ; 2° elle passe au point de concours des cordes EF, GH.

(Catalan.)

230. — Démontrer que dans un triangle ABC les milieux des droites qui joignent deux à deux le *point de Nagel* et ses *points algébriquement adjoints* sont six points d'une même circonférence qui passe par les sommets du triangle obtenu en menant par les sommets de ABC des parallèles aux côtés opposés.

(E. Vigarié.)

N.-B. — Le point de Nagel est le réciproque du point de Gergonne et celui-ci s'obtient en joignant les sommets du triangle aux points de contact du cercle inscrit.

Nous rappelons aussi que les points algébriquement adjoints d'un point donné sont ceux qui admettent les mêmes coordonnées, *au signe près*.

G. L.

231. — Lorsqu'un cercle mobile Δ passe par le centre de gravité d'un triangle ABC, la somme des puissances des points A, B, C, par rapport à Δ, est constante et égale à

$$\frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2}{3}.$$

Démontrer cette remarque et la généraliser.

(G. L.)

232. — Si on ajoute, terme à terme, m progressions géométriques, la suite U obtenue est récurrente ; c'est-à-dire, qu'à partir du terme de rang $m + 1$, les autres sont fournis par une fonction des m précédents ; cette fonction est linéaire.

(Boutin.)

Nota. — La question proposée par M. Boutin, et c'est un signalement qu'il nous a lui-même donné, est une généralisation de la question 8 (*J. M. E.*, 1877, p. 31). On pourra se borner, pour plus de facilité, à prendre le cas de *trois* progressions géométriques et l'on montrera que, pour des valeurs convenables des paramètres α, β, γ, δ, on a

$$\alpha u_p + \beta u_{p-1} + \gamma u_{p-2} + \delta u_{p-3} = 0,$$

quel que soit le nombre entier p; u_{p-1}, u_{p-2}, u_{p-3}, désignant quatre termes consécutifs de la suite U.

G. L.

233. — Étant données deux circonférences O et O′, on mène les rayons OA, O′B qui se coupent en C, sous un angle constant, et l'on demande le lieu géométrique du milieu **M** de la droite AB.

(A. Fitz-Patrick.)

234. — Montrer que la somme des surfaces de tous les triangles formés, chacun avec les médianes du précédent, le triangle ABC étant le premier d'entre eux, a pour limite le quadruple de la surface de ce triangle ABC.

(G. Russo, à Catanzaro.)

235. — Si A, B, C sont les angles d'un triangle, on a

$$1 + \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{B}{2}\right) + \sin\left(A + \frac{C}{2}\right)$$
$$= 4 \cos\frac{B - A}{4} \cos\frac{C - B}{4} \cos\frac{A - C}{4}.$$

(Boutin.)

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

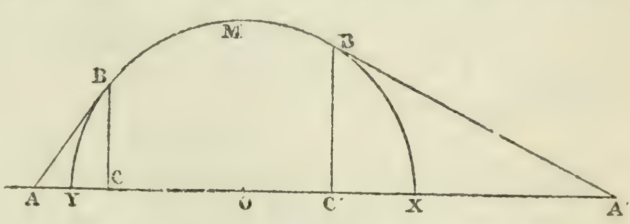
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21806-6.

RÉSOLUTION DU SYSTÈME
DE DEUX INÉGALITÉS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

Par M. **E. Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

(*Suite*, voir p. 241.)

1re QUESTION. — *Étant donnés la longueur* AA′ = d *et le rayon* R *d'une circonférence donnée en position, déterminer sur le diamètre* XY *les points* A, A′, *tels qu'en menant par ces points les tangentes* AB, A′B′ *la surface engendrée par* ABMB′A″A′ *en tournant autour de* XY *soit égale à* $4m\pi R^2$



(On suppose $d > 2R$ et O entre A et A′).

Soient $AO = x$ $OA' = y$, les équations du problème sont :

$$x + y = d$$

$$2\pi R\left(\frac{R^2}{x} + \frac{R^2}{y}\right) + \pi\frac{R}{x}(x^2 - R^2) + \pi\frac{R}{y}(y^2 - R^2) = 4m\pi R^2$$

d'où l'on déduit

$$xy = \frac{R^2 d}{4mR - d}.$$

La somme et le produit des inconnues étant connus, le problème est donc résolu par l'équation :

$$z^2 - dz + \frac{R^2 d}{4mR - d}.$$

Discussion. — D'après l'énoncé de la question, x et y sont des quantités positives, par conséquent, on a $xy > 0$, ce qui conduit à la condition $d < 4mR$; et la condition de réalité des racines de l'équation en z est :

$$d^2 - \frac{4R^2 d}{4mR - d} \geqslant 0$$

ou $$d^2 - 4mRd + 4R^2 \leqslant 0. \qquad (1)$$

Ce qui exige 1° que les racines d', d'' de l'équation obtenue en égalant ce trinôme à zéro, soient réelles,

ou $$m > 1.$$

2° que d soit compris entre d' et d''. Or, on a déjà $d < 4mR$; il faut donc reconnaître l'ordre de grandeur des trois quantités d', d'', $4mR$; la substitution de $4mR$ dans le trinôme (1) donne $+ 4R^2$, et $4mR$ étant supérieur à la demi-somme des racines d', d'' on a

$$d' < d'' < 4mR.$$

Enfin, d'après l'enoncé, on doit avoir $d > 2R$; or la substitution de $2R$ dans la trinôme donnant un résultat négatif, on a $d' < 2R < d''$, donc la condition algébrique du problème se réduit à $d < d''$, à laquelle on doit joindre la condition imposée *à priori*

$$d < 2R.$$

D'autre part, les considérations géométriques prouvent que les racines de l'équation en z doivent être supérieures à R, et puisque l'on a $\frac{d}{2} > R$, il suffit et il est nécessaire que la substitution de R à z, dans le premier membre de cette équation, donne un résultat positif, ce qui conduit à l'inégalité :

$$d^2 - 4mRd + 4mR^2 > 0. \qquad (2)$$

En égalant ce trinôme à zéro on obtient deux racines réelles d_1, d_2; nous supposons $d_1 < d_2$. Or le cofficient de d étant le même dans les trinômes (1) et (2) et $4mR^2$ étant supérieur à $4R^2$, puisque $m > 1$, on a $d' < d_1 < d_2 < d''$ et la solution du système des inégalités (1) et (2) est : $d' < d < d_1$ ou $d_2 < d < d''$; mais $2R$ substitué à d, dans le trinôme (2) donnant un résultat négatif, les inégalités $d < d_1$, $d > 2R$ seraient contradictoires, puisque $2R > d_1$, donc les conditions du problème se réduisent à :

$$d_2 < d < d''.$$

Ainsi, en résumé, le problème admet une solution et une seule à la condition que l'on ait :

$$2R(m + \sqrt{m^2 - m}) < d < 2R(m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

2e Question. — *Déterminer les trois côtés d'un triangle connaissant son périmètre* 2p, *la somme* a^2 *des carrés des côtés et sachant*

que le double produit de deux côtés est égal au produit leur somme par le troisième côté.

x, y, z, désignant les trois côtés du triangle, les équations du problème sont

$$x + y + z = p,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$2xy = z(x + y).$$

Élevant au carré la première et retranchant de l'équation obtenue la seconde, on a :

$$4p^2 - a^2 = 2xy + 2z(x + y) = 3z(x + y).$$

Remplaçant $x + y$ par $2p - z$ dans cette dernière relation, on a l'équation suivante déterminant z :

$$3z^2 - 6pz + 4p^2 - a^2 = 0, \qquad (1)$$

z étant connu, d'après les relations

$$x + y = 2p - z,$$
$$xy = \frac{z(2p - z)}{2}.$$

x et y sont les racines de l'équation :

$$X^2 - X(2p - z) + \frac{z(2p - z)}{2} = 0, \qquad (2)$$

Discussion. — La demi-somme des racines de l'équation en z étant p, seule, la plus petite racine de cette équation peut convenir si elle est réelle et positive, ce qui conduit aux conditions:

$$p < a < 2p.$$

D'autre part, la condition de réalité de x et y est

$$z < \frac{2p}{3};$$

donc la substitution de $\frac{2p}{3}$ à z dans le premier membre de l'équation (1) doit donner un résultat négatif, puisque $\frac{2p}{3}$ est inférieur à p, demi-somme des racines de cette équation, ce qui conduit à cette nouvelle condition :

$$\frac{4p^2}{3} - a^2 < 0$$

ou
$$a > \frac{2p}{\sqrt{3}}.$$

On aura donc, *a fortiori* $a > p$, c'est-à-dire que les nouvelles limites de a sont
$$\frac{2p}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad 2p.$$

De l'inégalité $z < \frac{2p}{3}$, résulte que si x désigne le plus grand des deux autres côtés, on doit avoir $x < p$ et $y > \frac{p}{3}$, donc les résultats de la substitution de p et de $\frac{p}{3}$ à X dans le premier membre de l'équation (2) doivent être tous deux positifs, ce qui donne
$$\begin{cases} -2p^2 + 4pz - z^2 > 0, \\ -10p^2 + 24pz - 9z^2 > 0, \end{cases}$$
ou
$$z > \frac{2p^2 + a^2}{6p}, \quad \text{et} \quad z > \frac{3a^2 - 2p^2}{6p}, \qquad (3)$$
en se servant de la relation $3z^2 = 6pz + a^2 - 4p^2$; et ce qui est suffisant, puisque l'on a certainement :
$$\frac{p}{3} < \frac{2p - z}{2} < p.$$

Or, pour satisfaire aux inégalités (3) 1° Il faut que chacune des deux quantités $\frac{2p^2 + a^2}{6p}$, $\frac{3a^2 - 2p^2}{6p}$ soit inférieure à p, ce qui a toujours lieu pour la première, d'après la condition $a < 2p$, et ce qui exige que l'on ait, pour la seconde,
$$a < 2p\sqrt{\frac{2}{3}},$$
de sorte que les nouvelles limites de a sont renfermées dans les inégalités :
$$\frac{4p^2}{3} < a^2 < \frac{8p^2}{3},$$
ou
$$\frac{2p}{\sqrt{3}} < a < 2p\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2° Il faut que les résultats de la substitution de ces mêmes quantités à z dans le premier membre de l'équation (1) soient

positifs, ce qui conduit aux deux inégalités :

$$a^4 - 20a^2p^2 + 28p^4 > 0,$$
$$9a^4 - 60a^2p^2 + 76p^4 > 0.$$

Il reste donc à reconnaître l'ordre de grandeur des six quantités $\frac{4p^2}{3}$, $\frac{8p^2}{3}$ et les racines des deux équations

$$\left.\begin{array}{r} a^4 - 20a^2p^2 + 28p^4 = 0 \\ 9a^4 - 60a^2p^2 + 76p^4 = 0 \end{array}\right\}, \qquad (4)$$

dans lesquelles on regardera a^2 comme inconnue. Or $\frac{4p^2}{3}$ substitué à a^2 dans chacun de ces trinômes donne des résultats positifs et puisque l'on a

$$\frac{4p^2}{3} < 10p^2 \quad \text{et} \quad \frac{4p^2}{3} < \frac{30p^2}{9}$$

$\frac{4p^2}{3}$ est inférieur aux racines des équations (4).

Au contraire, $\frac{8p^2}{3}$ substitué à a^2 dans ces mêmes trinômes donne des résultats négatifs, donc $\frac{8p^2}{3}$ est compris entre les racines des équations (4).

Enfin, en se reportant au tableau précédent (*) et en représentant $-\frac{20p^2}{3}$ par p, et $-20p^2$ par p', la valeur qui rend ces deux trinômes égaux est $\frac{22p^2}{15}$, valeur inférieure à $\frac{10p^2}{5}$; d'ailleurs la substitution de $\frac{22p^2}{15}$ à a^2, dans l'un de ces trinômes, donne un résultat positif; donc, si α', β' désignent les racines de l'équation

$$a^4 - 20a^2p^2 + 28p^4 = 0.$$

et α, β, celles de l'équation

$$9a^4 - 60a^2p^2 + 76p^4 = 0.$$

on a les inégalités

$$\frac{4p^2}{3} < \alpha' < \alpha < \frac{8p^2}{3} < \beta < \beta'.$$

(*) Voyez p. 243.

Or a^2 ne peut être supérieur à β', car on doit avoir $a^2 < \frac{8p^2}{3}$, par conséquent les conditions du problème sont

$$\frac{4p^2}{3} < a^2 < \alpha',$$

ou

$$\frac{4p^2}{3} < a^2 < p^2\left(10 - 6\sqrt{2}\right),$$

ou

$$\frac{2p}{\sqrt{3}} < a < p\sqrt{10 - 6\sqrt{2}};$$

et elles sont suffisantes, car, comme il est facile de le voir, chacun des côtés est moindre que la somme des deux autres; en outre, le problème n'admet qu'une seule solution.

GÉNÉRALITÉS SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

LES POINTS RÉCIPROQUES ET LES POTENTIELS D'ORDRE p

Par M. **G. de Longchamps**.

(*Fin*, voir p. 243.)

33. Examen d'un cas particulier d'une droite et d'un point associés. — A propos de ces points et droites associés dont nous venons de parler, nous signalerons un cas particulier qui nous semble remarquable par les conséquences multiples qu'il nous paraît avoir.

Considérons une droite μ représentée par l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \qquad (1)$$

puis, associons lui un point M dont les coordonnées soient proportionnelles à

$$\frac{a^2}{A(B - C)}, \quad \frac{b^2}{B(C - A)}, \quad \frac{c^2}{C(A - B)}. \qquad (2)$$

L'équation du cercle Γ circonscrit au triangle de référence étant

$$a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\beta\alpha = 0,$$

on voit d'abord que M est toujours situé sur Γ; parce que

l'on a

$$a^2b^2c^2\sum\frac{1}{\mathrm{BC}(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{A}-\mathrm{B})}=0.$$

Ainsi, à toute droite remarquable μ, jetée dans le plan d'un triangle, correspondra, par une certaine loi géométrique qui nous reste à déterminer, un point remarquable situé sur le cercle circonscrit. Voici quelle est cette loi géométrique.

Soit A′ le point où μ rencontre le côté BC; la parallèle à μ, menée par A, recontre Γ en A″; la droite A′A″ et les droites analogues B′B″, C′C″ rencontrent Γ en un même point, qui est précisément M (*).

Cette proposition se démontre très simplement par les considérations les plus élémentaires. En cherchant la solution analytique qu'elle comporte, on tombe sur les formules d'association que nous venons d'indiquer; elles fournissent, en nombre indéfini, des points remarquables du triangle, situés sur le cercle circonscrit.

Par exemple, prenons la droite δ correspondant à l'équation

$$a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma=0.$$

Cette droite est la transversale réciproque de la droite de Lemoine et nous l'avons signalée dans notre note *sur un cercle remarquable du plan d'un triangle* (**). On trouve alors que le point qui lui est associé, d'après la loi que nous venons de faire connaître, est celui dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles à

$$\frac{1}{b^2-c^2},\qquad\frac{1}{c^2-a^2},\qquad\frac{1}{a^2-b^2};$$

c'est le point de Steiner.

34. Remarque relative aux points remarquables situés sur la circonférence circonscrite. — Par la remarque précédente nous avons voulu montrer un exemple de correspondance *de point à droite*, dans la géométrie du

(*) Ce théorème n'est pas nouveau; il a été proposé, il y a quelques années, par M. McKenzie dans l'*Educational times*, question 6871, et démontré : d'abord, dans le vol. XL (p. 66) ; puis, dans le volume XLIII 1885 p. 109) de *Mathematical questions and solutions.*

(**) *Journal de M. S.* (1886, p. 57).

triangle; et, dans cette intention, nous avons pris une droite et un point précédemment reconnus et étudiés, pour que l'application soit plus frappante. Mais n'est-il pas juste de dire que la simple observation que nous avons faite et qui se trouve résumée dans les formules (1) et (2), d'une part, et dans le théorème géométrique, ci-dessus énoncé, d'autre part, double les propriétés du triangle? Le plan d'un triangle est, si l'on peut dire, *constellé* de points remarquables. Parmi ces points, il en est, en nombre indéfini, qui appartiennent à la circonférence circonscrite à ce triangle. Les formules (2) permettront de les découvrir; l'équation (1) donnera les droites qui leur correspondent; enfin, le théorème de M. McKenzie permettra de trouver ces points, si l'on sait construire les droites correspondantes.

Il faut pourtant observer que si, dans la correspondance que nous venons de signaler, à une droite μ ne correspond qu'un seul point M, la réciproque n'est pas exacte. C'est ce que nous allons montrer.

Observons d'abord que les équations

$$\frac{A(B-C)}{\dfrac{a^2}{\alpha'}} = \frac{B(C-A)}{\dfrac{b^2}{\beta'}} = \frac{C(A-B)}{\dfrac{c^2}{\gamma'}} = \lambda.$$

ne sont compatibles que si le point M $(\alpha', \beta', \gamma')$ est situé sur la circonférence circonscrite au triangle; nous supposerons cette condition remplie.

En considérant A, B, C, comme les inconnues qui doivent être tirées de ces égalités, on a

$$(\mathrm{H}) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{B} = \lambda\,\dfrac{a^2}{\alpha'}, \\[2ex] \dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{C} = \lambda\,\dfrac{b^2}{\beta'}, \\[2ex] \dfrac{1}{B} - \dfrac{1}{A} = \lambda\,\dfrac{c^2}{\gamma'}. \end{cases}$$

La droite μ a une transversale réciproque μ_0 dont l'équation est

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0,$$

et, d'après les formules (H), cette équation peut s'écrire

$$\frac{1}{C}(\alpha + \beta + \gamma) + \lambda\left(\frac{b^2\alpha}{\beta'} - \frac{a^2\beta}{\alpha'}\right) = 0.$$

D'après cela, μ_0 est parallèle à la droite qui est représentée par l'équation

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} = \frac{\beta\beta'}{b^2}.$$

Nous pouvons conclure de là que, si l'on prend sur le cercle circonscrit Γ un point quelconque M, et si l'on considère le point inverse M_2 (point situé à l'infini), une droite quelconque passant par M_2 a pour transversale réciproque une droite qui fournit le point M, quand on lui applique le théorème de McKenzie.

En résumé : 1° toute droite remarquable située dans le plan d'un triangle donne, par application des idées que nous venons d'exposer dans ce paragraphe, naissance à un point remarquable du cercle circonscrit; 2° tout point remarquable situé sur le cercle circonscrit peut être déterminé : par la considération du point inverse, et, en appliquant le théorème de McKenzie à la transversale réciproque d'une droite quelconque passant par ce point.

35. Les associations irrationnelles. — Nous n'avons pas, dans les considérations diverses que nous avons développées et que nous allons résumer tout à l'heure, touché à une idée plus délicate mais dont nous devons pourtant dire un mot, au moment de quitter le sujet qui a fait l'objet de cette note.

La transformation à laquelle nous faisons allusion ici est celle dans laquelle on associe, à des nombres donnés, d'autres nombres liés à ceux-ci par des formules renfermant les symboles irrationnels. En suivant le parallélisme des idées exposées dans les paragraphes précédents on voit que la difficulté que nous soulevons maintenant est celle qui correspond, notamment, à l'opération arithmétique de la racine carrée. Nous avons associé jusqu'ici, à des éléments donnés, ceux qui en dérivent par les procédés de l'addition ou de la soustraction, de la multiplication ou de la division; pourquoi,

obéissant une pente naturelle, ne pas considérer aussi les éléments A′, B′, C′ associés aux quantités A, B, C au moyen des formules

$$\frac{A'}{\pm\sqrt{A}} = \frac{B'}{\pm\sqrt{B}} = \frac{C'}{\pm\sqrt{C}}.$$

Cette idée s'ajoute, bien naturellement, à celles que nous avons exposées jusqu'ici et complète le parallèle que nous avons poursuivi entre les opérations élémentaires de l'arithmétique et les associations correspondantes dans la géométrie du triangle; mais cette association nouvelle que nous imaginons ici n'est plus *uniforme* comme celles que nous avons envisagées précédemment; elle est *complexe*, si nous voulons exprimer par là qu'à un point donné correspondent plusieurs points; il est vrai que, dans l'exemple qui nous occupe, ils sont algébriquement adjoints.

Quoi qu'il en soit, voici comment on peut déterminer les points (A′, B′, C′) qui correspondent au point donné (A, B, C).

Nous ferons d'abord une remarque. *Soient quatre points en ligne droite* A, B, C, D *et tels que l'on ait*

$$\overline{AC}^2 = AB.AD\,; \qquad (1)$$

on a aussi

$$\left(\frac{BC}{CD}\right)^2 = \frac{AB}{AD}, \qquad (2)$$

et réciproquement.

En effet, l'égalité (2) peut s'écrire

$$(AC - AB)^2 AD = (AD - AC)^2 AB,$$

ou

$$\overline{AC}^2.AD + \overline{AB}^2.AD = \overline{AD}^2.AB + \overline{AC}^2.AB,$$

ou encore

$$\overline{AC}^2(AD - AB) = AD.AB(AD - AB)\,;$$

c'est-à-dire

$$\overline{AC}^2 = AD.AB.$$

La réciproque est manifestement vraie, puisque l'on peut remonter de la dernière égalité à la première. Au fond, et sous une forme un peu plus simple, cette remarque se confond avec celle que nous avons faite précédemment (§ 16, p. 201).

Cela posé, prenons un point M (A, B, C) dans l'intérieur

du triangle de référence, de telle sorte que les coordonnées A, B, C de ce point soient positives, et soit μ la droite harmoniquement associée, laquelle coupe les côtés du triangle de référence en trois points P, Q, R. Le point P étant situé sur le côté BC de ce triangle il existe, entre B et C, un point P′ tel que

$$\overline{PP'}^2 = PB.PC,$$

et il n'en existe qu'un seul.

On obtient ainsi, sur les côtés de ABC trois points P′,Q′,R′ et, d'après la remarque faite tout à l'heure, nous avons

$$\left(\frac{P'B}{P'C}\right)^2 = \frac{PB}{PC}.$$

En appliquant cette observation aux trois points P′,Q′,R′, on voit que les trois droites AP′, AQ′, AR′ concourent en un certain point M′. Il reste à déterminer les coordonnées de ce point M′.

Or PQR étant la transversale harmoniquement associée au point (A, B, C) on a, en valeur absolue,

$$\frac{PB}{PC} = \frac{C}{B},$$

et, par suite,

$$\frac{P'B}{P'C} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{B}}.$$

Les coordonnées de M′ sont donc

$$\sqrt{A}, \quad \sqrt{B}, \quad \sqrt{C},$$

les radicaux étant pris avec le signe +; les trois autres points qui correspondent à M, se déduisent d'ailleurs de M′ comme nous l'avons dit plus haut (§ 10), puisqu'ils sont algébriquement adjoints à celui-ci.

36. Le demi-potentiel. — Par exemple, veut-on déterminer le point remarquable ρ qui, dans le triangle ABC, a pour coordonnées

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{b}, \quad \sqrt{c};$$

on opère de la manière suivante. Par les pieds P,Q,R des bissectrices extérieures, on mène au cercle circonscrit des tangentes Pp, Qq, Rr et l'on rabat Pp sur PBC en PP′; les droites AP′, BQ′, CR′ concourent au point cherché ρ.

37. Les points supplémentaires. — Depuis que cet article est écrit, j'ai eu connaissance, au congrès de Nancy, des points que M. Neuberg propose d'appeler *points supplémentaires*. Ces points ne sont autre chose que les points complémentaires, lorsqu'on se place dans le système des coordonnées normales.

Si l'on appelle x, y, z les quantités proportionnelles aux distances d'un point M aux côtés du triangle de référence, les coordonnées du point supplémentaire M′ sont proportionnelles à

$$y + z, \quad z + x, \quad x + y.$$

Il y a aussi, naturellement, l'*antisupplémentaire* de M, c'est le point M″ représenté par

$$y + z - x, \quad z + x - y, \quad x + y - z.$$

Un seul terme (que l'on adopte le mot de complémentaire ou celui de supplémentaire) suffirait d'ailleurs pour représenter le point M′; il faudrait seulement expliciter dans le langage le système de coordonnées que l'on emploie. ce qui ne paraît pas offrir d'inconvénient. Dans tous les cas, et nous avons déjà insisté sur ce point, que la distinction soit faite par le mot qu'a proposé M. Neuberg, ou par la déclaration du système de coordonnées que l'on emploie, elle est absolument nécessaire.

38. Résumé. — Nous pouvons maintenant résumer les idées générales que nous venons d'exposer.

Prenons un tableau formé par les trois lettres

$$\mathbf{A, B, C,} \qquad (1)$$

et supposons qu'elles représentent, dans un système bien défini, dans le système barycentrique par exemple, les coordonnées d'un point M. A toute opération algébrique effectuée avec les nombres (1) correspondent de nouveaux nombres et ceux-ci peuvent encore représenter les coordonnées d'un certain point M′. De cette observation, toute évidente, découle cette conséquence qu'à un point remarquable d'un triangle on peut associer indéfiniment d'autres points remarquables.

C'est alors, en se plaçant au point de vue général que nous venons de définir, qu'on doit se demander quelles sont les

opérations arithmétiques les plus simples que l'on puisse effectuer sur trois nombres donnés. Il est, en effet, naturel de penser que de semblables opérations doivent conduire à la détermination de points qui *dérivent* d'un point donné par des lois géométriques, lesquelles bénéficiant nécessairement de la simplicité apportée aux transformations algébriques auxquelles nous faisons allusion, déterminent, dans le plan du triangle de référence, la situation du point M′, associé au point M.

Or, du tableau (1), on peut déduire les suivants :

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{A}, & -\mathbf{B}, & +\mathbf{C}, \\ \mathbf{A}, & +\mathbf{B}, & -\mathbf{C}, \\ \mathbf{A}, & -\mathbf{B}, & -\mathbf{C}. \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}, \quad \mathbf{C}+\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}+\mathbf{B}. \qquad (3)$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}-\mathbf{A}, \quad \mathbf{C}+\mathbf{A}-\mathbf{B}, \quad \mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{C}. \qquad (4)$$

$$\mathbf{B}-\mathbf{C} \qquad \mathbf{C}-\mathbf{A} \qquad \mathbf{A}-\mathbf{B} \qquad (5)$$

$$\begin{matrix} \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A} \\ \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \end{matrix} \quad (6) \qquad \Bigg| \qquad \begin{matrix} \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B} \\ \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C} \\ \mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{A} \end{matrix} \quad (6')$$

ou,

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{BC}. & \mathbf{CA}. & \mathbf{AB} \\ \frac{1}{\mathbf{A}}, & \frac{1}{\mathbf{B}}, & \frac{1}{\mathbf{C}} \end{matrix}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{\mathbf{B}}, & \frac{1}{\mathbf{C}}, & \frac{1}{\mathbf{A}} \\ \frac{1}{\mathbf{C}}. & \frac{1}{\mathbf{A}}. & \frac{1}{\mathbf{B}} \end{matrix}\right\} \qquad (8)$$

$$\mathbf{A}^p. \qquad \mathbf{B}^p, \qquad \mathbf{C}^p \qquad (9)$$

$$\pm\sqrt{\mathbf{A}}, \qquad \pm\sqrt{\mathbf{B}}, \qquad \pm\sqrt{\mathbf{C}} \qquad (10)$$

Dans ce tableau se trouvent résumés, les opérations algébriques simples que l'on peut effectuer avec trois nombres donnés; et, en acceptant la terminologie adoptée dans ce travail, on voit que ces opérations diverses conduisent aux points que nous proposons de nommer :

(2) **Points algébriquement adjoints.**

(3) **Point complémentaire.**

(4) **Point anti-complémentaire.**

(5) **Point associé à l'infini.**

(6) et (6') **Points isobariques (de première et de seconde espèce)** (*).

(7) **Point réciproque (sens ordinaire).**

(8) **Points Brocardiens.**

(9) **Points potentiels de l'ordre** p.

(10) **Points irrationnellement associés.**

Il nous resterait à montrer comment on peut se servir des idées diverses que nous avons exposées dans cette note pour mettre en lumière certaines propriétés de la géométrie du triangle. Mais outre que nous avons eu occasion, dans le courant de ce travail, d'indiquer, çà et là, quelques applications des idées générales qu'il comporte, nous ne pourrions entrer plus profondément dans la sphère de ces applications sans dépasser, d'une façon trop marquée, le caractère élémentaire de cette note.

Voici, pour terminer, quelques identités qui pourront être utiles à ceux qui cultivent cette géométrie du triangle, si particulièrement intéressante par la simplicité, l'élégance et la richesse des propositions qu'elle renferme.

39. Les identités dans la géométrie du triangle. — Le tableau suivant, qui peut être indéfiniment poursuivi, fait connaître quelques identités qu'on rencontre assez souvent dans dans la géométrie du triangle et qui démontrent, suivant les cas, ou que trois points sont en ligne droite, ou que trois droites concourent.

$$\Sigma\,(B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma\,A(B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma\,(B + C)(B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma\,(B + C - A)(B - C) \equiv 0$$
$$\Sigma\,(A^2 - BC)(B + C) \equiv 0$$
$$\Sigma\,(B - C)(A^2 - AB - AC - 2BC) \equiv 0$$

(*) M. Neuberg, observant que les coordonnées du point **(A, C, B)** peuvent être considérées comme proportionnelles à $\left(\frac{A}{BC}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$ propose, pour ce motif, de nommer les points isobariques de deuxième espèce *points semi-réciproques.*

$$\Sigma \left\{ (B - C)^2 - 2(A - C)(A - B) \right\} = 0$$

$$\Sigma A(AB + AC - B^2 - C^2) = 0$$

$$\Sigma \frac{A - B}{C} + \Sigma \frac{A - C}{B} = 0$$

$$\Sigma (B - C)(AB + AC - B^2 - C^2) = 0$$

$$\Sigma (A^2 - BC)^3(B^3 - C^3) = 0$$

$$\Sigma A(B - C)(B + C - A)^2 = 0$$

$$\Sigma A(B + C)(B^2 - C^2)(A^2 - BC) = 0$$

$$(B - C)(C - A)(A - B) + \Sigma A^2 (B - C) = 0$$

$$\Sigma A^2(B - C)(B + C - A)(B^2 + C^2 - AB - AC) = 0$$

$$\Sigma (B - C)^3(B + C - A)(B^2 + C^2 - AB - AC) = 0$$

$$\Sigma A(B - C)(A^2 - BC)(B^2 + C^2 - BC) = 0$$

$$\Sigma A(B - C)(A^2 - AB - AC - 2BC)(B^2 + C^2 - AB - AC) = 0$$

$$\Sigma A(B - C)(B^2 + C^2 - A^2)(B + C - A) = 0$$

$$(A + B + C)^2(A - B)(B - C)(C - A) + \Sigma (A^2 + BC)^2(B - C) = 0$$

$$\Sigma (B - C)(3A^2 - B^2 - C^2 - 2AB - 2AC + 2BC)^2 = 0$$

. . . .

Certaines de ces identités sont évidentes ou faciles à vérifier ; plusieurs autres sont un peu plus difficiles à reconnaître et leur vérification constitue alors un exercice de calcul algébrique (*).

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin**, professeur aux Collège de Vire.

(*Suite*, voir p. 252.)

---

23. — Lemme. Si sur les côtés d'un angle α, on porte à partir du sommet deux longueurs a et b et que, sur ces longueurs comme diamètre, on décrive des circonférences, la portion de tangente commune extérieure l, comprise entre les

---

(*) On trouvera dans le numéro de décembre du *Journal de Mathématiques spéciales* un très intéressant article de M. Neuberg, *sur la transformation de coordonnées dans la géométrie du triangle.* Cet article que nous avons demandé à l'inépuisable obligeance de notre collègue Belge, complète, par un côté, la présente note.

points de contact, est donnée par la formule

$$l = ab \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

24. — Si, sur les côtés d'un triangle comme diamètres, on décrit des circonférences et que l'on désigne par l_a, l_b, l_c les portions de tangente commune extérieure à ces circonférences combinées deux à deux, comprises entre les points de contact, on a

$$l_a \; l_b \; l_c = Sr.$$

25. — Si, sur les deux segments adjacents à l'angle A et déterminés sur les côtés c et b du triangle ABC par les bissectrices intérieures des angles C et B, on décrit des circonférences, et que θ_a désigne la longueur de la portion de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact; θ_b θ_c ayant même signification pour les segments correspondants aux angles B et C, on à la relation

$$\theta_a \; \theta_b \; \theta_c = \frac{r.\, a.\, b.\, c.\, S}{(a + b)\,(a + c)\,(b + c)}.$$

26. — Si, sur les côtés d'un angle égal à l'angle A d'un triangle ABC, on porte des longueurs égales aux segments déterminés par les bissectrices extérieures des angles B et C du triangle en question, segments adjacents à l'angle A, et que l'on décrive des demi-cercles sur ces longueurs; si θ'_a désigne la portion de tangente commune extérieure comprise entre ces points de contacts, et que θ'_b, θ'_c désignent des longueurs analogues pour les angles B et C, on a

$$\theta'_a \; \theta'_b \; \theta'_c = \frac{abc}{(a - b)\,(a - c)\,(b - c)} Sr.$$

27. — L_a, L , L_c désignant des quantités analogues aux précédentes pour les segments déterminés par les hauteurs, on a :

$$L_a \; L_b \; L_c = Sr \cos A \cos B \cos C.$$

On trouve aisément

$$L_a = bc \cos^2 A \sin^2 \frac{A}{2}$$

et des formules analogues pour L_b. L_c; d'où, par multiplication

$$L_a L_b L_c = abc \cos A \cos B \cos C \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2}$$
$$= (p-a)(p-b)(p-c) \cos B \cos B \cos C = Sr \cos A \cos B \cos C.$$

28. — Pour les segments déterminés par les points de contact du cercle inscrit avec les côtés K_a, K_b, K_c, ayant une signification analogue aux précédentes, on a

$$K_a K_b K_c = \frac{S^2 r^2}{abc} = \frac{Sr^2}{4R}.$$

On a, effectivement

$$K_a = (p-a)\sin\frac{A}{2}, \quad K_b = (p-b)\sin\frac{B}{2}, \quad K_c = (p-c)\sin\frac{C}{2}$$

d'où
$$K_a K_b K_c = (p-a)(p-b)(p-c) \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$
$$= Sr \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = \frac{S^2 r^2}{abc} = \frac{Sr^2}{4R}.$$

29. — Pour les segments déterminés par les points de contact des cercles ex-inscrits avec les côtés eux-mêmes, on aura

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{S^2 r^2}{abc} = K_a K_b K_c.$$

On trouve aisément, en effet

$$\lambda_a^2 = (p-b)(p-c) \sin^2\frac{A}{2}$$
$$\lambda_b^2 = (p-a)(p-c) \sin^2\frac{B}{2}$$
$$\lambda_c^2 = (p-a)(p-b) \sin^2\frac{C}{2}$$

d'où

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = (p-a)(p-b)(p-c) \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = \frac{S^2 r^2}{abc} = K_a K_b K_c.$$

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. BALITRAND, *élève de mathématiques spéciales au Lycée de Nîmes.*

... Permettez moi aussi de vous signaler une construction (*) relative au nombre π qui me paraît assez simple. Elle est tirée du *Manuel d'applications mathématiques* de M. Terquem (page 273.) et je la reproduis textuellement.

(*) Comparer avec celle qui a été donnée : Journal, 1886, p. 137.

« On a fait plusieurs tentatives pour trouver par des opérations graphiques plus ou moins simples ; c'est-à-dire avec la règle et le compas, le rapport approché du diamètre à la circonférence, pour les cas où l'on n'a pas besoin d'une grande précision. Voici une construction assez simple et qui donne un résultat exact jusqu'aux dix-millièmes, et qui ne commence par conséquent à différer que dans les cent-millièmes.

Soit AOB le diamètre du cercle dont on cherche le rapport avec la circonférence, on trouvera que AD (que nous allons déterminer) est égal à la demi-circonférence ; ou 2AD égal à la circonférence entière, exactement jusqu'à la cinquième décimale près c'est-à-dire à $\frac{6}{100.000}$, en opérant comme suit :

Soit menée au point B la tangente indéfinie et soit OR, le rayon perpendiculaire au diamètre AOB ;

Soit porté le rayon, comme corde, de R en S, on aura l'arc RS $= 60^\circ$ et SB $= 30^\circ$.

Du centre O, par le point S, soit menée la sécante OST. On aura TB $=$ tg. 30°. Partant du point T, portez trois fois (*) le rayon le long de la tangente de T en D, point qui est ainsi déterminé. Enfin menez DA : c'est la ligne sensiblement égale à la 1/2 circonférence. Car soit le rayon OB $= 1{,}00000$ on aura AD $= 3{,}14153$ qui ne diffère que de 0.00006 de $3{,}14159$ qui présente les cinq premiers chiffres décimaux du rapport de M. de Lagny. On calcule aisément AD, car cette ligne est l'hypothénuse du triangle rectangle ABD, dans lequel AB $= 2{,}00000$ BD $= 3{,}00000 -$ tg $30^\circ = 2{,}42265$; or

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 3{,}14153.$$

L'approximation ainsi obtenue est très suffisante, car l'erreur de ce résultat ne s'élèverait qu'à une ligne pour un cercle qui aurait 231 pieds de diamètre. »

M. Lemoine, dans une lettre qu'il nous adresse, nous fait observer que la question 181, dont une solution a paru dans

(*) il est sous-entendu ici que c'est dans la direction TB.

le dernier numéro, a été traitée par lui (*Journal*, 1885, p. 52) parmi les exercices qui font l'objet de l'article cité.

La question eût été retirée si je m'étais aperçu de ce double emploi.

Elle a d'ailleurs été proposée par le Rev. T. C. Simmons dans l'*Educational Times* (n° 7957) et on trouve sa solution dans le *Mathematical questions and solutions* (1885, p. 80).

On la rencontre encore dans le *Sinopsis of elementary results*, etc., p. 75; on trouvera dans le numéro de décembre du *Journal de M. S.* des renseignements sur ce dernier ouvrage.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

PARIS 1886

---

22 juillet. — I. Un rectangle dont le périmètre est donné, et égal à $2p$, tourne autour d'un de ses côtés. Trouver quelles doivent être ses dimensions et autour de quel côté il doit tourner pour que le volume engendré soit maximum.

Rép. $a = \frac{p}{3}$ $b = \frac{2p}{3}$, volume maximum $\frac{4\pi p^3}{27}$.

II. Démontrer que si trois nombres entiers forment une progression arithmétique de raison r et si l'un d'eux est un multiple de r le produit de ces trois nombres est divisible par $6r^3$.

23 juillet. — I. Soient deux points A et A′ sur un rayon d'une circonférence C de centre O, de rayon R, et posons $OA = a$, $OA' = a'$; quelle relation doit-il y avoir entre a et a' pour que le rapport $\frac{Ma}{Ma'}$ des distances d'un point quelconque M de la circonférence aux points A et A′ soit constant? On calculera à cet effet $\frac{MA^2}{MA'^2}$ en fonction du cosinus de l'angle θ que fait OM avec OA et on cherchera la condition pour que ce rapport soit indépendant de cosinus θ.

Rép. $$\frac{R^2 + a^2}{R^2 + a'^2} = \frac{a}{a'}.$$

II. Étant donné un plan incliné de hauteur $AB = h$ et faisant un angle α avec le plan horizontal, on abandonne en A un point matériel sans vitesse initiale, au bout de combien de temps arrivera-t-il en C? On distingue par g l'accélération de la pesanteur.

Rép. $$t = \frac{1}{\sin \alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

24 juillet. — I. Démontrer que dans la parabole la sous-normale est constante et égale au paramètre.

II. Déterminer les valeurs des arcs x et y qui vérifient les deux équations : $\sin x + \sin y = 1$; $\cos 2x + \cos 2y = 1 - a^2$, dans lesquelles a représente un nombre donné. On calculera $\sin x$ et $\sin y$.

Rép. $$\sin x = \frac{1 + a}{2}, \quad \sin y = \frac{1 - a}{2}.$$

26 juillet. — I. Démontrer que les forces appliquées à un corps peuvent toutes se ramener à deux.

II. Résoudre l'équation $2 \cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$; il faudra (*) d'abord montrer qu'on peut la transformer en deux autres $\cos 2x = 0$ et $\cos x + \cos 3x = 0$.

Rép. $$x = \mathrm{K}\pi \pm \frac{\pi}{4}; \qquad x = \mathrm{K}\pi.$$

27 juillet. — I. Couper une sphère donnée par un plan de manière que le rapport du plus grand segment sphérique déterminé ainsi, au cône qui a pour sommet le centre de la sphère, et pour base la section, soit égal à m

Rép. $m < 1$, une seule solution $x = \frac{\mathrm{R}}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{m - 9}{m - 1}}\right]$.

$9 > m > 1$, pas de solution ;

$m > 9$, deux solutions $x = \frac{\mathrm{R}}{2}\left[1 \pm \sqrt{\frac{m - 9}{m - 1}}\right]$.

II. Deux trièdres qui ont les trois faces égales ont les dièdres égaux.

28 juillet. — I. Calculer la hauteur abaissée du sommet A d'un triangle sur le côté opposé : connaissant l'angle A et les deux segments déterminés par la hauteur sur les côtés opposés. — On donne $\mathrm{ABD} = m$, $\mathrm{DC} = n$, et on demande de calculer $\mathrm{AD} = x$.

II. Un projectile est lancé de bas en haut verticalement avec une vitesse de 20^{m} par seconde, quelle sera sa vitesse quand il sera parvenu à une hauteur de 15^{m} ?

29 juillet. — I. Étant donné un cercle et une corde AB, calculer le côté du carré DEHK inscrit dans l'un des segments déterminés par la corde.

II. Fraction ordinaire génératrice de la fraction décimale suivante : 0,53824824824... Indiquer les raisonnements par lesquels on la détermine.

(*) Il était au moins aussi simple, croyons-nous, voulant diriger le candidat vers une décomposition de l'équation, d'observer que celle-ci peut s'écrire

$$2 \cos x + 2 \cos 4x \cos x = 0,$$

ce qui conduit à une décomposition un peu plus rapide que celle que l'on avait indiquée : $\cos x = 0$, $\cos 4x + 1 = 0$, etc. La réponse est immédiatement donnée par les formules

$$x = \mathrm{K}\pi, \quad \text{et} \quad x = \mathrm{K}\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4};$$

formules qui sont d'ailleurs conformes à celles qui sont écrites plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

Nous sommes heureux d'annoncer à nos lecteurs l'apparition de la *deuxième édition de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de la Géométrie du cours de mathématiques élémentaires de M. Combette* (F. Alcan, éditeur).

Ces ouvrages ont été, il y a seulement quatre ans, analysés dans ce journal. Tout le bien qu'on a dit d'eux était mérité et, en supposant la chose nécessaire, se trouve justifié par le succès que nous constatons aujourd'hui.

La nouvelle édition du Cours d'Algèbre a reçu quelques améliorations qu'il est utile de mentionner.

1° La méthode de résolution en nombres entiers de l'équation du premier degré à deux inconnues a été changée : ce problème est résolu en appliquant une forme remarquable du plus grand commun diviseur à deux nombres ($\Delta = A\alpha + B\beta$).

2° L'auteur a changé les méthodes qui conduisent à la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations du deuxième degré aient une racine commune, et a donné les diverses formes de cette condition qu'il importe de connaître pour plusieurs questions d'algèbre.

3° La résolution des équations irrationnelles du deuxième degré a été traitée plus complètement.

4° Un chapitre nouveau a été consacré à la résolution de deux inégalités simultanées, dont une au moins est du deuxième degré.

5° La discussion des fonctions a été complétée par une théorie élémentaire des dérivées et de leurs applications : le tracé des branches infinies dans les courbes figuratives a été précisé par la recherche des asymptotes, déduite d'une transformation simple de la fonction explicite.

6° La méthode dite des substitutions qui souvent simplifie tant la discussion des problèmes, a été appliquée à des exemples remarquables.

7° La discussion générale du quotient de deux trinômes du second degré a été ajoutée, ainsi que les formes principales de la courbe figurative.

8° Les exercices ou problèmes, dont le nombre s'est trouvé sensiblement augmenté par les questions proposées dans les diverses académies aux baccalauréats ès sciences, ont été reportés à la fin du cours et classés méthodiquement.

On trouve enfin dans la nouvelle édition du Cours de Géométrie quelques modifications dans l'ordre des applications de l'homothétie et de la mesure des volumes où l'auteur a placé le théorème général permettant de cuber le solide limité par deux polygones à plans parallèles, et par les triangles qui ont pour bases et pour sommets les côtés et les sommets de ces polygones.

Les énoncés des problèmes donnés aux examens récents ont été ajoutés parmi les nombreux exercices déjà proposés.

G. L.

QUESTION 183

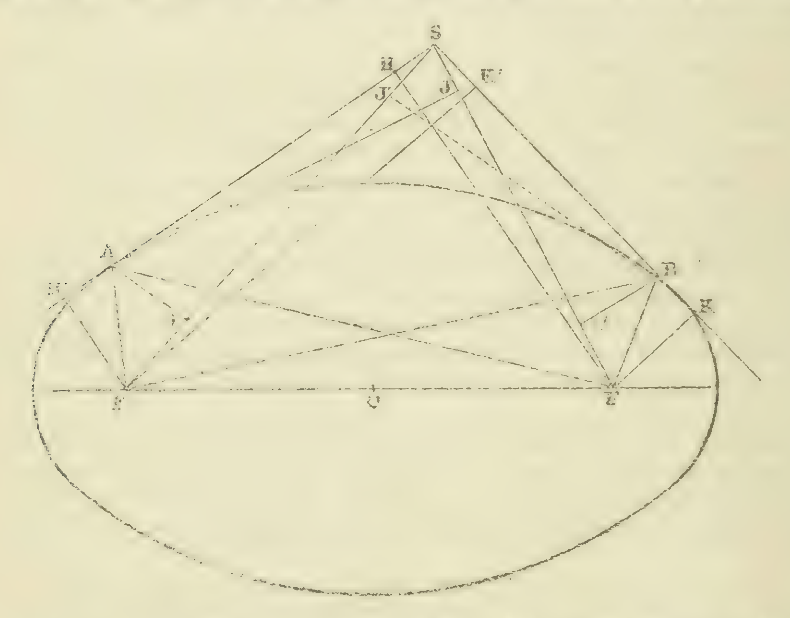
Solution par M. Henri MARTIN, élève au Lycée Condorcet.

Par un point S *on mène deux tangentes* SA, SB *à une ellipse de foyers* F *et* F′. *Démontrer les relations :*

$$\frac{\overline{SF}^2}{\overline{SF'}^2} = \frac{FA \times FB}{F'A \times F'B}; \qquad \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}^2} = \frac{AF \times AF'}{BF \times BF'}.$$

(E. Vigarié.)

Des points F et F′ abaissons des perpendiculaires FH, F′H′, FK, F′K′ sur les tangentes; des points A et B abaissons



aussi des perpendiculaires AI, BI′, AJ, BJ′, sur les droites SF′, SF. Les triangles rectangles AFH et BFK, respectivement semblables aux triangles AF′H′ et BF′K′ donnent :

$$\frac{AF}{AF'} = \frac{FH}{F'H'}, \frac{FB}{F'B} = \frac{FK}{F'K'} \qquad \frac{FA.FB}{F'A.F'B} = \frac{FH}{F'H'} \times \frac{FK}{F'K'}.$$

Mais les triangles SFK et SFH respectivement semblables aux triangles SF′H′ et SF′K′ donnent aussi

$$\frac{FH}{F'H'} = \frac{FK}{F'K'} = \frac{SF}{SF'}.$$

Donc

$$\frac{\overline{SF}^2}{\overline{SF'}^2} = \frac{FA.FB}{F'A.F'B}.$$

Les triangles rectangles SAI et SAJ respectivement semblables aux triangles SBI′ et SBJ′ donnent

$$\frac{SA}{SB} = \frac{AI}{BI'} = \frac{AJ}{BJ'}, \qquad \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}^2} = \frac{AI}{BJ'} \times \frac{AJ}{BI'}.$$

Or les triangles rectangles AF′I et AFJ sont respectivement semblables aux triangles BF′J′ et BFI′, puisque les droites SF′ et SF sont bissectrices des angles AF′B et AFB. On a donc

$$\frac{AF'}{BF'} = \frac{AI}{BJ'} \qquad \frac{AF}{BF} = \frac{AJ}{BI'} \cdot \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}^2} = \frac{FA \times F'A}{FB \times F'B}.$$

C. Q. F. D.

Note. — On obtient une solution un peu plus simple en procédant ainsi : prenons sur F′B le symétrique f de F par rapport à SB et un point A_1 tel que $F'A_1 = F'A$. Si on remarque que $SA_1 = SA$ et que dans le triangle F′Sf les droites SA_1, SB sont des droites inverses, en appliquant à ces droites les formules connues (v. *Journ. Élém.* 1885, p. 56) on trouvera immédiatement les formules qu'il fallait démontrer.

E. V.

Nota. — M. C. Gralleau, maître auxiliaire au lycée de Marseille a aussi résolu cette question.

QUESTIONS PROPOSÉES

236. — Démontrer la formule

$$\text{arc cos} \frac{a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \cos x}{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos x} = 2 \text{ arc tg} \left(\frac{b}{a} \text{ tg} \frac{x}{2}\right).$$

(Boutin.)

237. — Dans le triangle ABC on on mène les droites AD, BE, CF, qui se coupent au même point G, et rencontrent les côtés opposés aux points D. E, F. On propose de dé-

montrer que

$$\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}.$$

(G. Russo.)

238. — A l'intérieur d'une demi-circonférence de diamètre AB, on décrit deux autres demi-circonférences O et O′ tangentes en A et en B à la première ; puis, on mène l'axe radical des circonférences O et O′. Démontrer que les deux cercles tangents à la circonférence AB, à l'axe radical et à chacune des circonférences O et O′ sont égaux.

(Bordage.)

239. Résoudre les équations:

$$x(y + z + yz) = a,$$
$$y(z + x + xz) = b,$$
$$z(x + y + xy) = c.$$

(Ignacio Beyens.)

Nota. — Cette question, sous une forme différente, est proposée dans le numéro d'octobre dernier de l'*Educational Times;* c'est à cette publication que nous l'avons empruntée. G. L.

Une solution de la question n° 7 paraîtra prochainement. Toutes les questions proposées dans les années 1882 et 1883 se trouvent ainsi résolues.

Voici les numéros des questions proposées en 1884 et qui n'ont pas encore reçu de solution : 128, 131, 132, 134, 142, 145, 147, 148, 149, 150, 158, 159, 160 et 161.

Erratum. — Dans l'énoncé de la question 230, il faut entendre que les points en question sont algébriquement adjoints *dans le triangle anti-complémentaire.*

Le Directeur-Gérant,

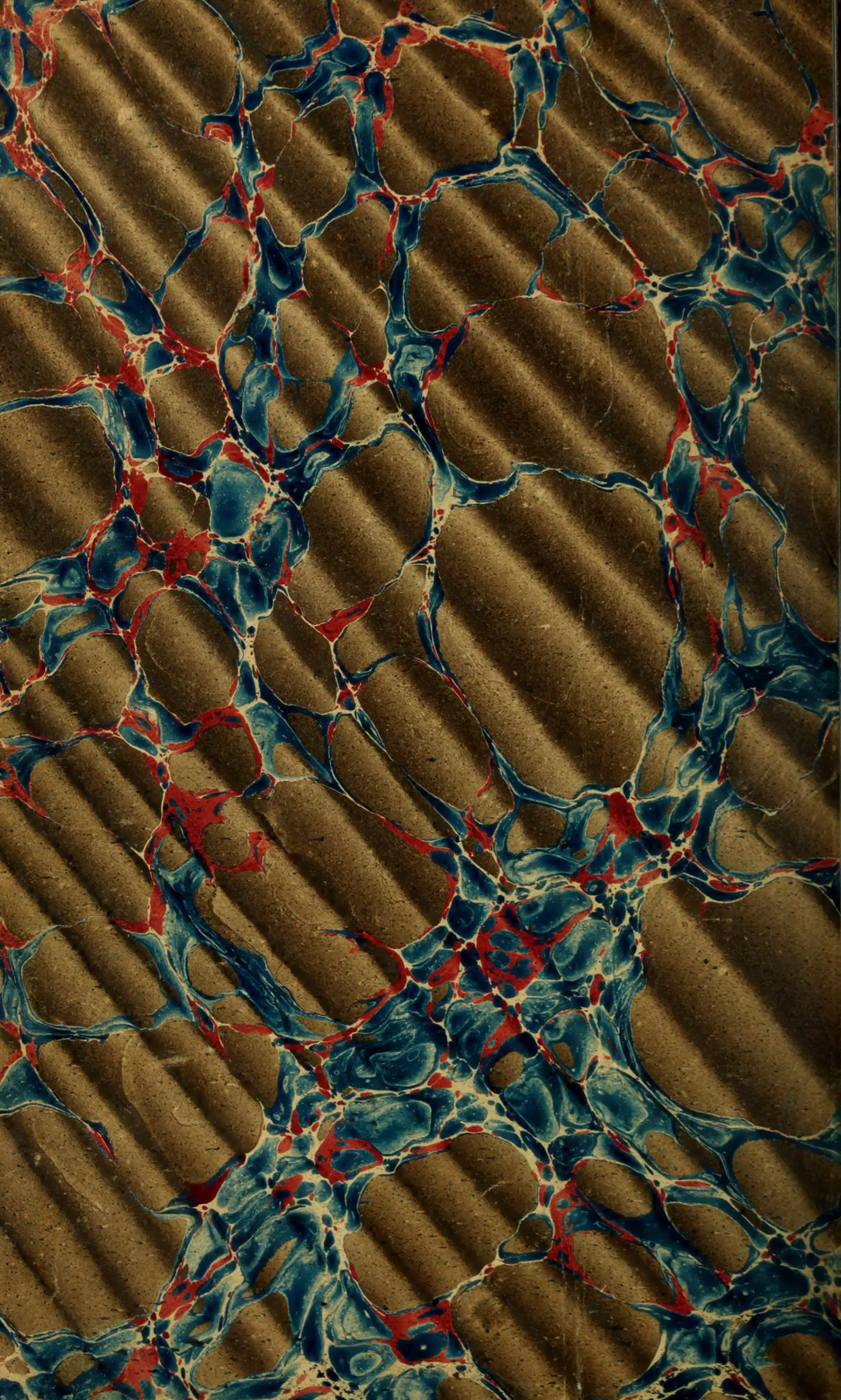
G. de LONGCHAMPS.

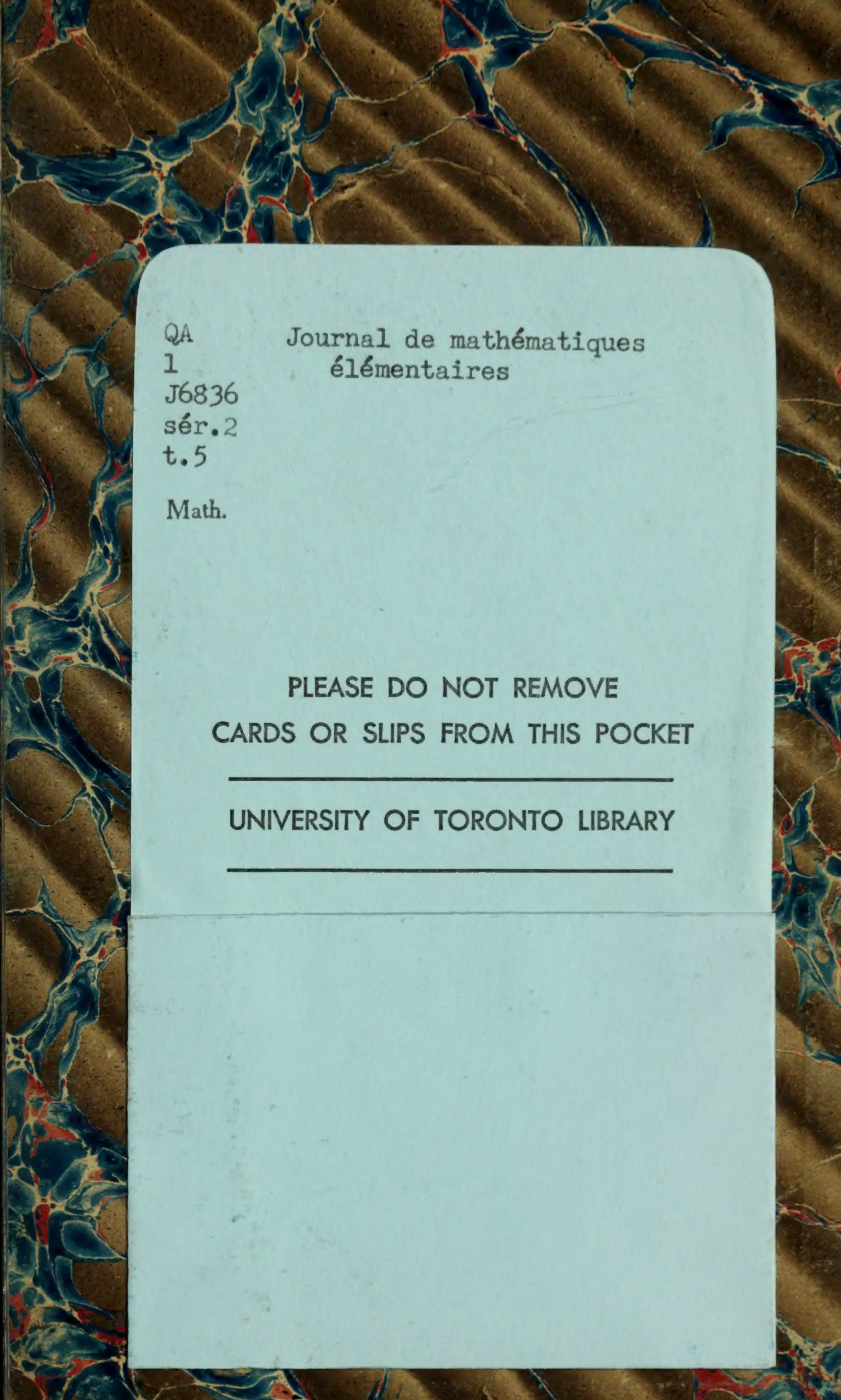
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24516-6.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 24516-6.




QA
1
J6836
sér.2
t.5

Math.

Journal de mathématiques élémentaires

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

